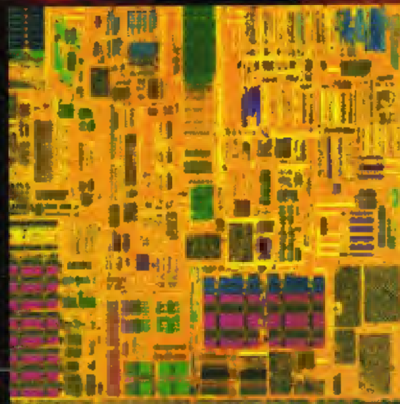
Análisis de circuitos en ingeniería

séptima edición





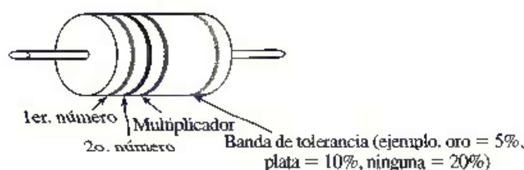


William H. Hayt, Jr.
Jack E. Kemmerly
Steven M. Durbin

Mc Graw Hill

Código de colores de las resistencias

Color de la banda	Negro	Café	Rojo	Naranja	Amarillo	Verde	Azul	Violeta	Gris	Blanco
Valor numérico	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



1. Escriba el valor numérico correspondiente a la primera banda desde la izquierda.
2. Escriba el valor numérico correspondiente a la segunda banda desde la izquierda.
3. Escriba el número de ceros que indica la banda multiplicadora, la cual representa una potencia de 10 (negro 5 sin ceros adicionales, café 5 1 cero, etc.) Una banda multiplicadora de color oro indica que el decimal se corre un lugar hacia la izquierda; una banda multiplicadora de plata indica que el decimal se corre dos lugares hacia la izquierda.
4. La banda de tolerancia representa la precisión. Así que, por ejemplo, no sería una sorpresa encontrar una resistencia de 100 Ω con una tolerancia de 5% cuyo valor medido se encuentre en algún punto dentro del rango de 95 a 105 Ω.

Ejemplo

Rojo Rojo Naranja Oro	= 22 000	o 22×10^3	= 22 kΩ, 5% de tolerancia
Azul Gris Oro	= 6.8	o 68×10^{-1}	= 6.8 Ω, 20% de tolerancia

Valores estándar de resistencias con tolerancia de 5%

1.0	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	9.1	Ω
10.	11.	12.	13.	15.	16.	18.	20.	22.	24.	27.	30.	33.	36.	39.	43.	47.	51.	56.	62.	68.	75.	82.	91.	Ω
100	110	120	130	150	160	180	200	220	240	270	300	330	360	390	430	470	510	560	620	680	750	820	910	Ω
1.0	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	9.1	kΩ
10.	11.	12.	13.	15.	16.	18.	20.	22.	24.	27.	30.	33.	36.	39.	43.	47.	51.	56.	62.	68.	75.	82.	91.	kΩ
100	110	120	130	150	160	180	200	220	240	270	300	330	360	390	430	470	510	560	620	680	750	820	910	kΩ
1.0	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	9.1	MΩ

TABLA 14.1 Pares de transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})u(t)$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)(\mathbf{s}+\beta)}$
$u(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}}$	$\operatorname{sen}\omega t\, u(t)$	$\frac{\omega}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$tu(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}^2}$	$\cos\omega t\, u(t)$	$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t),\ n=1,2,\ldots$	$\frac{1}{\mathbf{s}^n}$	$\operatorname{sen}(\omega t+\theta)\, u(t)$	$\frac{\mathbf{s}\operatorname{sen}\theta+\omega\cos\theta}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}+\alpha}$	$\cos(\omega t+\theta)\, u(t)$	$\frac{\mathbf{s}\cos\theta-\omega\operatorname{sen}\theta}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$te^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)^2}$	$e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega t\, u(t)$	$\frac{\omega}{(\mathbf{s}+\alpha)^2+\omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t),\ n=1,2,\ldots$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)^n}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega t\, u(t)$	$\frac{\mathbf{s}+\alpha}{(\mathbf{s}+\alpha)^2+\omega^2}$

TABLA 6.1 Resumen de circuitos básicos de amp ops

Nombre	Esquema del circuito	Relación entrada-salida
Amplificador inversor		$v_{sal} = -\frac{R_f}{R_1} v_{ent}$
Amplificador no-inversor		$v_{sal} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_{ent}$
Seguidor de voltaje (también conocido como amplificador de ganancia unitaria)		$v_{sal} = v_{ent}$
Amplificador sumador		$v_{sal} = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3)$
Amplificador diferencia		$v_{sal} = v_2 - v_1$

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN INGENIERÍA

William H. Hayt, Jr. (finado)
Purdue University
Jack E. Kemmerly (finado)
California State University
Steven M. Durbin

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN INGENIERÍA

SÉPTIMA EDICIÓN

William H. Hayt, Jr. (finado)

Purdue University

Jack E. Kemmerly (finado)

California State University

Steven M. Durbin

University of Canterbury
Te Whare Wānanga o Waitaha

Revisión técnica:

Ahmed Zekkour Zekkour

Jefe del Área Eléctrica

Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco

McGraw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA
MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND
LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO
SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Director editorial: Ricardo A. del Bosque Alayón
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Editora de desarrollo: Lorena Campa Rojas
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Carlos Roberto Cordero Pedraza

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN INGENIERÍA
Séptima edición



McGraw-Hill
Interamericana

A Subsidiary of ***The McGraw-Hill*** *Companies, Inc.*
Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

Fotografías de portada: Imagen de la cabina del avión © *PhotoLink/Getty Images*
Aerogeneradores: *Russell Illig/Getty Images*
Multímetro gráfico Fluke: *Cortesía de Fluke Corporation*
Tarjeta de un Procesador Intel® Pentium® M (Dothan): *Cortesía de Intel Corporation*

ISBN-13: 978-970-10-6107-7
ISBN-10: 970-10-6107-1
(ISBN: 970-10-3694-8 edición anterior)

Traducido de la séptima edición en inglés de la obra *ENGINEERING CIRCUIT ANALYSIS*, byWilliam H. Hayt, Jack E. Kemmerly and Steven M. Durbin. Copyright © 2007 by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.
ISBN-10: 0-07-286611-X
ISBN-13: 978-0-07-286611-7

2345678901 09765432108

Impreso en China
Impreso por CTPS

Printed in China
Printed by CTPS

The ***McGraw-Hill*** *Companies*

Para Sean y Kristi. La mejor parte de todos los días.

NUESTRO COMPROMISO CON LA EXACTITUD

El lector tiene el derecho de esperar un libro preciso y la división de Ingeniería de McGraw-Hill invierte una cantidad de tiempo y esfuerzo considerables para asegurarse de entregarle lo que desea. A continuación se muestran los diferentes pasos que tomamos en este proceso.

NUESTRO PROCESO DE VERIFICACIÓN DE LA EXACTITUD

Primera etapa

Paso 1: Un número significativo de **profesores de ingeniería a nivel universitario** revisa el manuscrito y reporta los errores al equipo editorial. Los autores revisan sus comentarios y efectúan las correcciones necesarias en su manuscrito.

Segunda etapa

Paso 2: Un **experto en el campo de estudio** revisa cada ejemplo y ejercicio del manuscrito final para verificar la exactitud de los ejemplos, ejercicios y respuestas. Los autores revisan las correcciones que resulten y las incorporan en el manuscrito final y en el manual de soluciones.

Paso 3: El manuscrito se entrega a un **editor de textos**, que revisa todas las páginas a fin de encontrar errores gramaticales y de estilo. Al mismo tiempo, el experto en el campo de estudio comienza a llevar a cabo una segunda revisión de la exactitud. Todas las correcciones se someten de manera simultánea a la consideración de los **autores**, quienes revisan e integran la edición y, posteriormente, someten las páginas del manuscrito a la composición de letras de imprenta.

Tercera etapa

Paso 4: Los **autores** revisan sus pruebas con un doble propósito: 1) asegurarse de que se hayan efectuado de forma correcta las correcciones previas y, 2) encontrar cualquier error que no haya sido detectado.

Paso 5: Se asigna al proyecto un **revisor del texto** para analizar las pruebas de las páginas, verificar por segunda vez el trabajo del autor, así como para adicionar un análisis crítico al libro. Se incorporan las revisiones en el nuevo lote de páginas las cuales son sometidas de nueva cuenta a verificación por parte del autor.

Cuarta etapa

Paso 6: El **equipo de autores** somete el manual de soluciones a la persona **experta en el campo de estudio**, a fin de que éste compare las páginas de texto con el manual de soluciones a manera de una revisión final.

Paso 7: **El gerente del proyecto, el equipo editorial** y **el equipo del autor** revisan las páginas del texto como una verificación final de su exactitud.

El texto de ingeniería resultante ha pasado a través de varias etapas donde se ha asegurado su calidad y se ha verificado que se encuentre libre de errores y que sea lo más preciso posible. Nuestros autores y el grupo editorial confían que, a través de este proceso, se entregan libros de texto que sean líderes en el mercado en cuanto a su precisión e integridad técnica.

ACERCA DE LOS AUTORES

WILLIAM H. HAYT, JR. cursó su licenciatura y maestría en la Universidad Purdue, y su doctorado en la Universidad de Illinois. Después de pasar cuatro años en la industria, el profesor Hayt ingresó a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Purdue, donde colaboró como profesor y jefe de la Escuela de Ingeniería Eléctrica y como profesor emérito luego de retirarse en 1986. Además de la obra *Análisis de circuitos en ingeniería,* el profesor Hayt es autor de otros tres libros, entre los que se incluyen *Teoría electromagnética,* ahora publicado en su sexta edición por McGraw-Hill. El profesor Hayt ha pertenecido a las siguientes sociedades profesionales: Eta Kappa Nu, Tau Beta Pi, Sigma Xi, Sigma Delta Chi, miembro del IEEE, ASEE y NAEB. Mientras estuvo en Purdue, recibió varios premios a la enseñanza, entre los que se cuentan el premio al mejor profesor universitario. También se encuentra en la lista del libro de grandes maestros de Purdue, un muro permanente que se exhibe en Purdue Memorial Union, donde quedó inscrito el 23 de abril de 1999. El libro lleva los nombres del grupo inaugural de 225 miembros de la facultad, del pasado y el presente, quienes dedicaron sus vidas a la excelencia en la enseñanza y la erudición. Fueron elegidos por los estudiantes y colegas como los mejores educadores de Purdue.

JACK E. KEMMERLY recibió su licenciatura con grado Magna Cum Laude por parte de la Universidad Católica de América, su maestría por parte de la Universidad de Denver y su doctorado de la Universidad Purdue. Enseñó primero en esta última universidad y después trabajó como ingeniero en jefe en la División de Aeroneutrónica de Ford Motor Company. Después ingresó a la Universidad Estatal de California, en Fullerton, donde se desempeñó como profesor, director de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, director de la División de Ingeniería y profesor emérito. El profesor Kemmerly ha pertenecido a las siguientes sociedades profesionales: Eta Kappa Nu, Tau Beta Pi, Sigma Xi, ASEE e IEEE (miembro Senior). Sus intereses fuera de la academia incluyen ser oficial de la Little League y jefe de grupo de los Boy Scouts.

STEVEN M. DURBIN cursó su licenciatura, maestría y doctorado en las universidades de Purdue, West Lafayette e Indiana, respectivamente. Luego de obtener su doctorado, ingresó al Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Florida A&M y de la Universidad Estatal de Florida. En agosto de 2000 aceptó un puesto académico en la Universidad de Canterbury, en Christchurch, Nueva Zelanda, donde enseña circuitos, electrónica y cursos relacionados con el estado sólido; asimismo, realiza investigaciones sobre nuevos materiales aplicados a la electrónica y estructuras de dispositivos. Es miembro senior del IEEE así como miembro de Eta Kappa Nu, la Electron Devices Society, la American Physical Society y la Royal Society de Nueva Zelanda.

PREFACIO

Se pretende que la lectura de este libro sea una experiencia placentera, aun cuando el texto sea por necesidad científicamente riguroso y un tanto matemático. Nosotros, los autores, tratamos de compartir la idea de que el análisis de circuitos resulta entretenido. No sólo es útil y del todo esencial para el estudio de la ingeniería, sino también una maravillosa capacitación para el pensamiento lógico: es bueno incluso para aquellos que quizá nunca analicen otro circuito en su carrera profesional. Mirando retrospectivamente, luego de finalizar el curso, muchos estudiantes se sorprenden en verdad por todas las excelentes herramientas analíticas que se derivan sólo de **tres leyes científicas simples**: la ley de Ohm y las leyes de tensión y de corriente de Kirchhoff.

En muchas universidades públicas y privadas, el curso introductorio de Ingeniería Eléctrica será precedido o estará acompañado por uno introductorio de Física, en el que se presentan los conceptos básicos de la electricidad y el magnetismo, casi siempre a partir del aspecto de campo. Sin embargo, los antecedentes de este tipo no constituyen un prerrequisito, sino que varios de los conceptos básicos esenciales de la electricidad y el magnetismo se explican (o revisan), según se necesite. Para la lectura del libro, sólo se requiere haber tomado un curso introductorio de cálculo como prerrequisito, o quizás como correquisito. Los elementos de circuito se presentan y definen aquí en términos de sus ecuaciones de circuito; sólo se ofrecen comentarios incidentales acerca de relaciones de campo pertinentes. En el pasado, tratamos de presentar el curso básico del análisis de circuitos viendo en tres o cuatro semanas la teoría del campo electromagnético, a fin de poder definir los elementos de circuito con mayor precisión, en términos de las ecuaciones de Maxwell. Los resultados, en especial con respecto de la aceptación de los estudiantes, no fueron buenos.

Pretendemos que este texto ayude a los estudiantes a enseñarse a sí mismos la ciencia del análisis de circuitos. *Está dirigido al estudiante, y no al profesor,* pues el primero es quien tal vez dedique más tiempo a leerlo. Se hizo el máximo esfuerzo para que cada término nuevo se definiera claramente cuando se presenta por primera vez. El material básico aparece al inicio de cada capítulo y se explica con cuidado y en detalle; se emplean numerosos ejemplos para presentar y sugerir resultados generales. Aparecen problemas prácticos a lo largo de cada capítulo, los cuales resultan por lo general simples; asimismo, se dan respuestas en orden en las diversas partes. Los problemas más difíciles aparecen al final de los capítulos y siguen el orden general de presentación del material del texto. Estos problemas se utilizan en ocasiones para introducir temas menos importantes o más avanzados, a través de un procedimiento guiado paso a paso, así como para presentar temas que aparecerán en el siguiente capítulo. La presentación y la repetición resultante son importantes para el proceso de aprendizaje. En total, hay más de 1 200 problemas de fin de capítulo, además de numerosos problemas de práctica y más de 170 ejemplos trabajados. La mayor parte de los ejercicios es nueva en esta edición, y con el auxilio de varios colegas, cada problema se resolvió a mano y se verificó en computadora cuando así convenía.

Si en ocasiones el libro parece ser informal, o incluso ligero, se debe a que no es necesario ser secos o pomposos para ser educativos. Las sonrisas sorpresivas en las caras de nuestros estudiantes rara vez son obstáculo para que absorban información. *Si la redacción del libro tuvo sus momentos de entretenimiento, entonces, ¿por qué no pensar también lo mismo en el caso de la lectura?* La presentación del material en el texto representa un proceso evolutivo a través de los cursos impartidos en la Universidad de Purdue; la Universidad Estatal de California, Fullerton; Fort Lewis College en Durango; el programa de Ingeniería conjunto de la Universidad de Florida A&M y la Universidad Estatal de Florida; y la Universidad de Canterbury (Nueva Zelanda). Dichos estudiantes vieron todo desde el principio y sus comentarios y sugerencias frecuentes se agradecen infinitamente.

Es un verdadero honor poder ser el coautor de *Análisis de circuitos en Ingeniería*, publicado por primera vez en 1962. Ahora en su séptima edición, este libro ha experimentado tanto un progreso permanente como un cambio importante en la forma en que se enseña el análisis de circuitos. Yo lo utilicé como estudiante en la carrera de ingeniería en Purdue, donde tuve la fortuna de tomar este curso con el mismo Bill Hayt, que sin duda es uno de los mejores profesores que jamás haya tenido.

Existen varias características dignas de mencionarse en *Análisis de circuitos en Ingeniería* que han propiciado su éxito. Está muy bien estructurado y probado por el tiempo, y los conceptos clave se presentan en un formato muy lógico, aunque también se vinculan de manera clara en un marco de referencia mayor. También cuenta con análisis bien ubicados, mezclados con ejemplos de gran utilidad y problemas prácticos excelentes. No se escatima cuando se trata de presentar la teoría en la que se basa un tema en particular o en el desarrollo de las bases matemáticas correspondientes. Sin embargo, todo ha sido cuidadosamente diseñado para ayudar al estudiante en el aprendizaje de cómo llevar a cabo el análisis de circuitos por sí mismo; la teoría con el propósito de teorizar se deja para otros textos. Bill Hayt y Jack Kemmerly realizaron un gran trabajo en la creación de la primera edición y su deseo de transmitir al lector parte de su entusiasmo desbordante aparece en cada capítulo.

LO NUEVO EN LA SÉPTIMA EDICIÓN

Cuando se tomó la decisión de hacer esta séptima edición a todo color, todos los miembros del equipo de producción hicieron todo su esfuerzo para hacer lo mejor de esta excitante oportunidad. Un sinnúmero de borradores (estoy seguro que alguna persona del departamento de contabilidad los contó), revisiones, modelos y machotes cruzaron el ether (net), a medida que poníamos todo nuestro esfuerzo para hacer que todo el trabajo a colores representara un ventaja para el estudiante. El resultado final de este trabajo en equipo, considero, es difícil de alcanzar. Existen muchos otros cambios con respecto a la sexta edición, aunque se ha puesto especial cuidado en la conservación de las características clave, el flujo general de ideas y el contenido en su totalidad para beneficio de los profesores actuales. Por lo tanto, una vez más, hemos utilizado diferentes iconos:


Ofrece una advertencia de errores comunes


Indica un punto específico que vale la pena observar

 Denota un problema de diseño para el cual no existe una solución única

 Indica un problema que requiere del análisis asistido por computadora

Con la idea de que los paquetes de software sobre ingeniería pueden ser de ayuda en el proceso de aprendizaje, pero que no deben ser utilizados como muletas, los problemas al final de cada capítulo marcados con se encuentran diseñados de tal forma que el software se utilice para verificar las respuestas y no para proporcionarlas.

Muchos profesores se ven en apuros para cubrir el material requerido para su curso específico sobre circuitos y, por lo tanto, pueden saltarse algunos de los capítulos. Esto es particularmente válido en el tema de amplificadores operacionales, por lo que ése y subsecuentes capítulos se han escrito de tal forma que el material pueda ser omitido sin que ello signifique pérdida de claridad o flujo. La decisión de colocar el capítulo 6 inmediatamente después de terminar el análisis de cd se tomó a fin de que los circuitos de amp ops puedan utilizarse para reforzar las técnicas del análisis de circuitos que se estudiaron en capítulos anteriores. Los efectos transitorios y la respuesta en frecuencia, con excepción de la velocidad de bajada, se incluyen al final de los capítulos relevantes, lo cual evita tener una sobrecarga de información, a la vez que proporciona un gran número de oportunidades para el uso de los amp ops como ejemplos prácticos de los conceptos sobre análisis de circuitos que se están estudiando.

Vale la pena también mencionar aquí el tema de la frecuencia compleja. Bill Hayt fue de la idea de que las transformadas de Laplace deberían presentarse como un caso especial de las transformadas de Fourier, esto es, un ejercicio matemático directo. Sin embargo, muchos programas no abarcan los conceptos que se basan en Fourier hasta los cursos posteriores sobre señales y sistemas, por lo que él y Jack Kemmerly le presentan al estudiante la noción de frecuencia compleja como una extensión de los fasores. Se ha conservado esta técnica amigable para el estudiante y representa una característica de gran valor del texto, donde otros tratamientos a menudo comienzan el capítulo sobre análisis de Laplace estableciendo simplemente la transformada integral.

LOS CAMBIOS EN LA SÉPTIMA EDICIÓN INCLUYEN:

1. Un gran número de ejemplos nuevos y revisados, en particular en la parte de análisis transitorio (capítulos 7, 8 y 9).
2. Una gran cantidad de reescritura y expansión del material sobre amp ops en el capítulo 6. Este material incluye ahora el análisis de su uso para construir fuentes de corriente y de voltaje, y de velocidad de bajada, comparadores y amplificadores de instrumentación. Se analizan a detalle varios tipos de configuraciones, pero algunas variaciones se dejan a los estudiantes a fin de que puedan resolverlas por sí mismos.
3. La adición de varios cientos de problemas al final de cada capítulo.
4. Varias tablas nuevas para referencia rápida.
5. Atención minuciosa a cada ejemplo a fin de asegurar explicaciones concisas, pasos intermedios apropiados y figuras adecuadas. Como se hizo en la sexta edición, cada ejemplo está redactado de forma similar a una pregunta de examen y diseñado para ayudar en la resolución de problemas, contrariamente a la ilustración del concepto.

6. En respuesta a los comentarios de muchos estudiantes, se ha incluido una gran variedad de problemas al final de cada capítulo, en los que se cuentan problemas directos para "proporcionar confianza en sí mismo".
7. La sección de "Metas y objetivos" al comienzo de cada capítulo ha sido rebautizada como "Conceptos clave", a fin de proporcionar una referencia rápida del contenido de cada uno.
8. Se han agregado algunas secciones de "Aplicación práctica", a la vez que se han actualizado las existentes.
9. Nuevas fotos, mucha de ellas en cuatro colores, a fin de agregar una perspectiva visual de los temas relevantes.
10. El nuevo software multimedia (en línea) que acompaña a este libro incluye una actualización, que había sido anticipada por un largo tiempo, del manual de soluciones COSMOS, creado por los profesores.

La inesperada muerte de Bill Hayt muy al comienzo del proceso de revisión de la sexta edición representó un golpe muy duro. Nunca tuve la oportunidad de hablar con él acerca de las modificaciones planeadas: sólo esperaba que las continuas revisiones ayudaran a que este libro hablara a otra generación de brillantes estudiantes jóvenes de ingeniería. Mientras tanto, nosotros (durbin@ieee.org y los editores de McGraw-Hill) le damos la bienvenida a los comentarios y retroalimentación por parte de estudiantes y profesores. Ya sean positivos o negativos, serán todos de gran valía para nosotros.

Por supuesto que este proyecto ha sido un esfuerzo de equipo y mucha gente ha participado y prestado su ayuda. El apoyo siempre presente de la editorial McGraw-Hill y del grupo de producción, que incluye a Melinda Bilecki, Michelle Flomenhoft, Kalah Cavanaugh, Michael Hackett, Christina Nelson, Eric Weber, Phil Meek y Kay Brimeyer se reconoce profundamente. También quisiera agradecer a mi representante local de McGraw-Hill, Nazier Hassan, quien me visitaba en el campus para tomar una taza de café y preguntar cómo iban las cosas. Trabajar con estas personas ha sido verdaderamente increíble.

En la séptima edición, las siguientes personas merecen reconocimiento y una deuda de gratitud por su tiempo y energía en la revisión de las diversas versiones del manuscrito:

Miroslav M. Begovic, *Georgia Institute of Technology*
Maqsood Chaudhry, *California State University, Fullerton*
Wade Enright, *Viva Technical Solutions, Ltd.*
Rick Fields, *TRW*
Victor Gerez, *Montana State University*
Dennis Goeckel, *Univeristy of Massachusetts, Amherst*
Paul M. Goggans, *University of Mississippi*
Riadh Habash, *University of Ottawa*
Jay H. Harris, *San Diego State University*
Archie Holmes, Jr. *University of Texas, Austin,*
Sheila Horan, *New Mexico State University*
Douglas E. Jussaume, *University of Tulsa*
James S. Kang, *California State Polytechnic University, Pomona*
Chandra Kavitha, *University of Massachusetts, Lowell*
Leon McCaughan, *University of Wisconsin*
John P. Palmer, *California State Polytechnic University, Pomona*

Craig S. Petrie, *Brigham Young University*
Mohammad Sarmadi, *The Pennsylvania State University*
A.C. Soudack, *University of British Columbia*
Earl Swartzlander, *University of Texas, Austin*
Val Tereski, *North Dakota State University*
Kamal Yacoub, *University of Miami*

Se agradecen profundamente los comentarios y sugerencias de los doctores Jim Zheng, Reginald Perry, Rodney Roberts y Tom Harrison del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computación de la Universidad de Florida A&M y la Universidad Estatal de Florida, así como el increíble esfuerzo y entusiasmo de Bill Kennedy, de la Universidad de Canterbury, quién efectuó la lectura preliminar de cada capítulo y proporcionó muchas sugerencias útiles. Asimismo, se agradece en especial a Ken Smart y Dermot Sallis por haber proporcionado componentes para las fotografías, a Duncan Shaw-Brown y Kristi Durban por los servicios fotográficos, a Richard Blaikie por su apoyo con la Aplicación práctica sobre los parámetros-*h*, a Rick Millane por su ayuda en la Aplicación práctica sobre el procesamiento de imágenes, y a Wade Enright por proporcionar un sinnúmero de fotografías de transformadores (nadie tiene más fotografías de transformadores que él). Las compañías Cadence y The Mathworks proporcionaron su amable ayuda con el software de análisis asistido por computadora, lo cual se agradece profundamente. Phillipa Haigh y Emily Hewat proporcionaron la captura, fotocopiado y revisión en varias etapas del proyecto y, ciertamente, merecen nuestro agradecimiento por escrito por su valiosa ayuda. Asimismo, quisiera expresar mi agradecimiento a mi departamento por otorgarme mi estancia sabática para comenzar el proceso de revisión, lo que significa que mis colegas amablemente accedieron a llevar a cabo un gran número de mis labores cotidianas.

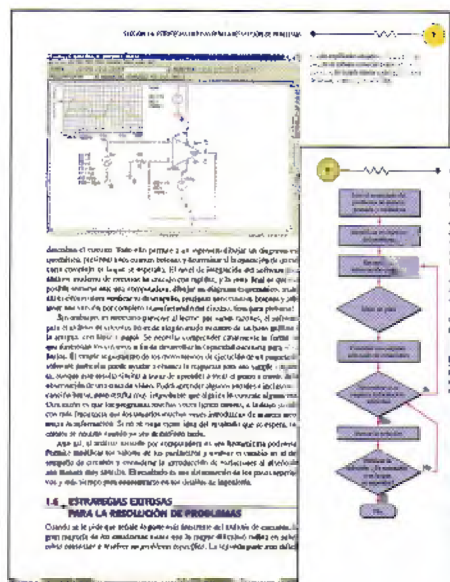
Muchas personas han influido en mi estilo de enseñanza a través de los años. Entre ellas se incluyen a los profesores Bill Hayt, David Meyer, Alan Weitsman y mi asesor de tesis, Jeffrey Gray, así como el primer ingeniero eléctrico que jamás haya conocido: mi padre, Jesse Durbin, un egresado del Instituto Tecnológico de Indiana. Asimismo, agradezco profundamente la ayuda y aliento a otros miembros de mi familia, lo cual incluye a mi madre, Roberta y a mis hermanos, Dave, John y James, así como a mis suegros Jack y Sandy. Por último y más importante: agradezco a mi esposa Kristi por su paciencia, comprensión, aliento y consejo y a nuestro hijo, Sean, por hacernos la vida muy divertida.

Steven M. Durbin
Christchurch, Nueva Zelanda

Agradecemos en especial la valiosa contribución de los siguientes asesores técnicos para la presente edición en español:

Francisco Reséndiz Rodríguez, *ITESM, campus Puebla*
Katia Romo, *ITESM, campus Ciudad de México*
Elise Juárez Pinto, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
Arturo Astorga Ramos, *Instituto Tecnológico de Mazatlán*
Alfredo Santana Díaz, *ITESM, campus Toluca*
Héctor Hernández Ramírez, *Universidad La Salle*
Germán García Benítez, *Universidad Autónoma del Estado de México, campus Toluca*
José Waldo Cervantes, *Universidad Iberoamericana*
Homero Núñez Ramírez, *ITESM, campus Monterrey*
Martha Salomé López, *ITESM, campus Monterrey*
Nicolás González, *Universidad Autónoma de Nuevo León*

VISITA GUIADA

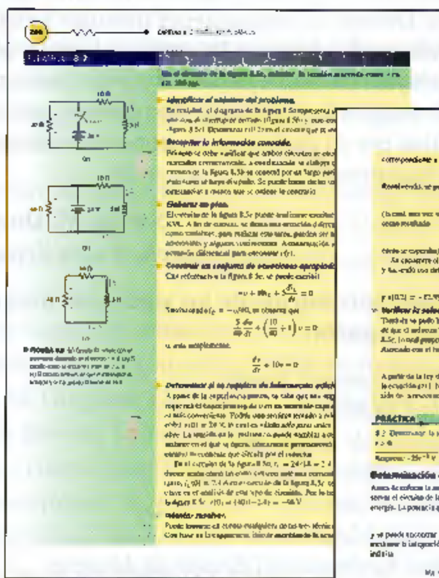


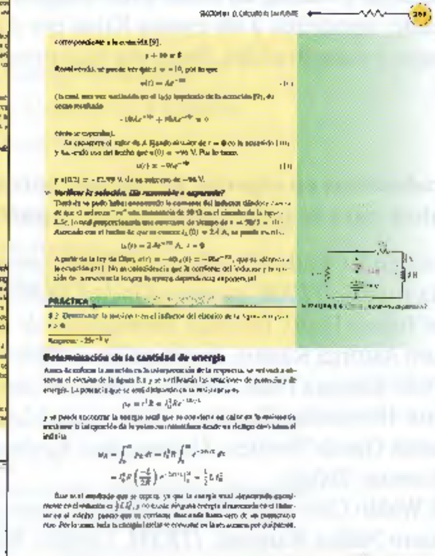


Enfoque en la resolución de problemas

El capítulo 1 muestra información detallada acerca de la forma más eficiente de atacar un problema de análisis de circuitos en ingeniería y establece los pasos que se deben tomar para llegar a la solución correcta.

Un ejemplo cuidadosamente seleccionado en cada capítulo subsecuente se identifica con estos pasos para reforzar de manera continua las capacidades para la resolución de problemas.



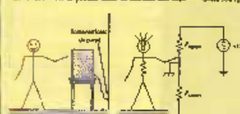


Énfasis en el diseño

El concepto de diseño se presenta en el capítulo 1; a través del texto, los aspectos relacionados con el diseño se encuentran mezclados con un estudio de los procedimientos de análisis.

Los problemas especiales de diseño se encuentran marcados con un icono "D".


APLICACIÓN PRÁCTICA

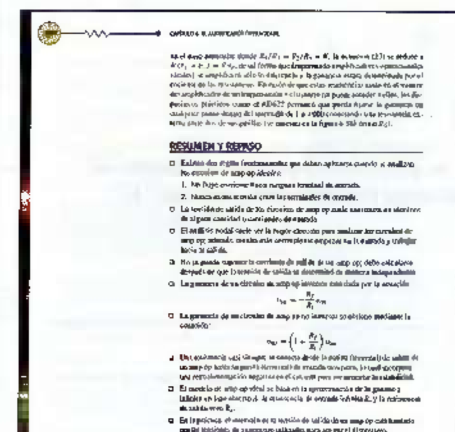


Relación con la vida real

Las secciones de Aplicación Práctica muestran de qué manera se relaciona el material bajo estudio con situaciones del mundo real.

Gran número de notas al margen e iconos

Las notas al margen proporcionan consejos, ideas e información adicional acerca de aspectos clave del análisis. El icono de "Tome nota" hace hincapié en los puntos específicos que vale la pena resaltar, mientras que el icono de "Precaución" identifica a los estudiantes las probables causas de error.


RESUMEN Y REPASO

LECTURAS ADICIONALES

Secciones de "lectura adicional"

Al final de cada capítulo, una lista de lecturas adicionales acerca de los temas clave que se trataron en él proporciona una guía para los estudiantes interesados en clarificar y profundizar su conocimiento de los conceptos importantes acerca de circuitos.

Resumen y repaso

Al final de cada capítulo se presenta un panorama que ofrece a los estudiantes una oportunidad para verificar su retención de las ideas principales que se explicaron, que es además de mucha utilidad como una referencia para el repaso y la preparación de exámenes.

Problemas para computadora

Se presentan ejemplos de PSpice y MATLAB en lugares convenientes en muchos capítulos. La ingeniería asistida por computadora se utiliza como apoyo, no como una sustituta del desarrollo de capacidades para resolver problemas. Asimismo, el análisis asistido por computadora se presenta en problemas de tarea seleccionados para motivar a los estudiantes a que comparen los cálculos realizados por escrito con los resultados que se generen en la simulación.

Compromiso con la precisión

Se incluye una declaración de precisión que describe el proceso que el editor y el autor han instituido con el fin de asegurar la precisión en los cálculos.

CONTENIDO BREVE

CONTENIDO

CAPÍTULO

1

Introducción

CONCEPTOS CLAVE

Aspectos del análisis de circuitos: análisis en cd, análisis transitorio, análisis en ca y análisis en frecuencia.

Análisis y diseño.

Análisis asistido por computadora.

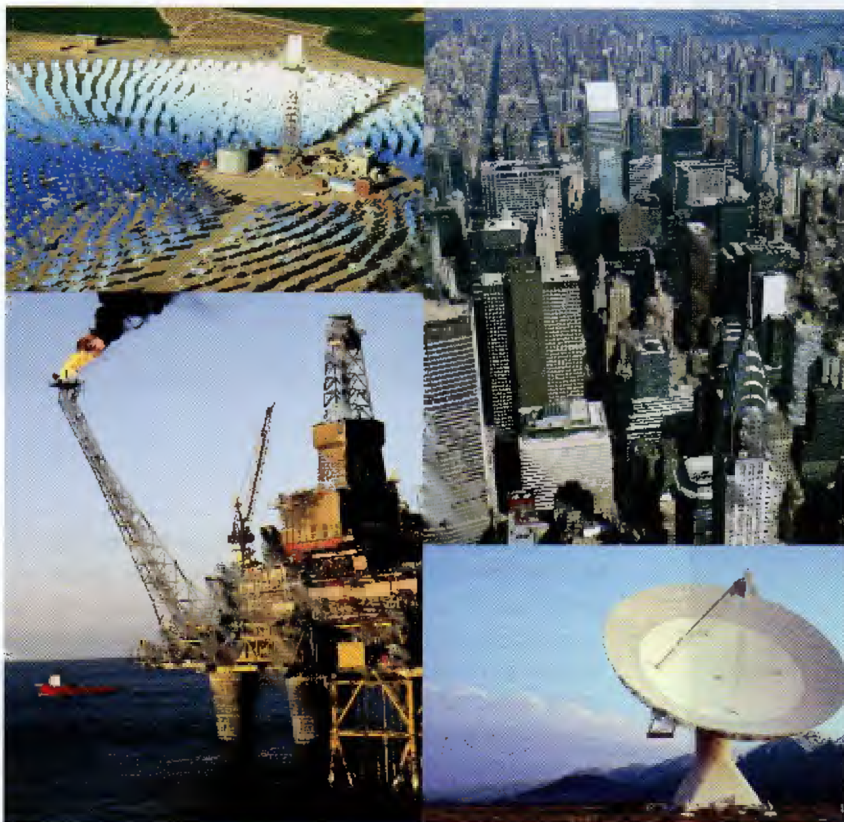
Técnicas para la resolución de problemas.

1.1 PREÁMBULO

A los estudiantes que actualmente se gradúan en ingeniería ya no se les contrata sólo para trabajar en aspectos de diseño técnico en los problemas de la ingeniería. Ahora sus esfuerzos van más allá de la creación de mejores computadoras y sistemas de comunicación, e incluso se involucran en vigorosos esfuerzos para resolver problemas socioeconómicos como la contaminación del aire y el agua, la planeación urbana, la transportación masiva, el descubrimiento de nuevas fuentes de energía y la conservación de los recursos naturales, en particular el petróleo y el gas natural.

Para contribuir a solucionar tales problemas ingenieriles, un ingeniero debe adquirir muchas capacidades, una de las cuales es el conocimiento del análisis de los circuitos eléctricos. Si ya se ha cursado un programa de ingeniería eléctrica o se pretende entrar a uno, es posible que el análisis de circuitos sea el curso de introducción en el campo elegido. Si se vincula con alguna otra rama de la ingeniería, es factible que el análisis de circuitos represente una gran parte del estudio completo de ingeniería eléctrica, pues proporciona los fundamentos para trabajar en la instrumentación electrónica, en máquinas alimentadas por electricidad y sistemas de gran escala. Sin embargo, lo más importante es la posibilidad que brinda de ampliar la educación que se posee, para que los ingenieros puedan convertirse en miembros más informados de un equipo. Cada vez más, los equipos han incrementado su nivel multidisciplinario, y la comunicación eficaz dentro de ellos sólo puede lograrse si el lenguaje y las definiciones utilizadas resultan familiares para todos.

En este capítulo, antes de comenzar la agenda sobre discusiones técnicas, se esbozan los temas que se analizarán a lo largo del texto, pero se hará una breve pausa para considerar la relación entre el análisis y el diseño, así como el papel que juegan las herramientas de cómputo en el análisis moderno de circuitos.



No todos los ingenieros en electrónica utilizan el análisis de circuitos de manera rutinaria, pero a menudo ponen en práctica las habilidades analíticas y de resolución de problemas que aprendieron durante sus estudios de licenciatura. Un curso sobre análisis de circuitos es una de sus primeras exposiciones a dichos conceptos. (Espejos solares: © Corbis; Skyline: © Getty Images/Photolink; Oil Rig: © Getty Images; Dish: " Getty Images/J. Luke/Photolink.)

1.2 PANORAMA GENERAL DEL TEXTO

El tema fundamental de este libro es el ***análisis de circuitos lineales,*** el cual invita a algunos lectores a preguntar,

"¿Existe el análisis de circuitos *no-lineales*?"

¡Por supuesto! Se encuentran circuitos no-lineales todos los días: éstos capturan y decodifican señales para nuestras televisiones y radios, llevan a cabo millones de cálculos por segundo dentro de los microprocesadores, convierten la voz en señales eléctricas para su transmisión a través de líneas telefónicas y ejecutan muchas otras funciones que ni siquiera es posible imaginar. En el diseño, prueba e implementación de dichos circuitos no-lineales, no puede uno olvidarse del análisis a detalle.



Los aparatos de televisión incluyen muchos circuitos no lineales. Sin embargo, una gran cantidad de ellos pueden comprenderse y analizarse con la ayuda de modelos lineales. (© *Sony Electronics Inc.*)

"Entonces, ¿por qué estudiar el análisis de circuitos *lineales*?"

sería una pregunta válida. Muy buena pregunta. El simple hecho es que ningún sistema físico (entre ellos los circuitos eléctricos) es perfectamente lineal. Sin embargo, por fortuna, un gran número de sistemas se comportan razonablemente en forma lineal arriba de un rango limitado, pues permite modelarlos como sistemas lineales si se toman en cuenta las limitaciones en el rango.

Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = e^x$$

Una aproximación lineal a esta función es

$$f(x) \approx 1 + x$$

La comprobación se realiza de la siguiente manera. La tabla 1.1 muestra tanto el valor exacto como el aproximado de $f(x)$ en un rango de x. De manera sorprendente, la aproximación lineal es muy exacta hasta alrededor de $x = 0.1$ el valor, cuando el error relativo es todavía menor a 1%. Aunque muchos ingenieros son muy hábiles con una calculadora, es difícil discutir el hecho de que cualquier otro método sea más rápido que sólo agregando un 1.

TABLA 1.1 Comparación de un modelo lineal para e^x con el valor exacto

x	$f(x)$*	$1 + x$	Error relativo**
0.0001	1.0001	1.0001	0.0000005%
0.001	1.0010	1.001	0.00005%
0.01	1.0101	1.01	0.005%
0.1	1.1052	1.1	0.5%
1.0	2.7183	2.0	26%

*Especificado con cuatro cifras significativas.

**Error relativo $\triangleq \left| 100 \times \frac{e^x - (1+x)}{e^x} \right|$

Los problemas lineales son inherentemente más fáciles de resolver que los no-lineales. Por esta razón, a menudo se buscan aproximaciones lineales que sean muy similares (*modelos*) a las situaciones físicas. Además, los modelos lineales se manipulan y se comprenden de una manera más fácil logrando que el diseño se convierta en un proceso más sencillo.

Todos los circuitos que se presentarán en los capítulos subsecuentes representan aproximaciones lineales a los circuitos eléctricos físicos. Cuando sea apropiado, se proporcionarán explicaciones breves de inexactitudes potenciales o limitaciones de estos modelos, pero, en términos generales, se puede observar que tienen una exactitud adecuada para la mayor parte de las aplicaciones. Cuando en la práctica se requiera de una exactitud mayor, se emplearán modelos nolineales, a costa de un incremento considerable en la complejidad de la solución. En el capítulo 2 se puede encontrar un análisis más detallado de lo que constituye un *circuito eléctrico lineal.*

El análisis de circuitos lineales puede separarse en cuatro grandes categorías: ***análisis en cd, análisis transitorio, análisis en ca*** y ***análisis de la respuesta en frecuencia.*** El estudio comienza con el tema de los circuitos resistivos, que incluye ejemplos simples como el de un foco o un tostador. Ello nos brinda una oportunidad perfecta para aprender varias técnicas muy poderosas de análisis de circuitos de ingeniería, como el *análisis nodal,* el *análisis de malla,* la *superposición,* la *transformación de fuente,* el *teorema de Thévenin* y el *teorema de Norton,* así como varios métodos para simplificar las redes de componentes conectados en serie o en paralelo. La única característica rescatable de los circuitos resistivos es que la dependencia del tiempo de cualquier cantidad de interés no afecta el proceso de análisis. En otras palabras, si se quiere determinar una cantidad



Los trenes modernos están impulsados por motores eléctricos. Sus sistemas eléctricos se analizan mejor a través del uso de técnicas de análisis fasorial o en ca. (© Corbis.)



Los circuitos que dependen de la frecuencia son parte medular de muchos aparatos electrónicos, y su diseño puede representar una tarea muy divertida. (*© 1994-2005 Hewlett-Packard Company.*)

eléctrica de un circuito resistivo en algunos instantes específicos en el tiempo, no será necesario que se analice el circuito más de una vez. Como resultado, se dedicarán los mayores esfuerzos a considerar sólo circuitos de cd, es decir, circuitos cuyos parámetros eléctricos no varían con el tiempo.

Aunque los circuitos de cd como un foco o el desempañador del vidrio trasero de un automóvil son, sin duda alguna, importantes en la vida diaria, las cosas se tornan mucho más interesantes cuando algo sucede de repente (¡imagine un cohete que le tome 100 años para ir de un ruido suave a una explosión!). En el argot del análisis de circuitos, el *análisis de transitorios* es el conjunto de técnicas utilizadas en el estudio de circuitos que se energizan o desenergizan de manera repentina. Para hacer esos circuitos más interesantes, es necesario agregarles elementos que respondan a la velocidad de cambio de las cantidades eléctricas, lo cual conduce a ecuaciones de circuitos que incluyen derivadas e integrales. Por fortuna, se pueden obtener dichas ecuaciones utilizando las técnicas que se expusieron en la primera parte de este estudio.

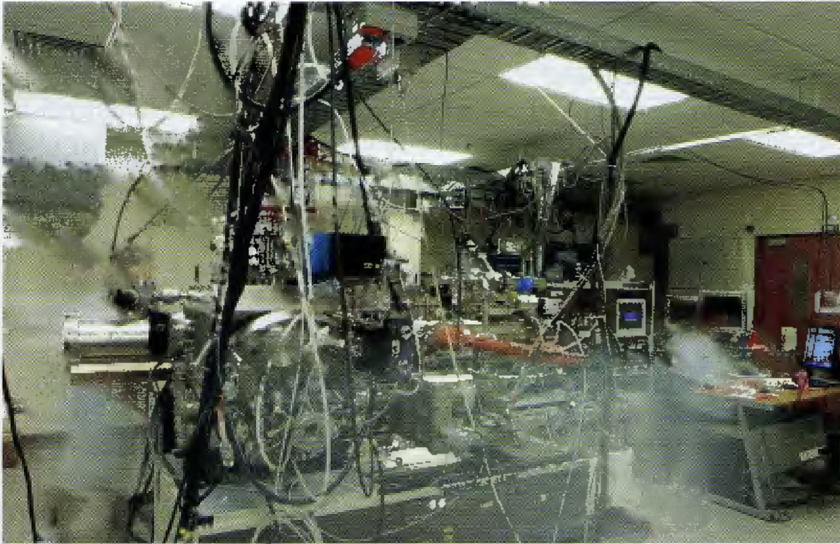
Sin embargo, no todos los circuitos que varían con el tiempo se encienden y se apagan de manera repentina. Los equipos de aire acondicionado, ventiladores y lámparas fluorescentes son sólo algunos de los múltiples ejemplos que se encuentran en la vida diaria. En tales situaciones, el método basado en el cálculo para todos los análisis puede convertirse en una tarea tediosa y consumir mucho tiempo. Por fortuna, existe una mejor alternativa en situaciones donde al equipo se le permite operar un tiempo lo suficientemente largo para que los efectos transitorios desaparezcan, a lo cual se le conoce comúnmente como análisis en ca, o, a menudo, *análisis fasorial.*

La última parte del recorrido está relacionado con el tema conocido como la *respuesta en frecuencia.* Trabajar de manera directa con las ecuaciones diferenciales que se obtienen en el análisis en el dominio del tiempo permite desarrollar una comprensión intuitiva de la operación de circuitos que contengan elementos de almacenamiento de energía (por ejemplo, capacitores y bobinas). Sin embargo, como se verá más adelante, aun los circuitos con un número relativamente pequeño de componentes pueden ser de alguna forma difíciles de analizar, por lo que se han desarrollado métodos más directos. Estos métodos, entre ellos el análisis de Laplace y de Fourier, permiten transformar las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas así como diseñar circuitos que respondan de manera específica a frecuencias particulares. Cotidianamente se utilizan circuitos que varían con la frecuencia cuando se marca un número telefónico, se selecciona la estación de radio favorita o se conecta a internet.

1.3 RELACIÓN DEL ANÁLISIS DE CIRCUITOS CON LA INGENIERÍA

Ya sea que se desee llevar a cabo más análisis de circuitos cuando termine este curso o no, vale la pena mencionar que existen varios niveles de los conceptos bajo estudio. Más allá de los detalles de las técnicas de análisis de circuitos se encuentra la oportunidad de desarrollar una técnica metodológica para resolver problemas, la capacidad para determinar el objetivo u objetivos de un problema en particular, la habilidad para recabar la información necesaria para llegar a una solución y, quizás igualmente importante, las oportunidades para obtener experiencia práctica en la verificación de la exactitud de la solución.

Los estudiantes familiarizados con el estudio de otros temas de ingeniería como el flujo de fluidos, los sistemas de suspensión de automóviles, el diseño de puentes, la administración de la cadena de suministros y el control de procesos,



Facilidad de crecimiento epitaxial de cristales por medio de un haz molecular. Las ecuaciones que rigen su operación son muy parecidas a las que se utilizan para describir circuitos lineales simples.

reconocerán la forma general de muchas de las ecuaciones que se presentarán para describir el comportamiento de varios circuitos. Sólo es necesario aprender la forma de "traducir" las variables relevantes (por ejemplo, sustituir *tensión por fuerza, carga* por *distancia, resistencia* por *coeficiente de fricción,* etcétera) a fin de determinar lo que ya se sabe para resolver un nuevo tipo de problema. Con mucha frecuencia, si se tiene mucha experiencia en la resolución de problemas similares o relacionados, la intuición puede ser una guía a través de la solución de un problema totalmente nuevo.

Lo que se verá a continuación con respecto al análisis de circuitos forma la base de muchos cursos subsecuentes sobre ingeniería eléctrica. El estudio de la electrónica se fundamenta en el análisis de circuitos con dispositivos conocidos como diodos y transistores, que se emplean para diseñar fuentes de alimentación, amplificadores y circuitos digitales. Por lo general, las capacidades que se deben desarrollar las aplican de manera metódica y rápida los ingenieros en electrónica ¡los cuales, algunas veces, son capaces de analizar un circuito complicado sin valerse incluso de un lápiz! Los capítulos referentes al dominio del tiempo y al dominio de la frecuencia en este texto conducen directamente al examen del procesamiento de señales, de la transmisión de potencia, de la teoría de control y de las comunicaciones. Se demostrará que el análisis en el dominio de la frecuencia resulta, en particular, una técnica muy poderosa, que se aplica con facilidad a cualquier sistema físico sujeto a una excitación variable en el tiempo.



Ejemplo de un manipulador robotizado. El sistema de control de retroalimentación puede modelarse utilizando elementos de circuitos lineales con el fin de determinar las situaciones en las que la operación puede adquirir inestabilidad. (*NASA Marshall Space Fligth Center.*)

1.4 ANÁLISIS Y DISEÑO

Los ingenieros adquieren una comprensión básica de los principios científicos, los combinan con el conocimiento empírico a menudo expresado en términos matemáticos y (con frecuencia con una gran creatividad) llegan a la solución de un problema determinado. El ***análisis*** es el proceso a través del cual se determina el alcance de un problema, se obtiene la información que se requiere para comprenderlo y se calculan los parámetros de interés. El ***diseño*** es el proceso por medio del cual se sintetiza algo nuevo como parte de la solución de un problema. En general, se espera que un problema que requiera de diseño no tenga una solución única, mientras que la fase de análisis típicamente la tendrá. Por lo tanto, el último paso en el diseño es siempre el análisis del resultado para ver si cumple con las especificaciones.





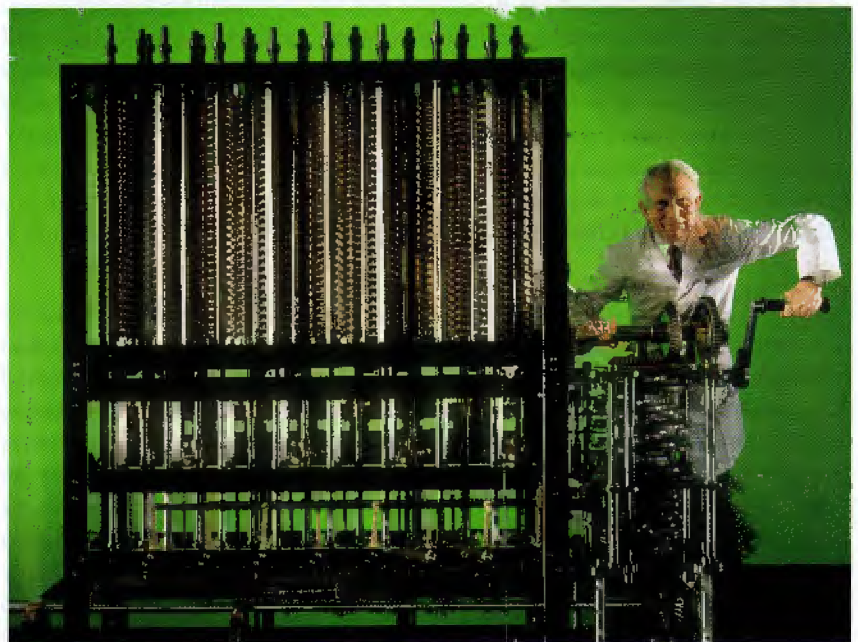
Dos diseños propuestos para el transbordador espacial de nueva generación. Aunque ambos contienen elementos similares, cada uno es único. (*NASA Dryden Flight Research Center.*)

Este texto se enfoca en el desarrollo de la habilidad para analizar y resolver problemas, debido a que constituye el punto de partida en cada situación de ingeniería. La filosofía de este libro es que se necesita aclarar explicaciones, presentar ejemplos pertinentes y llevar a cabo mucha práctica para desarrollar dicha capacidad. Por lo tanto, los elementos de diseño están integrados en los problemas al final del capítulo y en capítulos posteriores de tal forma que se puedan disfrutar en lugar de distraer.

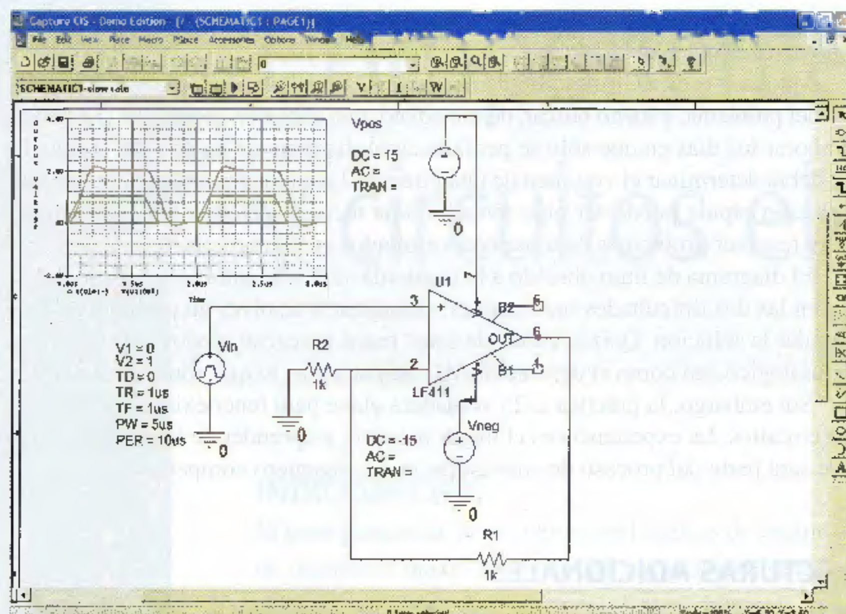
1.5 ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

A menudo, la resolución de los tipos de ecuaciones que resultan del análisis de circuitos puede convertirse en una tarea muy tediosa, aun en el caso de circuitos con un moderado grado de complejidad. Lo anterior, por supuesto, implica una alta probabilidad de que se cometan errores, además del considerable consumo de tiempo para llevar a cabo los cálculos. En realidad, el deseo de encontrar una herramienta que facilite este proceso es anterior a las computadoras electrónicas, con computadoras puramente mecánicas, como la "máquina analítica" diseñada por Charles Babbage alrededor de 1880 y propuesta como una solución. Quizás la primera computadora electrónica que tuvo éxito diseñada para resolver ecuaciones diferenciales fue la ENIAC, inventada en la década de 1940, cuyas válvulas al vacío llenaban un cuarto completo. Sin embargo, con el advenimiento de las computadoras de escritorio de bajo costo, el análisis de circuitos asistido por computadora se ha convertido en una invaluable herramienta cotidiana que forma parte integral no sólo del análisis sino también del diseño.

Uno de los aspectos más poderosos del diseño asistido por computadora es la relativamente reciente integración de programas múltiples de una forma transparente para el usuario, lo cual posibilita que el circuito se dibuje rápidamente de modo esquemático sobre la pantalla, se reduzca de manera automática al formato requerido por un programa de análisis (como el SPICE, que se presenta en el capítulo 4) y que la salida resultante se transfiera de modo automático incluso a un tercer programa capaz de graficar diversas cantidades eléctricas de interés que



"Máquina diferencial número 2", de Charles Babbage, según la completó el Science Museum (Londres) en 1991. (© *Science Museum/Science & Society Picture Library.*)



Circuito amplificador dibujado con la ayuda de un paquete de software comercial para la captura de esquemas. En la parte interior de la figura: tiempo de simulación en función de la salida.

describan el circuito. Todo ello permite a un ingeniero dibujar un diagrama esquemático, presionar unos cuantos botones y determinar si la operación de un circuito complejo es la que se esperaba. El nivel de integración del software para análisis moderno de circuitos ha crecido con rapidez, y la meta final es que sea posible sentarse ante una computadora, dibujar un diagrama esquemático, analizar el circuito para verificar su desempeño, presionar unos cuantos botones y ¡obtener una versión por completo manufacturada del circuito, lista para probarse!

Sin embargo, es necesario prevenir al lector: por varias razones, el software para el análisis de circuitos no es de ningún modo sustituto de un buen análisis a la antigua, con lápiz y papel. Se necesita comprender cabalmente la forma en que funcionan los circuitos a fin de desarrollar la capacidad necesaria para diseñarlos. El simple seguimiento de los movimientos de ejecución de un paquete de software particular puede ayudar a obtener la respuesta para una simple pregunta, aunque esto resulta similar a tratar de aprender a tocar el piano a través de la observación de una cinta de video. Podrá aprender algunos acordes e incluso una canción breve, pero resulta muy improbable que alguien lo contrate alguna vez. Otra razón es que los programas muchas veces tienen errores, e incluso sucede con más frecuencia que los usuarios muchas veces introduzcan de manera incorrecta la información. Si no se tiene cierta idea del resultado que se espera, los errores se notarán cuando ya sea demasiado tarde.

Aun así, el análisis asistido por computadora es una herramienta poderosa. Permite modificar los valores de los parámetros y evaluar el cambio en el desempeño de circuitos y considerar la introducción de variaciones al diseño de una manera muy sencilla. El resultado es una disminución de los pasos repetitivos y más tiempo para concentrarse en los detalles de ingeniería.

1.6 ESTRATEGIAS EXITOSAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cuando se le pide que señale la parte más frustrante del análisis de circuitos, la gran mayoría de los estudiantes siente que la mayor dificultad radica en *saber cómo comenzar a resolver un problema específico*. La segunda parte más difícil



parece ser obtener un conjunto completo de ecuaciones y organizarlo de modo que parezca manejable.

Muchas veces, el instinto fundamental se basa en leer con rapidez el enunciado del problema, y luego buscar, de inmediato, una ecuación apropiada. ¡Se tiende a añorar los días en que sólo se pedía la circunferencia de un círculo, o cuando se debía determinar el volumen de una pirámide! Aunque tratar de encontrar una solución rápida puede ser algo tentador, una técnica metodológica congruente para resolver problemas dará mejores resultados en el largo plazo.

El diagrama de flujo ubicado a la izquierda se diseñó para proporcionar ayuda en las dos dificultades más usuales: comenzar a resolver un problema y manipular la solución. Quizás varios de estos pasos parezcan obvios, pero el orden cronológico, así como el desempeño de cada tarea, es lo que conduce al éxito.

Sin embargo, la práctica es la verdadera clave para tener éxito en el análisis de circuitos. La experiencia es el mejor maestro, y aprender de los errores siempre será parte del proceso de convertirse en un ingeniero competente.

LECTURAS ADICIONALES

Relativamente económico, este famoso éxito editorial a escala mundial enseña al lector la manera de generar estrategias ganadoras al encarar problemas aparentemente imposibles.

G. Polya, *How to Solve It,* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1971.

CAPÍTULO 2

Componentes básicos y circuitos eléctricos

CONCEPTOS CLAVE

- Cantidades eléctricas básicas y unidades asociadas: carga, corriente, tensión y potencia.
- Dirección de la corriente y polaridad de la tensión (voltaje).
- Convención de signos pasiva para calcular la potencia.
- Fuentes ideales de tensión y de corriente.
- Fuentes dependientes.
- Resistencia y ley de Ohm.

INTRODUCCIÓN

El tema primordial de este libro es el análisis de circuitos eléctricos y de sistemas. Cuando se lleva a cabo un análisis en particular, a menudo se trata de determinar *corrientes*, *voltajes* o *potencias* específicos, por lo que el capítulo comenzará con una breve descripción de dichas cantidades. En términos de los componentes que pueden utilizarse para construir circuitos eléctricos, se cuenta con mucho de donde escoger. Con la intención de no saturar con ellos, primero se estudiará la *resistencia*, un componente pasivo simple y luego una variedad de fuentes activas ideales de voltaje y de corriente. A medida que se avance, se agregarán nuevos componentes al inventario a fin de poder considerar circuitos más complejos (y útiles).

Un rápido consejo antes de comenzar: es necesario poner mucha atención en el papel de los signos "+" y "−" cuando indiquen las tensiones, así como en la importancia de la flecha que define la corriente; muchas veces estos elementos establecen la diferencia entre las respuestas equivocadas y las correctas.

2.1 UNIDADES Y ESCALAS

Para establecer los valores de alguna cantidad medible, es necesario dar un *número* y una *unidad*, como "3 pulgadas". Por fortuna, todos utilizan el mismo sistema numérico, aunque no las mismas unidades, por lo que debe dedicarse cierto tiempo para familiarizarse con un sistema adecuado. Es imprescindible acordar una unidad patrón y asegurar su permanencia y su aceptación general. La unidad patrón de longitud, por ejemplo, no debe definirse en términos de distancia entre dos marcas sobre cierta banda de plástico, pues no es permanente y además cualquier otra persona podría estar utilizando otro patrón.

No existen muchas opciones en lo que respecta a un sistema de unidades. El que se utilizará en este texto fue adoptado por el National Bureau of Standards en 1964, que es el que emplean todas las principales sociedades de ingenieros profesionales y es el lenguaje con el cual se

escriben los libros de texto actuales: el Sistema Internacional de Unidades (*SI* en todos los lenguajes), adoptado por la Conferencia General de Pesos y Medidas en 1960. Modificado varias veces desde entonces, el SI se construye a partir de siete unidades básicas: *metro, kilogramo, segundo, ampere, kelvin, mol* y *candela* (vea la tabla 2.1). Es un "sistema métrico", y en cierta forma se utiliza en la mayor parte de los países tecnológicamente avanzados, aunque no en forma amplia en Estados Unidos. Las unidades para medir otras magnitudes como el volumen, fuerza, energía, etc., se derivan de las siete unidades fundamentales.

TABLA 2.1 Unidades básicas del SI

Cantidad básica	Nombre	Símbolo
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
corriente eléctrica	amperio	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

Las unidades nombradas en honor a una persona (por ejemplo, el kelvin, en honor a Lord Kelvin, profesor de la Universidad de Glasgow) se escriben con minúsculas, aunque se abrevian mediante el empleo de una letra mayúscula.

La unidad fundamental de trabajo o energía es el ***joule*** (J). Un joule (un kg m^2 s^{-2} en las unidades fundamentales del SI) equivale a 0.7376 pie libra-fuerza (pie-lbf). Otras unidades de energía incluyen la caloría (cal), igual a 4.187 J; la unidad térmica británica (Btu), que corresponde a 1 055 J; y el kilowatthora (kWh), igual a 3.6×10^6 J. La potencia se define como la *tasa* del trabajo que se hace o de la energía gastada. La unidad fundamental de la potencia es el ***watt*** (W), definida como 1 J/s. Un watt equivale a 0.7376 pie-lbf/s, o 1/745.7 caballos de fuerza (hp).

En realidad, la "caloría" utilizada en los alimentos, las bebidas y el ejercicio corresponde a una kilocaloría, 4.187 J.

El SI utiliza el sistema decimal para relacionar unidades más grandes y más pequeñas con la unidad fundamental y emplea prefijos para indicar las diversas potencias de 10. En la tabla 2.2 se presenta una lista de los prefijos y sus símbolos; se subrayan los que se encuentran más comúnmente en ingeniería.

TABLA 2.2 Prefijos del SI

Factor	Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo
10^{-24}	octo	y	10^{24}	iota	Y
10^{-21}	zepto	z	10^{21}	zeta	Z
10^{-18}	atto	a	10^{18}	exa	E
10^{-15}	femto	f	10^{15}	peta	P
10^{-12}	pico	p	10^{12}	tera	T
10^{-9}	nano	n	10^{9}	giga	G
10^{-6}	micro	μ	10^{6}	mega	M
10^{-3}	mili	m	10^{3}	kilo	k
10^{-2}	centi	c	10^{2}	hecto	h
10^{-1}	deci	d	10^{1}	deca	da

Vale la pena memorizar estos prefijos, ya que aparecerán a menudo en este texto y en cualquier otro trabajo técnico. Las combinaciones de varios prefijos, como el milimicrosegundo, son inaceptables. Cabe mencionar que en términos de distancia, es mucho más común ver "micrón" (μm)" en vez de "micrómetro", y con frecuencia se utiliza el angstrom (Å) correspondiente a 10^{-10} metros. Además, en el análisis de circuitos y en la ingeniería en general, resulta bastante común observar números expresados en lo que con frecuencia se denomina "unidades de ingeniería". En la notación de ingeniería, una cantidad se representa mediante un número entre 1 y 999 y una unidad métrica apropiada utilizando una potencia divisible entre 3. De tal modo, por ejemplo, es preferible expresar la cantidad 0.048 W como 48 mW, en lugar de 4.8×10^{-2} W, o 48 000 μW.

PRÁCTICA

2.1 Un láser de fluoruro de kriptón emite luz con una longitud de onda de 248 nm, lo cual es lo mismo que: (*a*) 0.0248 mm; (*b*) 2.48 μm; (*c*) 0.248 μm; (*d*) 24 800 Å.

2.2 En cierto circuito integrado digital, una compuerta lógica conmuta del estado "activado" al "desactivado" en 1 ns, lo cual corresponde a: (*a*) 0.1 ps; (*b*) 10 ps; (*c*) 100 ps; (*d*) 1 000 ps.

2.1 Una típica lámpara incandescente opera a 60 W. Si se deja encendida permanentemente, ¿cuánta energía (J) se consume por día, y cuál es el costo semanal si la energía se cobra a una tarifa de 12.5 centavos por kilowatt hora?

Respuesta: 2.1 (*c*); 2.2 (*d*); 2.3 5.18 MJ, $1.26.

2.2 CARGA, CORRIENTE, TENSIÓN (VOLTAJE) Y POTENCIA

Carga

Uno de los conceptos más importantes en el análisis de circuitos eléctricos es el de la conservación de la carga. De la física básica se sabe que hay dos tipos de carga: positiva (correspondiente a un protón) y negativa (correspondiente a un electrón). En la mayor parte de los casos, este texto analiza circuitos en los que sólo resulta relevante el flujo de electrones. Existen muchos dispositivos (como baterías, diodos y transistores) en los que resulta determinante el movimiento de carga positiva para entender la operación interna, pero respecto a lo externo del dispositivo es mejor concentrarse en los electrones que fluyen por los alambres de conexión. Si bien de manera continua se transfieren cargas entre las diferentes partes de un circuito, no se hace nada para cambiar la cantidad total de carga. En otras palabras, ni se crean ni se destruyen electrones (o protones) cuando se operan circuitos eléctricos.[1] La carga en movimiento representa una *corriente*.

En el sistema SI, la unidad fundamental de carga es el ***coulomb*** (C), que se define en términos del ***ampere*** al contar la carga total que pasa por una sección transversal arbitraria de un alambre durante un segundo; un coulomb se mide cada segundo en un alambre que conduce una corriente de 1 ampere (fig. 2.1). En este sistema de unidades, un solo electrón tiene una carga de -1.602×10^{-19} C y un protón individual tiene una carga de $+1.602 \times 10^{-19}$ C.

(1) Aunque la aparición ocasional de humo parezca sugerir otra cosa. . .

Como se observa en la tabla 2.1, las unidades básicas del SI no se derivan de cantidades físicas fundamentales. En vez de eso, históricamente representan acuerdos sobre las mediciones, lo que lleva a definiciones que en algunos casos parecen un retroceso. Por ejemplo, tendría más sentido desde la perspectiva física definir el ampere con base en la carga electrónica.

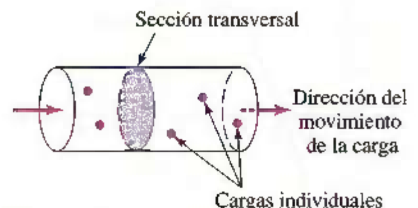


FIGURA 2.1 Definición de corriente ilustrada a través del uso de una corriente que fluye a través de un alambre; 1 ampere corresponde a 1 coulomb de carga que pasa en 1 segundo a través de una sección transversal seleccionada de manera arbitraria.

Una cantidad de carga que no cambia con el tiempo suele representarse por medio de Q. La cantidad instantánea de carga (que puede ser o no invariante en el tiempo) a menudo se representa por medio de $q(t)$, o simplemente q. Esta convención se utilizará en lo que resta del texto: las letras mayúsculas se reservan para las cantidades constantes (invariantes en el tiempo), en tanto que las minúsculas representan el caso más general. Según este punto de vista, es posible representar una carga constante por medio de Q o q, aunque una cantidad de carga que cambia con el tiempo debe representarse con la letra minúscula q.

Corriente

La idea de "transferencia de carga" o "carga en movimiento" es de vital importancia cuando se estudian los circuitos eléctricos, debido a que al mover una carga de un lugar a otro, también se necesita transferir energía de un punto a otro. La familiar línea de transmisión eléctrica que surca los campos es un ejemplo práctico de un dispositivo que transfiere energía. Igual importancia tiene la posibilidad de variar la tasa a la cual se transfiere la carga para comunicar o transferir información. Tal proceso constituye la base de sistemas de comunicación como la radio, la televisión y la telemetría.

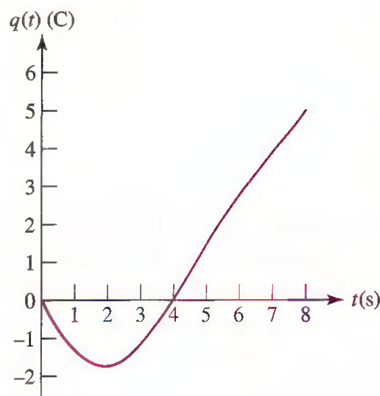


FIGURA 2.2 Gráfica del valor instantáneo de la carga total $q(t)$ que pasó por un punto de referencia determinado desde $t = 0$.

La corriente presente en una trayectoria discreta, como un alambre metálico, tiene un *valor numérico* y una *dirección* asociada a ella; es una medida de la velocidad a la cual la carga pasa por un punto de referencia determinado en una dirección especificada.

Luego de determinar una dirección de referencia, se puede establecer en ese caso que $q(t)$ sea la carga total que ha pasado por el punto de referencia desde un tiempo arbitrario $t = 0$, moviéndose en la dirección definida. Una contribución a esta carga total será negativa si la carga negativa se mueve en la dirección de referencia, o si la carga positiva se mueve en la dirección opuesta. Como un ejemplo, la figura 2.2 ilustra una historia de la carga total $q(t)$ que ha pasado por un punto de referencia dado en un alambre (como el de la fig. 2.1).

Se define la corriente en un punto específico, que fluye en una dirección especificada, como la velocidad instantánea a la cual la carga positiva pasa por ese punto en la dirección especificada. Desafortunadamente, ésta es la definición histórica, cuyo uso se popularizó antes de que se apreciara que la corriente en los alambres se debe en realidad al movimiento de carga negativa, y no a la positiva. La corriente se simboliza mediante I o i, por lo que

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad [1]$$

La unidad de corriente es el ampere (A), cuyo nombre es en honor a A. M. Ampère, un físico francés. Se suele abreviar como "amp", aunque no es oficial y resulta algo informal. Un ampere es igual a 1 coulomb por segundo.

Mediante la ecuación [1] se calcula la corriente instantánea y se obtiene la figura 2.3. El empleo de la letra minúscula i se asocia de nuevo con un valor instantáneo; una I mayúscula denotaría una cantidad constante (es decir, invariante en el tiempo).

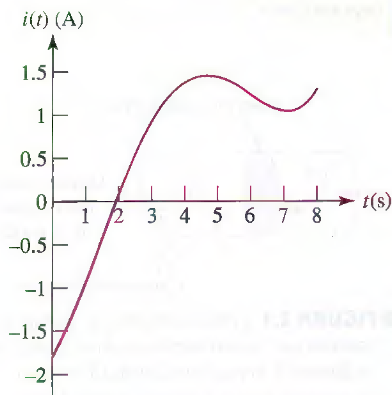


FIGURA 2.3 Corriente instantánea $i = dq/dt$, donde q está dada en la figura 2.2.

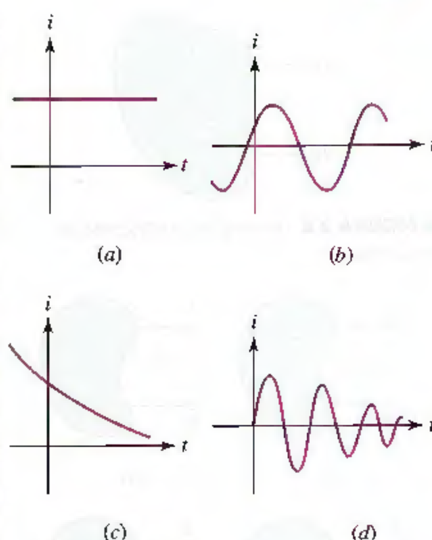
La carga transferida entre el tiempo t_0 y t se expresa como una integral definida:

$$\int_{q(t_0)}^{q(t)} dq = \int_{t_0}^{t} i\, dt'$$

Por lo tanto, la carga total transferida durante todo el tiempo está dada por:

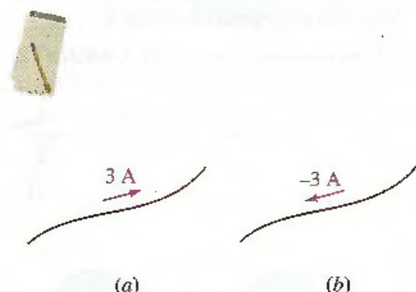
$$q(t) = \int_{t_0}^{t} i\, dt' + q(t_0) \qquad [2]$$

En la figura 2.4 se ilustran diferentes tipos de corriente. Una corriente que es constante en el tiempo se denomina corriente directa, o simplemente cd, la cual se presenta en la figura 2.4*a*. Se encontrarán muchos ejemplos prácticos de corrientes que varían senoidalmente con el tiempo (fig. 2.4*b*); las corrientes de esta forma se manifiestan en los circuitos domésticos normales. Además, la corriente de este tipo a menudo se conoce como corriente alterna, o ca. Después se verán también corrientes exponenciales y corrientes senoidales amortiguadas (fig. 2.4*c* y *d*).



■ **FIGURA 2.4** Varios tipos de corriente: (*a*) Corriente directa (dc). (*b*) Corriente senoidal (ac). (*c*) Corriente exponencial. (*d*) Corriente senoidal amortiguada.

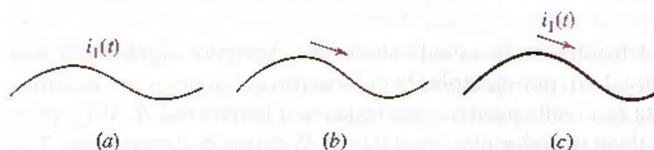
Se establece un símbolo gráfico para la corriente mediante una flecha puesta al lado del conductor. Así, en la figura 2.5*a*, la dirección de la flecha y el valor 3 A indican que una carga positiva neta de 3 C/s se está moviendo hacia la derecha, o que una carga negativa de −3 C/s se mueve hacia la izquierda cada segundo. En la figura 2.5b se presentan otra vez dos posibilidades: que −3 A fluya hacia la izquierda o que +3 A fluya hacia la derecha. Los cuatro enunciados y ambas figuras representan corrientes equivalentes en sus efectos eléctricos, por lo que se dice que son iguales. Una analogía no eléctrica que tal vez sea más fácil de visualizar consiste en pensar en términos de una cuenta de ahorro personal: por ejemplo, se puede considerar un depósito como un flujo de efectivo *negativo* hacia afuera de su cuenta, o como un flujo *positivo* hacia adentro de su cuenta.



■ **FIGURA 2.5** Dos métodos de representación de la misma corriente.

Es conveniente visualizar la corriente como el movimiento de carga positiva, aun cuando se sabe que el flujo de corriente en los conductores metálicos se produce a partir del movimiento de electrones. En gases ionizados, en soluciones electrolíticas y en algunos materiales semiconductores, los elementos en movimiento cargados positivamente constituyen una parte o la totalidad de la corriente. Por lo tanto, cualquier definición de corriente concuerda con la naturaleza física de la conducción sólo una parte del tiempo. La definición y la simbología que hemos adoptado son estándares.

Resulta esencial reconocer que la flecha de la corriente no indica la dirección "real" del flujo de ella, sino que sólo forma parte de una convención que permite hablar de "la corriente en el alambre" de una manera precisa. ¡La flecha es una parte fundamental de la definición de una corriente! En consecuencia, hablar sobre el valor de una corriente $i_1(t)$ sin especificar la flecha equivale a analizar una entidad indefinida. Por ejemplo, la figura 2.6*a* y *b* son representaciones sin sentido de $i_1(t)$, mientras que la figura. 2.6*c* utiliza la simbología definitiva apropiada.



■ **FIGURA 2.6** (*a, b*) Definiciones incompletas, impropias e incorrectas de una corriente. (*c*) Definición correcta de $i_1(t)$.

PRÁCTICA

2.4 En el alambre de la figura 2.7, los electrones se mueven de *izquierda* a *derecha* para crear una corriente de 1 mA. Determinar I_1 e I_2.



■ **FIGURA 2.7**

Respuesta: $I_1 = -1$ mA; $I_2 = +1$ mA.

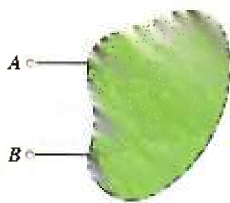


FIGURA 2.8 Elemento de circuito general de dos terminales.

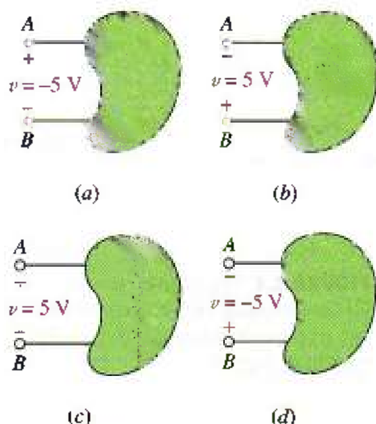


FIGURA 2.9 (*a*, *b*) La terminal *B* es 5 V positiva con respecto a la terminal *A*; (*c*, *d*)) la terminal *A* es 5 V positiva con respecto a la terminal *B*.

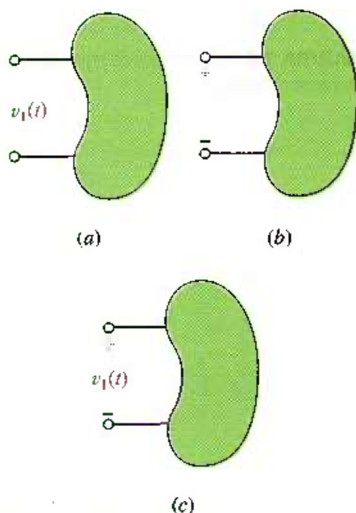


FIGURA 2.10 (*a*, *b*) Definiciones inadecuadas de una tensión. (*c*) Definición correcta que incluye un símbolo para la variable y un par de símbolos más-menos.

Tensión

A continuación se explicará un elemento de circuito que está mejor definido en términos generales. Los dispositivos eléctricos como fusibles, bombillas eléctricas, resistores, baterías, capacitores, generadores y bobinas de chispa se representan mediante combinaciones de elementos de circuito simples. Se comenzará con un elemento de circuito muy general, como un objeto sin forma que posee dos terminales en las que es posible hacer conexiones con otros elementos (fig. 2.8).

Hay dos trayectorias por medio de las cuales la corriente entra o sale del elemento. En análisis subsecuentes se definirán elementos de circuito particulares mediante la descripción de las características eléctricas que se observan en sus terminales.

En la figura 2.8, suponga que una corriente cd se envía hacia la terminal *A*, a través del elemento general, y sale de regreso por la terminal *B*. Considere también que empujar la carga a través del elemento requiere un gasto de energía. En este caso, se dice que existe una tensión eléctrica (o una *diferencia de potencial*) entre las dos terminales, o que hay una tensión "en los extremos" del elemento. De tal modo, la tensión entre un par de terminales significa una medida del trabajo que se requiere para mover la carga a través del elemento. La unidad de tensión (voltaje) es el volt,[2] y 1 volt es lo mismo que 1 J/C. La tensión se representa por medio de V o v.

Puede existir una tensión entre un par de terminales eléctricas sin importar si fluye o no una corriente. Por ejemplo, una batería de automóvil tiene una tensión de 12 V entre sus terminales incluso si no se conecta nada a ellas.

De acuerdo con el principio de conservación de energía, la energía que se gasta al forzar a la carga desplazarse a través del elemento debe aparecer en algún otro lado. Cuando más adelante se analicen los elementos de circuito específicos, se notará si esa energía se almacena en alguna forma de tal modo que esté disponible con facilidad como energía eléctrica, o si se transforma de modo irreversible en calor, energía acústica o alguna otra forma no eléctrica.

Ahora es necesario establecer una convención mediante la cual sea posible distinguir entre la energía suministrada *a* un elemento y la energía que suministra *el* propio elemento. Ello se realiza mediante la elección de signo para la tensión de la terminal *A* con respecto a la terminal *B*. Si una corriente positiva está entrando a la terminal *A* del elemento y una fuente externa debe gastar energía para establecer tal corriente, entonces la terminal *A* es positiva con respecto a la terminal *B*. De manera análoga, se dice que la terminal *B* es negativa con respecto a la terminal *A*.

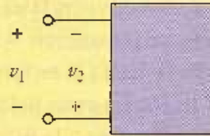
El sentido de la tensión se indica mediante un par de signos algebraicos más y menos. En la figura 2.9*a*, por ejemplo, la colocación del signo + en la terminal *A* indica que ésta es v volts positiva con respecto a la terminal *B*. Si después se determina que v tiene un valor numérico de -5 V, entonces expresa que *A* es -5 V positivo con respecto a *B* o que *B* es 5 V positivo con respecto a *A*. Otros casos se ilustran en la figura 2.9*b*, *c* y *d*.

Al igual que se advirtió en la definición de corriente, resulta esencial darse cuenta que el par más-menos de signos algebraicos no indica la polaridad "real" de la tensión, sino que simplemente forma parte de una convención que permite hablar de manera exacta sobre la "tensión entre el par de terminales". Nota: *¡la definición de toda tensión debe incluir un par de signos más-menos!* Si se utiliza una cantidad $v_1(t)$ sin especificar la ubicación del par de signos más-menos, se está empleando un término indefinido. La figura 2.10*a* y *b no* sirve como definición de $v_1(t)$; la figura 2.10*c* sí.

(2) ¡Tal vez seamos afortunados de que el nombre completo del físico italiano del siglo XVIII, *Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta*, no se utilice para nuestra unidad de diferencia de potencial!

PRÁCTICA

2.5 Para el elemento en la figura 2.11, $v_1 = 17$ V. Determine v_2.



■ **FIGURA 2.11**

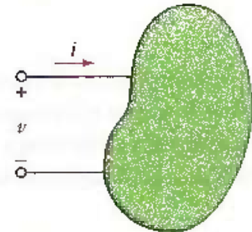
Respuesta: $v_2 = -17$ V.

Potencia

Ya se definió la potencia, a la cual se representará por medio de P o p. Si un joule de energía se gasta en transferir un coulomb de carga a través del dispositivo en un segundo, la tasa de transferencia de energía es un watt. La potencia absorbida debe ser proporcional al número de coulombs transferidos por segundo (corriente) y a la energía necesaria para transferir un coulomb a través del elemento (tensión). De tal modo, se tiene:

$$p = vi \qquad [3]$$

Dimensionalmente, el miembro derecho de esta ecuación se obtiene del producto de joules por coulomb y de los coulombs por segundo, lo cual produce la dimensión esperada de joules por segundo, o watts. Las convenciones para corriente, tensión y potencia se presentan en la figura 2.12.



■ **FIGURA 2.12** La potencia absorbida por el elemento se determina mediante el producto $p = vi$. De forma análoga, se dice que el elemento genera o suministra una potencia $-vi$.

Ahora se tiene la expresión para designar la potencia que es absorbida por un elemento de circuito en términos de un voltaje (tensión) y una corriente que pasa a través de él. El voltaje (tensión) se definió en términos de un consumo de energía y la potencia es la velocidad a la que ésta se consume. Sin embargo, por ejemplo, no se puede hacer ninguna afirmación respecto de la transferencia de energía en cualquiera de los cuatro casos que se muestran en la figura 2.9 hasta que se especifique la dirección de la corriente. Imagine que se coloca una flecha de corriente a lo largo de cada extremo superior, dirigida hacia la derecha y se identifica como "+2 A". En primer término, considere el caso que se muestra en la figura 2.9*c*. La terminal *A* es 5 V positivos con respecto a la terminal *B*, lo cual significa que se requiere de 5 J de energía para mover cada coulomb de carga positiva a la terminal *A*, a través del objeto y fuera de la terminal *B*. Puesto que se alimentan +2 A (una corriente de 2 coulombs de carga positiva por segundo) a la terminal *A*, se realiza un trabajo de $(5 \text{ J/C}) \times (2 \text{ C/s}) = 10$ J por segundo sobre el objeto. En otras palabras, el objeto absorbe 10 W de potencia desde cualquier elemento que esté inyectando la corriente.

Se sabe que, a partir de lo que se explicó con anterioridad, no existe ninguna diferencia entre la figura 2.9*c* y la figura 2.9*d*, por lo que se espera que el objeto que se muestra en esta última absorba 10 W. Se puede verificar este nivel de absorción de una manera muy sencilla: se inyectan +2 A a la terminal A del objeto, por lo que una corriente de +2 A fluye hacia afuera de la terminal *B*. Otra forma de decir esto es que se inyectan −2 A de corriente en la terminal *B*. Toma −5 J/C para mover una carga desde la terminal *B* hasta la *A*, por lo que el objeto absorbe $(-5 \text{ J/C}) \times (-2 \text{ C/s}) = +10$ Wcomo se esperaba. La única dificultad que se presenta para describir este caso particular es conservar el signo menos como está, pero con un poco de cuidado se puede observar que es posible obtener la respuesta correcta sin tomar en cuenta la elección respecto de la terminal de referencia positiva (terminal *A* en la figura 2.9*c*, y la terminal *B* en la figura 2.9*d*).

Ahora observe la situación que se muestra en la figura 2.9*a*, de nuevo con +2 A inyectados a la terminal *A*. Puesto que toma −5 J/C mover una carga desde la terminal *A* a la terminal *B*, el objeto absorbe (−5 J/C) × (2 C/s) = −10 W. ¿Qué significa esto? ¿Cómo puede algo absorber energía ***negativa***? Si se piensa esto en términos de transferencia de energía, se transfieren −10 J al objeto cada segundo a través de la corriente de 2 A que fluye hacia la terminal *A*. En realidad, el objeto pierde energía: a una velocidad de 10 J/s. En otras palabras, proporciona 10 J/s (es decir, 10 W) a otro objeto que no se muestra en la figura. Por lo tanto, la potencia negativa *absorbida* es equivalente a la potencia positiva *entregada*.

En resumen: la figura 2.12 muestra que si una terminal del elemento es v volts positiva con respecto a la otra terminal, y si una corriente i está entrando al elemento a través de esa terminal, este elemento *absorbe* una potencia $p = vi$; también es correcto decir que se *entrega* al elemento una potencia $p = vi$. Cuando la flecha de corriente se dirige hacia el elemento en la terminal marcada como positiva, se satisface la ***convención de signos pasiva***, la cual debe estudiarse con todo cuidado, entenderse y memorizarse. En otras palabras, indica que si la flecha de corriente y los signos de polaridad de tensión se sitúan de manera tal que la corriente entra en el extremo del elemento marcado con el signo positivo, la potencia *absorbida* por el elemento se expresa mediante el producto de las variables de corriente y tensión especificadas. Si el valor numérico del producto es negativo, se dice que el elemento absorbe potencia negativa, o que en realidad está generando potencia y la entrega a algún elemento externo. Por ejemplo, en la figura 2.12, con $v = 5$ V e $i = -4$ A, el elemento absorbe −20 W o genera 20 W.

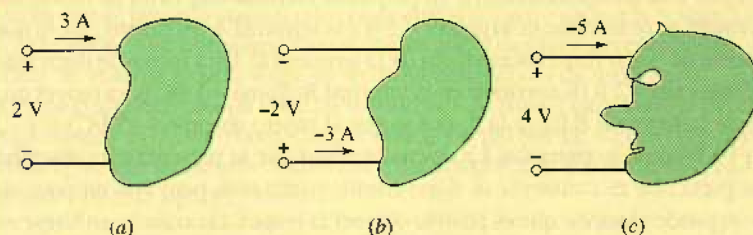
Si la flecha de corriente se dirige hacia la terminal marcada "+" de un elemento, entonces $p = vi$ produce la potencia *absorbida*. Un valor negativo indica que, en realidad, la potencia es generada por el elemento; podría haber sido mejor definir una corriente que fluye hacia afuera de la terminal "+".

Si la flecha de corriente se dirige hacia la terminal "+" de un elemento, entonces $p = vi$ produce la potencia *suministrada*. En este caso, un valor negativo indica que se está absorbiendo potencia.

Las convenciones sólo se requieren cuando existe más de una forma de hacer algo y quizá se produzca confusión cuando dos grupos diferentes tratan de comunicarse. Por ejemplo, resulta bastante arbitrario ubicar siempre el "norte" en la parte superior de un mapa; las manecillas de las brújulas no apuntan hacia "arriba", de ningún modo. Sin embargo, si se habla con personas que han elegido de manera secreta la convención opuesta de situar el "sur" en la parte superior de sus mapas, ¡imagine la confusión que se produciría! De la misma manera, existe una convención general que siempre dibuja las flechas de corriente apuntando hacia la terminal de tensión positiva, sin que importe si el elemento suministra o absorbe potencia, lo cual no es incorrecto pero en ocasiones origina corrientes que no son intuitivas y que se indican en los esquemas de los circuitos. La razón de ello es que simplemente parece más natural referirse a una corriente positiva que fluya hacia afuera de una fuente de tensión o de corriente que está suministrando potencia positiva a uno o más elementos de circuito.

EJEMPLO 2.1

Calcular la potencia absorbida en cada uno de los casos de la figura 2.13.



■ **FIGURA 2.13** (*a, b, c*) Tres ejemplos de elementos de dos terminales.

En la figura 2.13*a*, se observa que la corriente de referencia se define en forma congruente con la convención pasiva de signos, la cual supone que el elemento está absorbiendo potencia. Con +3 A que fluye hacia la terminal de referencia positiva, se calcula:

$$P = (2\text{ V})(3\text{ A}) = 6\text{ W}$$

de potencia absorbida por el elemento.

La figura 2.13*b* ilustra una imagen un poco diferente. En este caso, existe una corriente de −3 A que fluye hacia la terminal de referencia positiva. Sin embargo, la tensión, tal como se ha defininido, es negativa, lo que origina una potencia absorbida

$$P = (-2\text{ V})(-3\text{ A}) = 6\text{ W}$$

Por lo tanto, se ve en realidad que ambos casos son equivalentes: Una corriente de +3 A que fluye hacia la terminal superior es la misma que una corriente de +3 A que fluye hacia afuera de la terminal inferior, o, de modo equivalente, es igual a una corriente de −3 A que fluye hacia la terminal inferior.

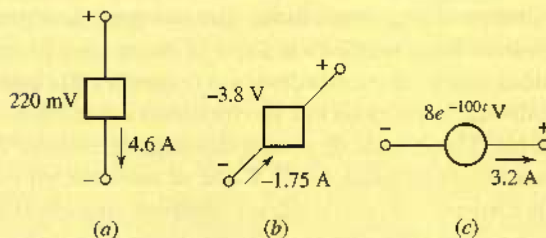
Refiriéndose a la la figura 2.13*c*, se aplican de nuevo las reglas de la convención pasiva de signos y se calcula una potencia absorbida

$$P = (4\text{ V})(-5\text{ A}) = -20\text{ W}$$

Debido a que se calcula una potencia *absorbida* negativa, se deduce que, en realidad, el elemento de la figura 2.13*c* está *suministrando* +20 W (es decir, es una fuente de energía).

PRÁCTICA

2.6 Determinar la potencia que absorbe cada elemento del circuito de la figura 2.14*a*.



■ **FIGURA 2.14**

2.7 Calcular la potencia que genera el elemento de circuito de la figura 2.14*b*.
2.8 Encontrar la potencia que se entrega al elemento de circuito de la figura 2.14*c* en $t = 5$ ms.

Respuesta: 1.012 W; 6.65 W; −15.53 W.

2.3 FUENTES DE TENSIÓN Y DE CORRIENTE

Mediante los conceptos de corriente y de tensión, ahora es posible ser más específicos en la definición de un ***elemento de circuito***.

Al hacerlo de esa manera, resulta importante distinguir entre el propio dispositivo físico y el modelo matemático que se utilizará para analizar su comportamiento en un circuito. El modelo no es más que una aproximación.

De aquí en adelante se utilizará la expresión *elemento de circuito* para referirse al modelo matemático. La elección de un modelo particular para cualquier dispositivo real debe hacerse con base en datos experimentales o la experiencia; casi siempre se supondrá que ya se ha hecho tal elección. Por simplicidad, al principio los circuitos se consideran con componentes ideales, representados mediante modelos simples.

Por definición, un elemento de circuito simple es el modelo matemático de un dispositivo eléctrico de dos terminales, que puede caracterizarse por completo mediante su relación tensión-corriente; no es posible subdividirlo en otros dispositivos de dos terminales.

Todos los elementos de circuitos simples que se considerarán se clasifican de acuerdo con la relación entre la corriente a través del elemento y la tensión en los extremos del mismo elemento. Por ejemplo, si la tensión en los extremos del elemento es linealmente proporcional a la corriente a través de él, al elemento se le denominará resistor. Otros tipos de elementos de circuito simples tienen tensiones de terminal proporcionales a la *derivada* de la corriente con respecto al tiempo (bobina), o a la *integral* de la corriente con respecto al tiempo (capacitor). Existen también elementos en los que la tensión es totalmente independiente de la corriente, o la corriente lo es de la tensión, en cuyo caso se conocen como *fuentes independientes*. Además, es necesario definir tipos especiales de fuentes para las que la tensión o la corriente de fuente dependan de una corriente o tensión en otro punto del circuito, que se conocen como *fuentes dependientes* y se usan mucho en electrónica para hacer módulos del comportamiento de la cd y de la ca de transistores, sobre todo en circuitos de amplificador.

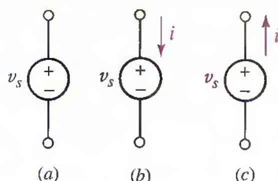


FIGURA 2.15 Símbolo de circuito para la fuente de tensión independiente.

Fuentes de tensión independientes

El primer elemento que se considerará es la ***fuente de tensión independiente***. El símbolo de circuito se presenta en la figura 2.15*a*; el subíndice *s* sólo identifica la tensión como una tensión de "fuente", y es común pero no se requiere. *Una fuente de tensión independiente se caracteriza por una tensión de terminal que es totalmente independiente de la corriente a través de ella.* Por lo tanto, si se indica una fuente de tensión independiente y se señala que la tensión de terminal corresponde a 12 V, entonces se supone siempre esta tensión, sin que importe la corriente que fluya.

La fuente de tensión independiente es una fuente *ideal*, es decir, no representa exactamente algún dispositivo físico real, debido a que la fuente ideal podría entregar en teoría una cantidad infinita de energía desde sus terminales. Sin embargo, tal fuente de tensión idealizada proporciona una aproximación razonable a varias fuentes de tensión prácticas. Una batería de almacenamiento de automóvil, por ejemplo, muestra una tensión de terminal de 12 V que se mantiene en esencia constante, siempre que la corriente a través de ella no sobrepase unos cuantos amperes. Tal vez fluya una pequeña corriente en cualquier dirección a través de la batería. Si es positiva y circula hacia afuera de la terminal marcada como positiva, entonces la batería proporcionará potencia a los faros delanteros; por ejemplo, si la corriente es positiva y fluye hacia adentro de la terminal positiva, entonces la batería está en proceso de carga y absorbe energía del alternador.[3] Una toma de corriente eléctrica doméstica común se aproxima también a una fuente de tensión independiente y suministra una tensión $v_s = 115\sqrt{2}\cos 2\pi 60t$ V; esta representación es válida para corrientes menores a 20 A o con un valor similar.

Si ha notado alguna vez que las luces de la habitación se atenúan cuando comienza a funcionar un equipo de aire acondicionado, se debe a que la repentina demanda de una corriente elevada origina una caída temporal de tensión. Luego de que el motor inicia su movimiento, se necesita menos corriente para mantenerlo. En este punto, se reduce la demanda de corriente, la tensión vuelve a su valor original y la toma de corriente de la pared proporciona otra vez una aproximación razonable a una fuente de tensión ideal.

Un punto que vale la pena repetir aquí es la presencia del signo más en el extremo superior del símbolo de la fuente de tensión independiente de la figura 2.15*a* que no significa de manera forzosa que la terminal superior sea positiva con respecto a la terminal inferior. Más bien, indica que la terminal superior es v_s volts positiva con respecto a la inferior. Si en algún instante ocurre que v_s sea negativa, entonces la terminal superior es en verdad negativa con respecto a la inferior en ese instante.

(3) O de la batería del automóvil de un amigo, si por accidente deja las luces encendidas. . .

Considere una flecha de corriente marcada como "i" que se ubica adyacente al conductor superior de la fuente (fig. 2.15*b*). La corriente i entra a la terminal en donde se localiza el signo positivo, haciendo que la convención de signos pasiva se satisfaga y la fuente de ese modo *absorbe* una potencia $p = v_s i$. Con mucha frecuencia se espera que una fuente entregue potencia a una red y no que la absorba de ella. En consecuencia, se podría orientar la flecha como en la figura 2.15*c* de manera que $v_s i$ representara la potencia *entregada* por la fuente. Técnicamente, se puede elegir cualquier dirección de flecha; en este texto se adoptará la convención de la figura 2.15*c* para fuentes de tensión y de corriente, las cuales no suelen considerarse dispositivos pasivos.

Una fuente de tensión independiente, con una tensión de terminal constante, muchas veces se conoce como fuente de tensión cd independiente y se representa por cualquiera de los símbolos de la figura 2.16*a* y *b*. Observe en la figura 2.16*b* que cuando se sugiere de forma física la estructura de placas de la batería, la placa más larga se sitúa en la terminal positiva; los signos más y menos representan entonces una notación redundante, aunque suelen incluirse de cualquier modo. Para concordar con la anterior, el símbolo para una fuente de tensión de ca independiente se ilustra en la figura 2.16*c*.

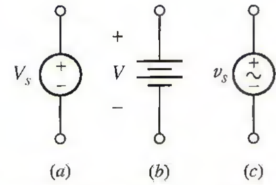


FIGURA 2.16 (*a*) símbolo de la fuente de tensión de cd; (*b*) símbolo de la batería; (*c*) símbolo de la fuente de tensión de ca.

Se suelen utilizar términos similares para fuente de tensión de cd y fuente de corriente de cd. En sentido literal, quieren decir "fuente de tensión de corriente directa" y "fuente de corriente de corriente directa", respectivamente. Si bien tales palabras pueden parecer un poco extrañas o incluso redundantes, la terminología se emplea a tal grado que no existe punto de conflicto al respecto.

Fuentes de corriente independientes

Otra fuente ideal que necesitaremos es la ***fuente de corriente independiente***. En este caso, la corriente a través del elemento es totalmente independiente de la tensión entre sus extremos. El símbolo de una fuente de corriente independiente se muestra en la figura 2.17. Si i_s es constante, se trata de una fuente de corriente cd independiente. A menudo, una fuente de corriente de ca se dibuja con una tilde en la flecha, de manera similar a como se hace con la fuente de tensión de ca que se muestra en la figura 2.16*c*.

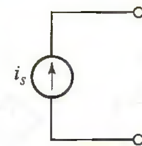


FIGURA 2.17 Símbolo de circuito de la fuente de corriente independiente.

Como en el caso de la fuente de tensión independiente, la fuente de corriente independiente representa, en el mejor de los casos, una aproximación razonable de un elemento físico. En teoría, entrega potencia infinita desde sus terminales, puesto que produce la misma corriente finita para cualquier tensión entre sus extremos, sin importar cuán grande pueda ser la tensión. Sin embargo, ello constituye una buena aproximación de muchas fuentes prácticas, en particular de circuitos electrónicos.

Aunque la mayoría de los estudiantes se sienten a gusto con una fuente de tensión independiente que suministre un voltaje fijo, pero en esencia ninguna corriente, *es un error muy frecuente* ver una fuente de corriente independiente como una en la que el voltaje entre sus terminales es nulo y que suministra una corriente fija. En realidad, no se sabe *a priori* cuál será el voltaje a través de una fuente de corriente, pues ello depende totalmente del circuito al que se encuentre conectada.

Fuentes dependientes

Los dos tipos de fuentes ideales que se han explicado hasta ahora se denominan fuentes *independientes,* debido a que el valor de la cantidad de la fuente no se ve afectado de ningún modo por lo que pasa en el resto del circuito. Esta situación contrasta incluso con otro tipo de fuente ideal, la fuente *dependiente* o *controlada*, en donde la cantidad de la fuente está determinada por una tensión o una corriente existente en algún otro lugar del sistema que se analiza. Las fuentes de este tipo aparecen en los modelos eléctricos equivalentes de muchos dispositivos electrónicos, como los transistores, amplificadores operacionales y circuitos integrados. Para distinguir las fuentes dependientes de las independientes se utilizarán los símbolos de diamante de la figura 2.18. En la figura 2.18*a* y *c*, K es una constante de ajuste adimensional. En la figura 2.18*b*, g es un factor de ajuste con unidades de A/V; en la figura 2.18*d*, r es un factor de ajuste con unidades de V/A. La corriente controladora i_x y la tensión controladora v_x deben definirse en el circuito.

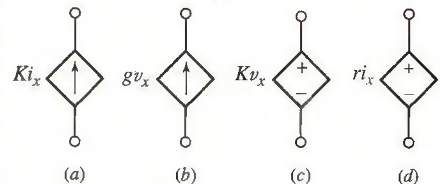
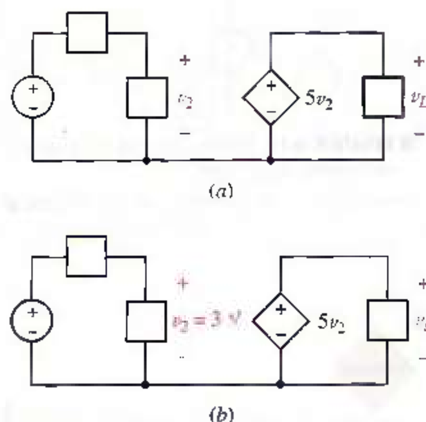


FIGURA 2.18 Cuatro tipos diferentes de fuentes independientes:
(*a*) fuente de corriente controlada por corriente;
(*b*) fuente de corriente controlada por tensión;
(*c*) fuente de tensión controlada por tensión;
(*d*) fuente de tensión controlada por corriente.

En primera instancia parece extraño tener una fuente de corriente cuyo valor dependa de un voltaje o una de una fuente de voltaje que esté controlada por una corriente que fluya a través de otro elemento. Aun una fuente de voltaje que dependa de un voltaje remoto puede parecer extraña. Sin embargo, dichas fuentes son invaluables en el modelado de un sistema complejo, pues permiten que el análisis algebraico sea muy sencillo. Como ejemplos se pueden incluir la corriente de fuga de un transistor de efecto de campo en función del voltaje de la compuerta o el voltaje de salida de un circuito integrado analógico en función del voltaje de entrada diferencial. Cuando aparece en el análisis de circuitos, se escribe toda la expresión controladora de la fuente dependiente justamente como se haría si fuera un valor numérico conectado a una fuente independiente. A menudo este procedimiento genera la necesidad de elaborar una ecuación adicional para completar el análisis, a menos que el voltaje o la corriente controladora sean una de las incógnitas específicas del sistema de ecuaciones.

EJEMPLO 2.2

En el circuito de la figura 2.19*a*, si se sabe que v_2 corresponde a 3 V, determinar v_L.



■ **FIGURA 2.19** (*a*) Ejemplo de un circuito que contiene una fuente de tensión controlada por tensión. (*b*) La información adicional que se proporciona se incluye en el diagrama.

Se da el esquema del circuito marcado de manera parcial y la información adicional de que $v_2 = 3$ V. Quizás valga la pena agregar dicho valor en el esquema, como se indica en la figura 2.19*b*.

A continuación se retrocede y se observa la información recopilada. Al examinar el esquema del circuito, se observa que la tensión deseada v_L es la misma que la tensión en la fuente dependiente. De modo que:

$$v_L = 5v_2$$

En este punto ¡qué se haría con el problema si sólo se conociera v_2!

Al volver al esquema del circuito, se observa que, en realidad, se conoce v_2, que se especificó como 3 V. Por lo tanto, se puede escribir,

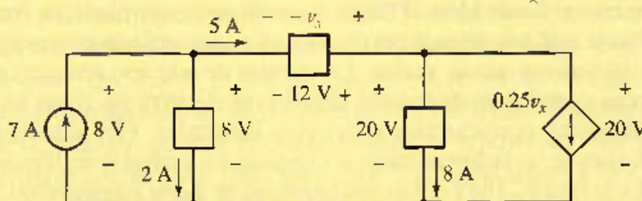
$$v_2 = 3$$

Ahora se tienen dos (simples) ecuaciones con dos incógnitas y se resuelven para encontrar que $v_L = 15$ V.

Una lección importante en esta primera etapa del juego es que *el tiempo que se emplee para marcar por completo un esquema del circuito será siempre una buena inversión.* Como última etapa, es necesario regresar y verificar el trabajo para asegurar que el resultado es correcto.

PRÁCTICA

2.9 Determinar la potencia *absorbida* por cada elemento del circuito de la figura 2.20.



■ **FIGURA 2.20**

Respuesta: (de izquierda a derecha) −56 W; 16 W; −60 W; 160 W; −60 W.

Las fuentes de tensión y de corriente dependientes e independientes son elementos *activos* que pueden entregar potencia a algún dispositivo externo. Por ahora se considerará un elemento *pasivo* como aquel que sólo puede recibir potencia. Sin embargo, después se verá que varios elementos pasivos almacenan cantidades finitas de energía y luego las reintegran a distintos dispositivos externos; puesto que se desea seguir llamando pasivos a dichos elementos, más adelante será necesario perfeccionar las dos definiciones.

Redes y circuitos

La interconexión de dos o más elementos de circuitos simples forma una ***red*** eléctrica; si contiene al menos una trayectoria cerrada, también es un ***circuito*** eléctrico. Nota: cada circuito es una red, ¡pero no todas las redes son circuitos! (vea la fig. 2.21).

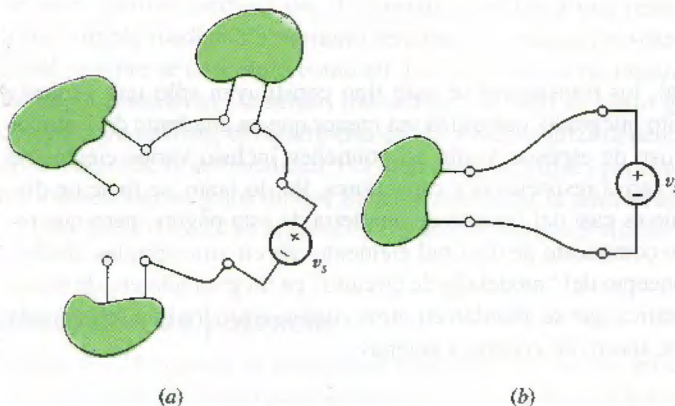


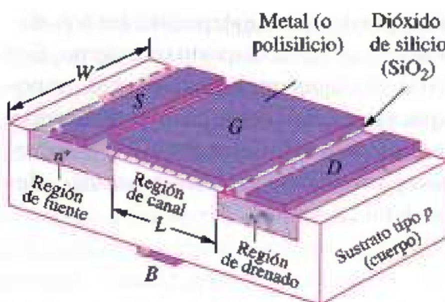
FIGURA 2.21 (*a*) Red que no es un circuito. (*b*) Red que es un circuito.

Una red que contiene al menos un elemento activo, como una fuente de tensión o de corriente independiente, es una red activa; la que no contiene ningún elemento activo, constituye una red pasiva.

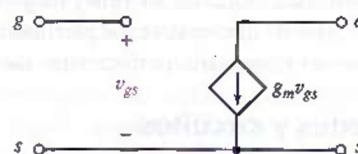
A continuación se define lo que se entiende por el término ***elemento de circuito*** y se presentarán las definiciones de varios elementos de circuito específicos, las fuentes de tensión y de corriente independientes y dependientes. En lo que resta del libro se definirán sólo cinco elementos de circuito adicionales: resistor o resistencia, inductor, capacitor, transformador y amplificador operacional ("amp op", para abreviar), todos los cuales son elementos ideales. Son importantes debido a que es posible combinarlos en redes y circuitos que representan dispositivos reales de una forma tan precisa como sea necesario. Por lo tanto, se puede hacer el modelo del transistor de la figura 2.22*a* y *b* mediante las terminales de tensión denominadas v_{gs} y de la fuente de corriente dependiente de la figura 2.22*c*. Observe que esta última produce una corriente que depende de una tensión en otra parte del circuito. El parámetro g_m, que por lo común se conoce como transconductancia, se calcula utilizando datos específicos del transistor así como también el punto de operación determinado por el circuito conectado al transistor. En general, es un número pequeño en el orden de 10^{-2} a quizás 10 A/V. El modelo funciona bastante bien, siempre y cuando la frecuencia de cualquier fuente senoidal no sea ni muy grande ni muy pequeña; además, se modifica al incluir elementos de circuito ideales adicionales tales como resistencias y capacitores.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

■ **FIGURA 2.22** Transistor de efecto de campo semiconductor de óxido metálico (MOSFET). (*a*) transistor de potencia MOSFET de canal N IRF540 del empaque TO-220, a 100 V y 22 A. (*b*) vista de la sección transversal de un MOSFET básico (R. Jaeger, *Microelectronic Design*, McGraw-Hill, *1997*); (*c*) modelo de circuito equivalente para utilizarlo en un análisis de circuitos en ca.

Por lo general, los transistores de este tipo constituyen sólo una pequeña parte de un circuito integrado, que quizá sea menor que un cuadrado de 2 mm × 2 mm y de 200 μm de espesor, y aun así contienen incluso varios cientos de transistores, más varias resistencias y capacitores. Por lo tanto, se tiene un dispositivo físico que es casi del tamaño de una letra de esta página, pero que requiere un modelo compuesto de diez mil elementos de circuito simples ideales. Se utiliza este concepto del "modelado de circuito" en un gran número de temas de ingeniería eléctrica que se abordan en otros cursos, entre los que se incluyen los de electrónica, ahorro de energía y antenas.

2.4 LEY DE OHM

Hasta este momento se han presentado las fuentes de corriente y tensión dependientes e independientes; además, se aclaró que se tratan de elementos activos *idealizados* que sólo se podrían aproximar en un circuito real. Ahora se cuenta con las bases suficientes para conocer otro elemento idealizado, la resistencia lineal. La resistencia es el elemento pasivo más simple, así que la explicación comienza considerando el trabajo de un humilde físico alemán, Georg Simon Ohm, quien en 1827 publicó un folleto en el que describía los resultados de uno de los primeros intentos para medir corrientes y tensiones, y para describirlos y relacionarlos en forma matemática. Uno de los resultados fue el planteamiento de una relación fundamental llamada ahora ***ley de Ohm***, a pesar de que se ha demostrado que este resultado lo descubrió Henry Cavendish, un brillante semiermitaño, 46 años antes en Inglaterra. El folleto de Ohm recibió una crítica bastante inmerecida y se ridiculizó durante varios años después de su primera publicación, aunque sí se aceptó más adelante y sirvió para eliminar lo eclipsado asociado con su nombre.

La ley de Ohm establece que la tensión entre los extremos de materiales conductores es directamente proporcional a la corriente que fluye a través del material, o:

$$v = R\,i \qquad [4]$$

donde la constante de proporcionalidad R recibe el nombre de ***resistencia***. La unidad de resistencia es el *ohm*, que corresponde a 1 V/A y suele abreviarse mediante una omega mayúscula, Ω.

Cuando esta ecuación se grafica sobre los ejes i en función de v el resultado es una recta que pasa por el origen (fig. 2.23). La ecuación [4] es una ecuación lineal; además, se le considera como la definición de una *resistencia lineal.* En consecuencia, si la proporción entre la corriente y la tensión asociadas con un elemento de corriente simple es constante, entonces el elemento es una resistencia lineal y tiene una resistencia igual a la razón tensión-corriente. La resistencia se suele considerar como una cantidad positiva, si bien es posible simular resistencias negativas con circuitos especiales.

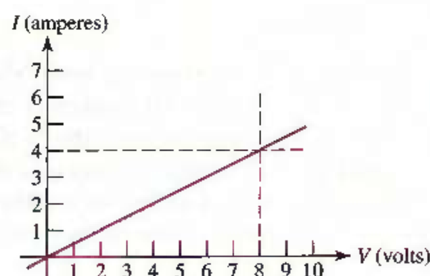


FIGURA 2.23 Relación corriente-tensión de una resistencia lineal de 2 Ω.

De nuevo, debe subrayarse que la resistencia lineal es un elemento de circuito idealizado; constituye sólo un modelo matemático de un dispositivo físico real. Las "resistencias" se compran o fabrican con facilidad; sin embargo, se determinó de inmediato que las razones tensión-corriente de estos dispositivos físicos son más o menos razonablemente constantes sólo dentro de ciertos intervalos de corriente, tensión o potencia, y que dependen también de la temperatura y de otros factores ambientales. Es común referirse a una resistencia lineal en forma simple mediante el término resistencia; cualquier resistencia que sea no lineal siempre se describirá como tal. Las resistencias no lineales no necesariamente se consideran elementos indeseables. Si bien es cierto que su presencia complica un análisis, el desempeño del dispositivo quizá dependa o forme parte de la mejora de la no linealidad. Por ejemplo, los fusibles para la protección contra sobrecorrientes y los diodos Zener para regular la tensión son de naturaleza no muy lineal, lo cual se aprovecha cuando se usan en el diseño de circuitos.

Absorción de potencia

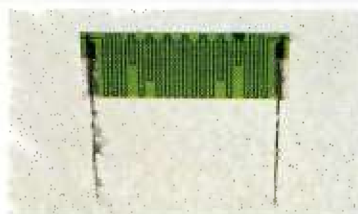
La figura 2.24 muestra varios tipos de resistencia diferentes, así como el símbolo de circuito más utilizado para designarlas. De acuerdo con las convenciones de tensión, corriente y potencia ya adoptadas, el producto de v e i da como resul-



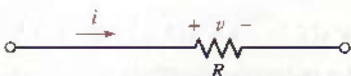
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

FIGURA 2.24 (*a*) Algunos empaques comunes de resistencias. (*b*) Resistencia de potencia de 560 Ω con una potencia de 500 W. (*c*) Resistencia de 10 teraohms (10 000 000 000 000 Ω) y 5% de tolerancia fabricada por Ohmcraft. (*d*) Símbolo de circuito de una resistencia que se aplica a todos los dispositivos de (*a*) hasta (*c*).

tado la potencia que absorbe la resistencia. Esto es, v e i se eligen para satisfacer la convención de signos pasiva. La potencia absorbida aparece físicamente como calor y/o luz y siempre es positiva; una resistencia (positiva) es un elemento pasivo que no puede entregar potencia o almacenar energía. Una variante de expresiones de la potencia absorbida es:

$$p = vi = i^2R = v^2/R \qquad [5]$$

Uno de los autores (que prefiere no identificarse)[4] tuvo la desafortunada experiencia de conectar de manera inadvertida una resistencia de carbón de 100 Ω, 2 W a una fuente de 110 V. La flama, el humo y la fragmentación consecuentes resultaron bastante desconcertantes, lo que demostró con toda claridad que una resistencia práctica tiene límites definidos para su capacidad de comportarse como un modelo lineal ideal. En este caso, se requería que la desafortunada resistencia absorbiera 121 W; puesto que se diseñó para manejar sólo 2 W, se comprende que su reacción fuera violenta.

EJEMPLO 2.3

La resistencia que se muestra en la figura 2.24*b* está conectada a un circuito que obliga a una corriente de 428 mA a fluir a través de ella. Calcular la tensión en sus terminales y la potencia que disipa.

La tensión en la resistencia está determinada por la ley de Ohm, de tal forma que

$$v = R\,i = (560)(0.428) = 239.7 \text{ V}$$

Se puede calcular la potencia disipada por la resistencia de varias formas. Puesto que se cuenta con la tensión en sus terminales y la corriente que fluye a través de ella,

$$p = vi = (239.7)(0.428) = 102.6 \text{ W}$$

que es aproximadamente 20% de su máximo valor a 500 W. Se verifican resultados mediante las dos ecuaciones siguientes:

$$p = v^2/R = (239.7)^2/560 = 102.6 \text{ W}$$
$$p = i^2R = (0.428)^2\,560 = 102.6 \text{ W}$$

y se obtiene el valor esperado.

PRÁCTICA

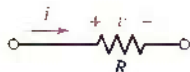


FIGURA 2.25

Con referencia en las definiciones de v e i de la figura 2.25, calcular las cantidades siguientes:

2.10 R si $i = -1.6$ mA y $v = -6.3$ V.

2.11 La potencia absorbida si $v = -6.3$ V y $R = 21$ Ω.

2.12 i si $v = -8$ V y R absorbe 0.24 W.

Respuestas: 3.94 kΩ; 1.89 W; −30.0 mA.

(4) El nombre se proporcionará con gusto, luego de una solicitud escrita a S.M.D.

APLICACIÓN PRÁCTICA

El calibre del alambre

Técnicamente, cualquier material (salvo un superconductor) ofrecerá resistencia al flujo de corriente. Como en todos los textos introductorios de circuitos, de manera tácita se supone que los alambres que aparecen en los esquemas de circuito tienen una resistencia nula, lo cual implica que no hay diferencia de potencial entre los extremos de un alambre y, en consecuencia, no existe potencia absorbida ni calor generado. Si bien no suele ser un supuesto irrazonable, pasa por alto consideraciones prácticas al elegir el diámetro de alambre apropiado para una aplicación específica.

La resistencia se determina por medio de: 1) la resistividad inherente de un material y 2) la geometría del dispositivo. La ***resistividad***, representada por el símbolo ρ, es una medida de la facilidad con que los electrones viajan a través de cierto material. En razón de que es el cociente del campo eléctrico (V/m) y la densidad de corriente que fluye en el material (A/m^2), las dimensiones de ρ son $\Omega \cdot$m, aunque a menudo se emplean prefijos métricos. Todo material tiene una diferente resistividad inherente, que depende de la temperatura. Algunos ejemplos se muestran en la tabla 2.3; como puede observarse, existe una pequeña variación entre los diferentes tipos de cobre (menor a 1%), pero una gran diferencia entre metales distintos. En particular el acero, aunque más resistente que el cobre, es varias veces más resistivo. En alguna literatura técnica, es más común ver mencionada la conductividad (simbolizada por una σ) de un material, la cual simplemente es el recíproco de la resistividad.

La resistencia de un objeto particular se obtiene multiplicando la resistividad por la longitud ℓ de la resistencia y dividiéndola entre el área de la sección transversal (A) (ecuación [6]), como se ilustra en la figura 2.26.

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \qquad [6]$$

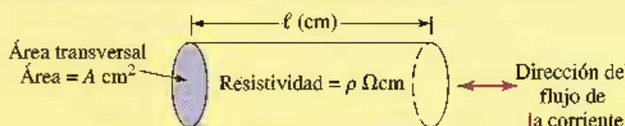


FIGURA 2.26 Definición de los parámetros geométricos empleados para calcular la resistencia de un alambre. Se supone que la resistividad del material es espacialmente uniforme.

La resistividad se determina cuando se elige el tipo de material con el que se fabrica un alambre y se mide la temperatura del medio ambiente en donde se lleva la aplicación. Puesto que en realidad el alambre absorberá una cantidad finita de potencia debido a su resistencia, el flujo de corriente origina la producción de calor. Los alambres más gruesos tienen resistencia más baja y también disipan el calor con mayor facilidad, pero son más pesados, tienen un volumen mayor y, además, resultan más costosos. Por lo tanto, por consideraciones prácticas es conveniente seleccionar el alambre más pequeño que puedan utilizarse de

TABLA 2.3 Algunos materiales comunes de alambre eléctrico y sus resistividades*

Especificación ASTM**	Templado y forma	Resistividad a 20°C ($\mu\Omega \cdot$cm)
B33	Cobre, estañado redondo	1.7654
B75	Cobre, tubular, suave, cobre OF	1.7241
B188	Cobre, tubo macizo, rectangular o cuadrado	1.7521
B189	Cobre, recubierto de plomo suave, redondo	1.7654
B230	Aluminio, macizo, redondo	2.8625
B227	Acero con cubierta de cobre, macizo, redondo, grado 40 HS	4.3971
B355	Cobre, recubierto con níquel, redondo, clase 10	1.9592
B415	Acero con cubierta de aluminio, macizo, redondo	8.4805

* C.B. Rawlins, "Conductor Materials", *Standard Handbook for Electrical Engineering*, 13a. edición, D.G. Fink y H.W. Beaty, eds. Nueva York: McGraw-Hill, 1993, pp. 4-4 a 4-8.

** Sociedad Estadounidense de Prueba de Materiales.

(Continúa en la siguiente página)

manera segura, en lugar de seleccionar el alambre con el diámetro mayor disponible en un esfuerzo por minimizar las pérdidas resistivas. El American Wire Gauge (AWG) es un sistema estándar para especificar tamaños de alambre. Al elegir un calibre de alambre, los valores AWG más pequeños corresponden a un diámetro de alambre más grande; la tabla 2.4 presenta información abreviada de calibres comunes. Los códigos de seguridad locales eléctricos y contra incendio típicamente dictan el calibre que se requiere en aplicaciones específicas de cableado con base en la corriente máxima esperada, así como en el lugar donde se localizará la instalación.

TABLA 2.4 Algunos calibres de alambre comunes y resistencia de alambre de cobre sólido (blando).*

Tamaño del conductor (AWG)	Sección transversal (mm^2)	Ohms por 1 000 pies a 20°C
28	0.0804	65.3
24	0.205	25.7
22	0.324	16.2
18	0.823	6.39
14	2.08	2.52
12	3.31	1.59
6	13.3	0.3952
4	21.1	0.2485
2	33.6	0.1563

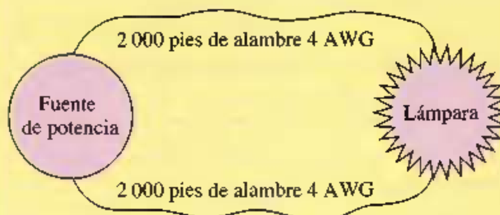
* C. B. Rawlins y cols., *Standard Handbook for Electrical Engineering*, 13ª. edición, D.G. Fink y H.W. Beaty, eds. Nueva York: McGraw-Hill, 1993, pp. 4-47.

EJEMPLO 2.4

Se tiende un alambre a lo largo de un tramo de 2 000 pies hacia una lámpara de alta potencia que toma 100 A. Si se usa un alambre AWG número 4, ¿qué cantidad de potencia se disipa (es decir, se pierde o se desperdicia) dentro del alambre?

La mejor forma para empezar a resolver este problema consiste en hacer un dibujo rápido, como el de la figura 2.27. En la tabla 2.4 se observa que un alambre AWG 4 tiene 0.2485 Ω para cada 1 000 pies. El alambre que sale hacia la lámpara mide 2 000 pies de largo, y el que regresa a la fuente de potencia presenta también esa longitud, lo que corresponde a un total de 4 000 pies. De tal manera, el alambre tiene una resistencia de:

$$R = (4\,000 \text{ ft})\,(0.2485\ \Omega/1\,000 \text{ ft}) = 0.994\ \Omega$$



■ **FIGURA 2.27** Rápido bosquejo del circuito con foco del ejemplo 2.4.

La potencia disipada está dada por $i^2 R$, donde $i = 100$ A. Así, el alambre disipa 9 940 W o 9.94 kW. Incluso con una resistencia total menor que 1 Ω se desperdicia en el alambre una cantidad enorme de potencia: ¡ésta también debe ser proporcionada por la fuente de potencia, aunque nunca llegue al foco!

PRÁCTICA

2.13 Dadas las pérdidas de potencia tan elevadas que se describieron en el ejemplo 2.4, su gerente le pide que reemplace el alambre AWG número 4 por el alambre AWG número 2. Calcular la pérdida de potencia en el nuevo alambre, suponiendo que el foco consume una corriente de 100 A. Por mera curiosidad, ¿cuántas veces más pesará el nuevo cableado (dos veces más, cuatro veces más, etc.)?

Respuesta: 6.25 kW, 1.59 veces más.

Conductancia

En un resistor lineal, la proporción entre la corriente y la tensión también es constante.

$$\frac{i}{v} = \frac{1}{R} = G \quad [7]$$

donde G se llama *conductancia*. La unidad del SI para la conductancia es el siemens (S), 1 A/V. Anteriormente se utilizaba una unidad no oficial, el mho, abreviada mediante una omega mayúscula invertida ℧. De vez en cuando la verá en algunos esquemas de circuito, así como en catálogos y textos. El mismo símbolo de circuitos (fig. 2.24*d*) se emplea para representar la resistencia y la conductancia. En este caso, la potencia absorbida es también necesariamente positiva y se podría expresar en términos de la conductancia mediante:

$$p = vi = v^2 G = \frac{i^2}{G} \quad [8]$$

De este modo, un resistor de 2 Ω tiene una conductancia de $\frac{1}{2}$ S, y si fluye una corriente de 5 A a través de él, se presenta una tensión de 10 V en las terminales y se absorbe una potencia de 50 W.

Todas las expresiones dadas hasta ahora en esta sección se escribieron en términos de la corriente, la tensión y la potencia instantáneas, como $v = iR$ y $p = vi$. Es necesario recordar que es una notación abreviada de $v(t) = R\,i(t)$ y $p(t) = v(t)\,i(t)$. La corriente que circula por una resistencia y la tensión que existe entre sus extremos deben variar de la misma manera respecto del tiempo. Por lo tanto, si $R = 10$ Ω y $v = 2$ sen $100t$ V, entonces $i = 0.2$ sen $100t$ A. Se observa que la potencia está dada por 0.4 sen^2 W, de modo que un diagrama simple ilustrará la naturaleza diferente de su variación en el tiempo. Si bien la corriente y la tensión son negativas durante ciertos intervalos, ¡la potencia absorbida *nunca* es negativa!

La resistencia puede utilizarse como la base para definir dos términos que suelen emplearse: *cortocircuito* y *circuito abierto*. Se define al cortocircuito como una resistencia de cero ohms; entonces, puesto que $v = i\,R$, la tensión en un cortocircuito debe ser cero, aunque la corriente tenga cualquier valor. De manera análoga, se define al circuito abierto como una resistencia infinita. Se concluye a partir de la ley de Ohm que la corriente debe ser nula, sin que importe la tensión en el circuito abierto. Aunque los alambres reales tienen una pequeña

resistencia asociada, siempre se supone que tienen resistencia nula a menos que se indique lo contrario. Por lo tanto, en la totalidad de los diagramas esquemáticos de circuito, los alambres se consideran como cortocircuitos perfectos.

RESUMEN Y REPASO

Observe que una corriente representada por i o $i(t)$ es constante (cd) o variable en el tiempo, aunque las corrientes representadas por el símbolo I no deben variar en el tiempo.

- El sistema de unidades más utilizado en la ingeniería eléctrica es el SI.
- La dirección en la que se mueven las cargas positivas constituye la correspondiente al flujo de corriente positiva; de manera alternativa, el flujo de corriente positiva está en dirección opuesta a la de los electrones móviles.
- Para definir una corriente, deben indicarse un valor y una dirección. Por lo general, las corrientes se denotan mediante la letra mayúscula "I" para valores constantes (cd), o de lo contrario también $i(t)$ o simplemente i.
- Para definir la tensión en un elemento, se requiere marcar las terminales con signos "+" y "−" además de proporcionar un valor (un símbolo algebraico o un valor numérico).
- Se dice que cualquier elemento suministrará potencia positiva si fluye corriente positiva hacia afuera de la terminal de tensión positiva. Cualquier elemento absorbe potencia positiva si fluye corriente positiva hacia adentro de la terminal de tensión positiva.
- Existen seis fuentes: la fuente de tensión independiente, la fuente de corriente independiente, la fuente de corriente dependiente controlada por corriente, la fuente de corriente dependiente controlada por tensión, la fuente de tensión dependiente controlada por tensión y la fuente de tensión dependiente controlada por corriente.
- La ley de Ohm establece que la tensión en un resistor lineal es directamente proporcional a la corriente que fluye a través de él; es decir, $v = R\,i$.
- La potencia disipada por un resistor (que causa producción de calor) está dada por $p = vi = i^2R = v^2/R$.
- En el análisis de circuitos se suele suponer que los alambres tienen una resistencia nula. Sin embargo, cuando se elige un calibre de alambre para una aplicación específica, es necesario consultar códigos locales eléctricos y contra incendios.

LECTURAS ADICIONALES

Un buen libro que estudia con una gran profundidad las propiedades y fabricación de resistencias es:

Felix Zandman, Paul-René Simon y Joseph Szwarc, *Resistor Theory and Technology,* Raleigh, N.C.: SciTech Publishing, 2002.

Un buen manual de ingeniería eléctrica para todo propósito es:

Donald G. Fink y H. Wayne Beaty, *Standard Handbook for Electrical Engineers,* 13a. edición, Nueva York: McGraw-Hill,1993.

En particular las páginas 1-1 a 1-51, 2-8 a 2-10 y 4-2 a 4-207 proporcionan un tratamiento detallado de temas relacionados con los que se estudiaron en este capítulo.

Una referencia detallada al SI se encuentra disponible en internet en el Instituto Nacional de Estándares:

Barry N. Taylor, *Guide for the Use of the International System of Units (SI),* NIST Special Publication 811, Edición 1995, www.nist.gov.

EJERCICIOS

2.1 Unidades y escalas

1. Convierta lo siguiente a notación de ingeniería:
   (*a*) 1.2×10^{-5} s (*b*) 750 mJ
   (*c*) 1 130 Ω (*d*) 3 500 000 000 bits
   (*e*) 0.0065 μm (*f*) 13 560 000 Hz
   (*g*) 0.039 nA (*h*) 49 000 Ω
   (*i*) 1.173×10^{-5} μA
2. Convierta lo siguiente a notación de ingeniería:
   (*a*) 1 000 000 W (*b*) 12.35 mm
   (*c*) 47 000 W (*d*) 0.00546 A
   (*e*) 0.033 mJ (*f*) 5.33×10^{-6} mW
   (*g*) 0.000000001 s (*h*) 5 555 kW
   (*i*) 32 000 000 000 pm
3. Convierta las siguientes unidades del SI. Asegúrese de utilizar notación de ingeniería y conserve cuatro dígitos significativos.
   (*a*) 400 hp (*b*) 12 ft (*c*) 2.54 cm
   (*d*) 67 Btu (*e*) 285.4×10^{-15} s
4. Una cierta batería de celdas secas de 15 V totalmente descargada, requiere de una corriente de 100 mA por 3 horas para recargarse completamente. ¿Cuál es la capacidad de almacenamiento de energía de la batería, suponiendo que la tensión no depende del estado de carga?
5. Un pequeño y veloz carro eléctrico está equipado con un motor de 175 hp.
   (*a*) ¿Cuántos kW se requieren para hacer funcionar el motor si se supone una eficiencia de 100% en la conversión de potencia eléctrica en potencia mecánica?
   (*b*) ¿Cuánta energía (en J) se consume si el motor opera de manera continua durante 3 horas?
   (*c*) Si una batería de plomo-ácido tiene una capacidad de almacenamiento de 430 kilowatt hora, ¿cuántas baterías se necesitan para la parte (*b*)?
6. Un bisturí láser de KrF genera pulsos láser de 400 mJ de 20 ns de duración.
   (*a*) ¿Cuál es la potencia instantánea pico del láser?
   (*b*) Si sólo pueden generarse 20 pulsos por segundo, ¿cuál es la salida de potencia promedio del láser?
7. Un láser amplificado de titanio/zafiro genera pulsos láser de 1 mJ de 75 fs de duración.
   (*a*) ¿Cuál es la potencia instantánea pico del láser?
   (*b*) Si sólo pueden generarse 100 pulsos por segundo, ¿cuál es la salida de potencia promedio del láser?
8. La potencia suministrada por cierta batería es constante e igual a 6 W durante los primeros 5 minutos, cero en los siguientes 2 minutos, un valor que aumenta linealmente desde cero hasta 10 W durante los siguientes 10 minutos, y una potencia que disminuye linealmente de 10 W a cero en los siguientes 7 minutos. (*a*) ¿Cuál es la energía total en joules consumida durante este intervalo de 24 minutos? (*b*) ¿Cuál es la potencia promedio en Btu/h durante este tiempo?
9. Un nuevo tipo de batería entrega 10 W de potencia por 8 horas sin fluctuación de voltaje o corriente. Sin embargo, después de 8 horas, la potencia de salida cae linealmente de 10 W a 0 en sólo 5 minutos. (*a*) ¿Cuál es la capacidad de almacenamiento de energía de la batería? (*b*) ¿Cuánta energía es entregada durante los últimos 5 minutos del ciclo de descarga?

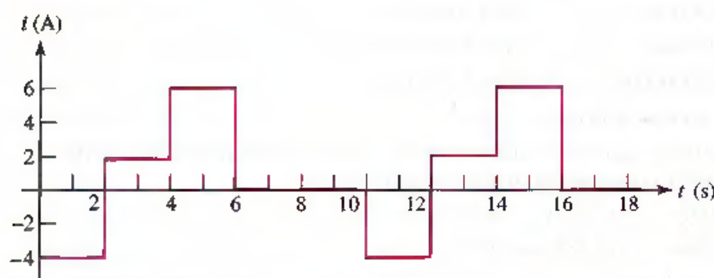
2.2 Carga, corriente, tensión y potencia

10. La carga total acumulada por cierto dispositivo está dada como una función del tiempo por $q = 18t^2 - 2t^4$ (en unidades del SI). (*a*) ¿Cuál es la carga total que se

acumula en $t = 2$ s? (*b*) ¿Cuál es la carga máxima acumulada en el intervalo $0 \leq t \leq 3$ s, y cuándo ocurre? (*c*) ¿A qué velocidad se acumula la carga en $t = 0.8$ s? (*d*) Dibuje curvas de q en función de t y de i en función de t en el intervalo $0 \leq t \leq 3$ s.

11. La corriente $i_1(t)$ de la figura 2.6*c* está dada por $-2 + 3e^{-5t}$ A para $t < 0$, y $-2 + 3e^{3t}$ A para $t > 0$. Determinar (*a*) $i_1(-0.2)$; (*b*) $i_1(0.2)$; (*c*) los instantes en los que $i_1 = 0$; (*d*) la carga total que ha pasado de izquierda a derecha a lo largo del conductor en el intervalo $-0.8 < t < 0.1$ s.

12. La forma de onda que se presenta en la figura 2.28 tiene un periodo de 10 s. (*a*) ¿Cuál es el valor promedio de la corriente en un periodo? (*b*) ¿Qué cantidad de carga se transfiere en el intervalo $1 < t < 12$ s? (*c*) Si $q(0) = 0$, dibuje $q(t)$, $0 < t < 16$ s.

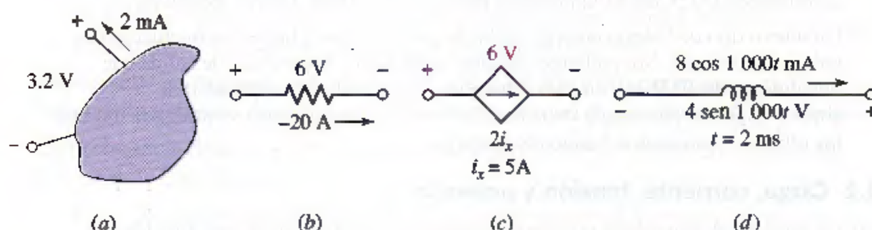


■ **FIGURA 2.28**

13. Considere una trayectoria formada por los puntos discretos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*. Se consumen 2 pJ en mover un electrón de *A* a *B* o de *B* a *C*. Consumen 3 pJ para mover un protón de *C* a *D*. No se consume energía para mover un electrón de *D* a *E*.
    (*a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial (en volts) entre *A* y *B*? (Suponga que la referencia + está en *B*.)
    (*b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial (en volts) entre *D* y *E*? (Suponga que la referencia + está en *E*.)
    (*c*) ¿Cuál es la diferencia de potencial (en volts) entre *C* y *D*? (Suponga que la referencia + está en *D*.)
    (*d*) ¿Cuál es la diferencia de potencial (en volts) entre *D* y *B*? (Suponga que la referencia + está en *D*.)

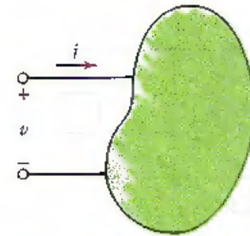
14. Se encuentra una caja no marcada en la esquina trasera de un laboratorio. Tiene dos alambres que salen de ella, uno color naranja y otro color morado. Un voltímetro se conecta a los dos alambres con la referencia + en el alambre morado. De esta forma se mide una tensión de −2.86 V. ¿Cuál será la lectura de tensión si se invierten las conexiones del voltímetro?

15. Determine la potencia que absorbe cada uno de los elementos de circuito dados en la figura 2.29.



■ **FIGURA 2.29**

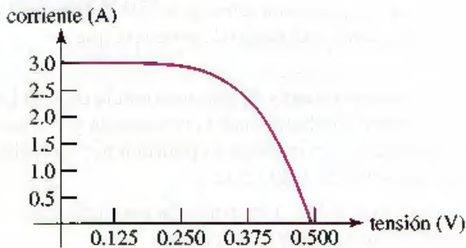
16. Sea $i = 3te^{-100t}$ mA y $v = (0.006 - 0.6t)e^{-100t}$ V para el elemento de circuito de la figura 2.30. (*a*) ¿Qué potencia absorbe el elemento de circuito en $t = 5$ ms? (*b*) ¿Cuánta energía se entrega al elemento en el intervalo $0 < t < \infty$?



■ **FIGURA 2.30**

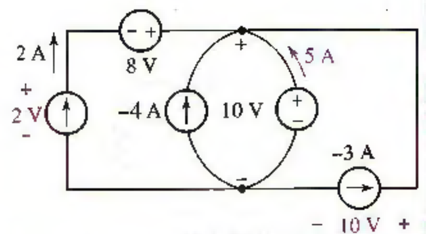
17. En la figura 2.30, sea $i = 3e^{-100t}$ A. Determine la potencia que absorbe el elemento de circuito en $t = 8$ ms si v es igual a: (*a*) $40i$; (*b*) $0.2\,di/dt$; (*c*) $30\int_0^t i\,dt + 20$ V.

18. En la figura 2.31 se presenta la característica de corriente-tensión de una celda solar de silicio expuesta a la luz solar directa a las doce del día en Florida, durante pleno verano. Se obtiene colocando resistores de diferente tamaño entre las dos terminales del dispositivo y se miden las corrientes y tensiones resultantes.
   (*a*) ¿Cuál es el valor de la corriente en cortocircuito?
   (*b*) ¿Cuál es el valor de la tensión en circuito abierto?
   (*c*) Calcule la potencia máxima que se obtiene del dispositivo.



■ **FIGURA 2.31**

19. Una corriente que fluye hacia cierto circuito se supervisa con cuidado a medida que pasa el tiempo. Todos los voltajes (tensión) especificados suponen que la terminal de referencia positiva es la terminal superior de las dos terminales del circuito. Se observa que en las dos primeras horas, una corriente de 1 mA fluye hacia la terminal superior, al mismo tiempo que se mide una tensión de +5 V. En los 30 minutos siguientes, no fluye ninguna corriente hacia adentro o hacia afuera. Después, en las dos horas siguientes, fluye una corriente de 1 mA afuera de la terminal superior, con un voltaje medido de +2 V. Después, de nuevo no fluye corriente alguna hacia adentro o hacia afuera. Si se supone que el circuito no tenía energía almacenada inicialmente, responda lo siguiente:
   (*a*) ¿Cuánta potencia se entregó al circuito durante cada uno de los tres intervalos?
   (*b*) ¿Cuánta energía se proporcionó al circuito durante las primeras dos horas de observación?
   (*c*) ¿Cuánta energía queda ahora en el circuito?

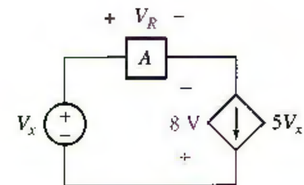


■ **FIGURA 2.32**

2.3 Fuentes de tensión y de corriente

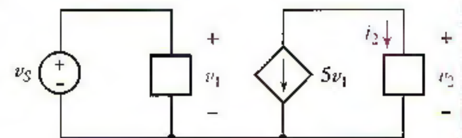
20. Determine cuál de las cinco fuentes de la figura 2.32 se está cargando (absorbe potencia positiva) y demuestre que la suma algebraica de los cinco valores de potencia absorbida es cero.

21. Con referencia al circuito de la figura 2.32, multiplique cada corriente y voltaje por 4 y determine cuál de las cinco fuentes actúa como fuente de energía (es decir, que proporciona potencia positiva a otros elementos).



■ **FIGURA 2.33**

22. En el circuito simple de la figura 2.33 circula la misma corriente a través de cada elemento. Si $V_x = 1$ V y $V_R = 9$ V, calcular:
   (*a*) la potencia absorbida por el elemento *A*;
   (*b*) la potencia suministrada por cada una de las dos fuentes.
   (*c*) ¿La potencia total suministrada es igual a la potencia total absorbida? ¿Su descubrimiento es razonable? ¿Por qué sí (o por qué no)?



■ **FIGURA 2.34**

23. En el circuito de la figura 2.34, si $v_2 = 1\,000 i_2$ e $i_2 = 5$ mA, determine v_S.

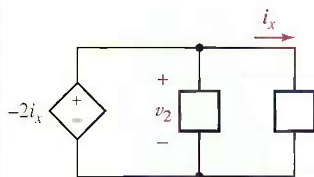


FIGURA 2.35

24. Para el circuito de la figura 2.35, si $i_x = -1$ mA, calcular el voltaje v_2.
25. Un circuito simple se forma con una batería de plomo-ácido de 12 V y un faro frontal de automóvil. Si la batería entrega una energía total de 460.8 watts-hora durante un periodo de descarga de 8 horas,
    (*a*) ¿qué cantidad de potencia se entrega al faro?
    (*b*) ¿cuál es la corriente que fluye por la bombilla? (Suponga que la tensión de la batería permanece constante mientras se descarga.)
26. Debe elegirse un fusible para cierta aplicación. Se pueden elegir fusibles especificados para "fundirse" cuando las corrientes superen 1.5 A, 3 A, 4.5 A o 5 A. Si la tensión de suministro es de 110 V y la máxima disipación de potencia permisible corresponde a 500 W, ¿cuál es el fusible que se debe elegir y por qué?

2.4 Ley de Ohm

27. En realidad, una resistencia de 1 kΩ con 10% de tolerancia puede tener cualquier valor en el rango de 900 y 1 100 Ω. Si se le aplica una tensión de 5.0 V, (*a*) ¿cuál es el rango de corriente que se medirá? (*b*) ¿cuál es el rango de potencia que se medirá?
28. Una corriente de 2 mA es obligada a circular a través de una resistencia de 470 Ω con 5% de tolerancia. ¿Qué valor de potencia deberá tener la resistencia y por qué? (Observe que "5% de tolerancia" significa que la resistencia podría tener en realidad un valor cualquiera dentro del rango de 446.5 Ω y 493.5 Ω.)
29. Sea $R = 1\,200\ \Omega$ para el resistor de la figura 2.24*d*. Determine la potencia que absorbe R en $t = 0.1$ s si (*a*) $i = 20e^{-12t}$ mA; (*b*) $v = 40 \cos 20t$ V; (*c*) $vi = 8t^{1.5}$ VA.
30. Cierta tensión es igual a +10 V durante 20 ms −10 V en los siguientes 20 ms y continúa oscilando entre los dos valores en intervalos de 20 ms. La tensión se presenta en un resistor de 50 Ω. Para cualquier intervalo de 40 ms determine (*a*) el valor máximo de la tensión; (*b*) el valor promedio de la tensión; (*c*) el valor promedio de la corriente del resistor; (*d*) el valor máximo de la potencia absorbida; (*e*) el valor promedio de la potencia absorbida.
31. En el circuito de la figura 2.36 debe fluir la misma corriente a través de los tres componentes como consecuencia de leyes de conservación. Recurriendo al hecho de que la potencia total suministrada es igual a la potencia total absorbida, demuestre que la tensión en el resistor R_2 está dada por:

$$V_{R_2} = V_S \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

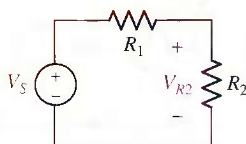


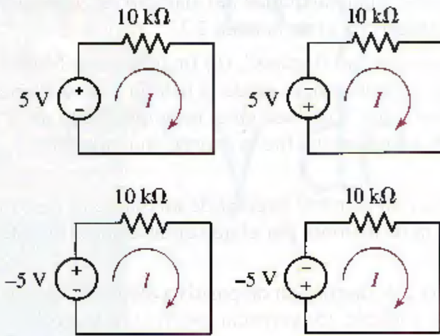
FIGURA 2.36

32. Las siguientes mediciones experimentales se efectuaron en un dispositivo de dos terminales, fijando la tensión mediante el uso de un suministro de potencia variable, y midiendo el flujo de corriente resultante en una de las terminales.

Tensión (V)	Corriente (mA)
−1.5	−3.19
−0.3	−0.638
0.0	1.01×10^{-8}
1.2	2.55
2.5	5.32

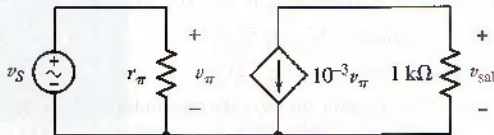
    (*a*) Grafique la característica de corriente-tensión.
    (*b*) Calcule la conductancia y la resistencia efectivas del dispositivo.
    (*c*) En una gráfica diferente, dibuje la característica corriente-tensión, si la resistencia del dispositivo se incrementa en un factor de 3.

33. Para cada uno de los circuitos de la figura 2.37, determine la corriente I y calcule la potencia que absorbe la resistencia.



■ **FIGURA 2.37**

34. Es común ver una variedad de subíndices en las tensiones, corrientes y resistencias de los diagramas de circuito. En el circuito de la figura 2.38 aparece la tensión v_π en el resistor llamado r_π. Calcular v_{sal} si $v_s = 0.01 \cos 1\,000t$ V.



■ **FIGURA 2.38**

35. El circuito de la figura 2.38 está construido de tal manera que $vs = 2$ sen $5t$ V, y $r_\pi = 80\ \Omega$. Calcular v_{sal} en $t = 0$ y $t = 314$ ms.

36. Un tramo de alambre de cobre sólido calibre 18 AWG es tendido a lo largo de un camino para conectar un sensor con un sistema de cómputo central. Si se sabe que el alambre tiene una resistencia de 53 Ω, ¿cuál es su longitud total? (suponga que la temperatura es ~20°C).

37. Se encuentra varado en una isla desierta y la temperatura del aire es de 108°F. Después de darse cuenta de que su transmisor no funciona, atribuye el problema a una resistencia descompuesta de 470 Ω. Por fortuna, observa que hay un gran carrete de alambre de cobre sólido de calibre 28 AWG tirado en la costa. ¿Cuántos pies de alambre requerirá para usarlos como un sustituto de la resistencia de 470 Ω? Observe que debido a que la isla se ubica en el trópico, la temperatura es un poco mayor que los 20°C utilizados para marcar la resistencia del alambre en la tabla 2.4. Puede utilizar la siguiente relación[5] para corregir los valores de la tabla mencionada:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{234.5 + T_2}{234.5 + T_1}$$

donde T_1 = temperatura de referencia (20°C en este caso)
R_1 = resistencia a la temperatura de referencia
T_2 = nueva temperatura (en grados Celsius)
R_2 = resistencia a la nueva temperatura

38. La resistencia de un conductor que tiene una longitud de l y una sección transversal uniforme A está dada por $R = l/\sigma A$, donde σ (sigma) es la conductividad eléctrica. Si $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m del cobre: (*a*) ¿cuál es la resistencia de un alambre de cobre número 18 (diámetro = 1.024 mm) es decir, 50 pies de largo? (*b*) ¿Si una tarjeta de circuito impreso tiene un peine conductor envuelto en cobre de 33 μm de grosor y 0.5 mm de ancho que puede transportar 3 A a 50°C de forma segura, encontrar la resistencia de un tramo de 15 cm de ese listón y la potencia entregada a éste por la corriente de 3 A.

(5) D. G. Fink y H. W. Beaty, *Standard Handbook for Electrical Engineers*, 13a. edición, Nueva York: McGraw-Hill, 1993, p. 2-9.

39. La tabla 2.3 presenta varios tipos de estándares de alambre de cobre con una resistividad de aproximadamente $1.7\mu\ \Omega \cdot$cm. Utilice la información de la tabla 2.4 para el alambre 28 AWG para determinar la resistividad del alambre de cobre suave correspondiente. ¿Es su valor congruente con el de la tabla 2.3?

40. (*a*) Presentar tres ejemplos de resistencias "no-lineales". (*b*) Imaginar una batería conectada a una resistencia. La energía se transfiere desde la batería a la resistencia hasta que la primera se descarga totalmente. Con base en el principio físico de la conservación de la energía, ¿a dónde exactamente fue la energía inicialmente almacenada en la batería?

41. Si el cobre B33 se utiliza para fabricar un alambre circular de un diámetro de 1 mm, ¿cuánta potencia se disipará en 100 m de alambre por el que circula una corriente de 1.5 A?

D 42. Con base a la información de la tabla 2.4, diseñar un dispositivo mecánico que actúe continuamente como una resistencia variable. (Sugerencia: podría ser de ayuda una bobina.)

43. Se puede hacer el modelo del diodo, un dispositivo no lineal muy común de dos terminales, mediante la siguiente relación de corriente-tensión:

$$I = 10^{-9}(e^{39V} - 1)$$

(*a*) Dibujar la característica de corriente-tensión para $V = -0.7$ a 0.7 V.

(*b*) ¿Cuál es la resistencia efectiva del diodo a $V = 0.55$ V?

(*c*) ¿A qué corriente el diodo tiene una resistencia de 1 Ω?

D 44. Se necesita una resistencia de 10 Ω para reparar un circuito regulador de tensión en una aplicación portátil. Los únicos materiales disponibles son carretes de 10 000 pies con sus calibres de alambre que se presentan en la tabla 2.4. Diseñar una resistencia adecuada.

D 45. La resistividad del silicio cristalino "tipo *n*" está dada por $\rho = 1/qN_D\mu_n$, donde q, la carga por electrón, es 1.602×10^{-19} C, N_D = número de átomos de impureza de fósforo por cm^3, y μ_n = movilidad del electrón (en unidades de cm^2 V^{-1}s^{-1}). La movilidad y la concentración de impurezas se relacionan por medio de la figura 2.39. Suponiendo una oblea de silicio de 6 pulgadas de diámetro y de 250 μm de espesor, diseñar una resistencia de 100 Ω que especifique una concentración de fósforo en el intervalo de $10^{15} \le N_D \le 10^{18}$ átomos/cm^3, así como una geometría del dispositivo adecuada.

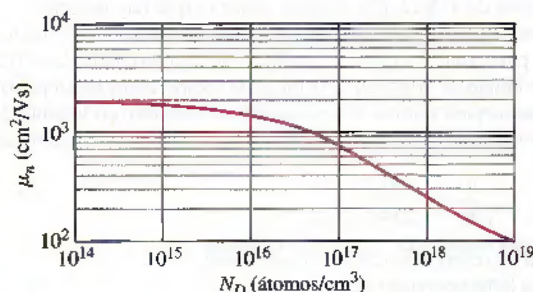


FIGURA 2.39

CAPÍTULO 3

Leyes de tensión y de corriente

CONCEPTOS CLAVE

Nuevos términos sobre circuitos: *nodo, trayectoria, lazo y rama.*

Ley de Kirchhoff de corriente (LKC).

Ley de Kirchhoff de voltaje (LKV).

Análisis de circuitos básicos en serie y en paralelo.

Combinación de fuentes en serie y en paralelo.

Simplificación de combinaciones de resistencias en serie y en paralelo.

División de corriente y de tensión.

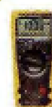
Conexiones a tierra.

INTRODUCCIÓN

En el capítulo 2 se presentaron la resistencia así como varios tipos de fuentes. Después de definir algunos términos nuevos sobre circuitos, se contará con elementos suficientes para comenzar a analizar circuitos simples realizados a partir de estos dispositivos. Las técnicas que se explicarán están basadas en dos leyes relativamente simples: la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) y la ley de voltajes (tensiones) de Kirchhoff (LVK). La LCK se basa en el principio de conservación de la carga, mientras que la LVK se fundamenta en el principio de conservación de la energía, por lo cual ambas son leyes físicas fundamentales. Una vez que se haya familiarizado con el análisis básico, podrá hacer un uso más extensivo de LCK y LVK para simplificar combinaciones en serie y en paralelo de resistencias, fuentes de tensión o fuentes de corriente y se desarrollarán los conceptos de división de tensión y de corriente. En capítulos subsecuentes, se explicarán técnicas adicionales que permitirán analizar, de manera eficiente, redes aún más complejas.

3.1 NODOS, TRAYECTORIAS, LAZOS Y RAMAS

Ahora el foco de atención se centrará en determinar las relaciones corriente-tensión en redes simples con dos o más elementos de circuito. Los elementos se conectarán entre sí por medio de cables (algunas veces denominados "hilos de conexión"), que tienen una resistencia nula. Debido a que la red aparece entonces como varios elementos simples y un conjunto de hilos de conexión, se le da el nombre de ***red de parámetros concentrados***. Surge un problema de análisis más difícil cuando se debe enfrentar una ***red de parámetros distribuidos***, que contiene un número esencialmente infinito de elementos pequeños que se van anulando. En este texto sólo se expondrán las redes de parámetros concentrados.

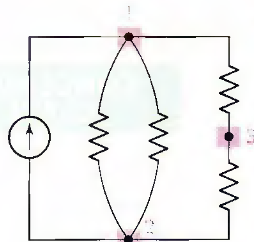


En los circuitos ensamblados en el mundo real, los cables siempre tienen resistencia finita. Sin embargo, dicha resistencia casi siempre es tan pequeña, en comparación con otras resistencias del circuito, que puede pasarse por alto sin introducir un error importante. Por lo tanto, de ahora en adelante, en los circuitos idealizados, se hará referencia a cables de "resistencia nula".

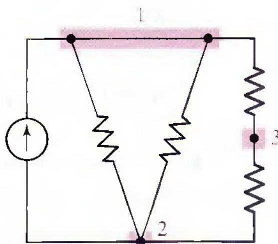
Un punto en el cual dos o más elementos tienen una conexión común se llama ***nodo***. Por ejemplo, en la figura 3.1*a* se presenta un circuito que contiene tres nodos. Algunas redes se dibujan de manera que engañan a un estudiante desprevenido que cree que hay más nodos de los que en verdad existen. Esto ocurre cuando un nodo, tal como el que se indica con el número 1 en la figura 3.1*a*, se muestra como dos uniones separadas conectadas por un conductor (resistencia nula), como en la figura 3.1*b*. Sin embargo, todo lo que se ha hecho es dispersar el punto común en una línea común de resistencia nula. Así, se debe considerar en forma obligatoria la totalidad de los hilos de conexión perfectamente conductores o las porciones de hilos de conducción unidos al nodo, como parte de este mismo. Observe también que todo elemento tiene un nodo en cada uno de sus extremos.

PRECAUCIÓN

Suponga que se parte del nodo de una red y se mueve a través de un elemento simple hacia el nodo del otro extremo. Se continúa luego desde ese nodo a través de un elemento diferente hasta el siguiente, y se prosigue con este movimiento hasta que se haya pasado por tantos elementos como se desee. Si se encontró un nodo más de una vez, entonces el conjunto de nodos y elementos a través de los cuales se pasó se define como una ***trayectoria***. Si el nodo en el cual se empezó es el mismo que con el que se finalizó, entonces la trayectoria es, por definición, una trayectoria cerrada o ***lazo***.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 3.1 (*a*) Circuito que contiene tres nodos y cinco ramas. (*b*) El nodo 1 se vuelve a dibujar para considerarlo como dos nodos, aunque sigue siendo uno.

Por ejemplo, en la figura 3.1*a*, si al moverse a partir del nodo 2 por la fuente de corriente hacia el 1, y luego se atraviesa la resistencia superior derecha hacia el nodo 3, se establece una trayectoria. Esto es debido a que no se ha continuado de nuevo hacia el nodo 2, completando así un lazo. Si se procede desde el nodo 2 a través de la fuente de corriente hacia el 1, se atraviesa la resistencia izquierda hacia el 2, y después se sube otra vez por la resistencia central hacia el nodo 1, no se está teniendo una trayectoria, ya que se encontró más de una vez un nodo (en realidad dos nodos); tampoco tiene un lazo, puesto que éste debe ser una trayectoria.

Otro término cuyo uso probará su conveniencia es el de ***rama***, a la cual se define como una trayectoria única en una red, compuesta por un elemento simple y el nodo en cada extremo de ese elemento. Por lo tanto, una trayectoria es una colección particular de ramas. El circuito de la figura 3.1*a* y *b* contiene cinco ramas.

3.2 LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF

Ahora cuenta con elementos suficientes para analizar la primera de las dos leyes con las que se honra el nombre de Gustav Robert Kirchhoff (dos *h* y dos *f*), profesor universitario alemán que nació en la época en que Ohm efectuaba su trabajo experimental. Esta ley axiomática se denomina ley de Kirchhoff de corriente (abreviada LKC), la cual establece simplemente que:

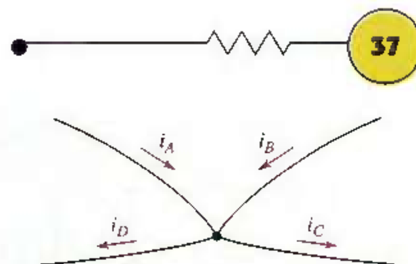
La suma algebraica de las corrientes que entran a cualquier nodo es cero.

Esta ley representa un enunciado matemático del hecho de que la carga no se acumula en un nodo. *Un nodo no es un elemento de circuito,* y ciertamente no puede almacenar, destruir o generar carga. En consecuencia, las corrientes deben sumar cero. En ocasiones resulta útil una analogía hidráulica para aclarar este caso: por ejemplo, considerar tres tuberías de agua unidas en la forma de una Y. Se definen tres "corrientes" que fluyen *hacia* cada una de las tres tuberías. Si se insiste en que el agua siempre fluye, entonces resulta evidente que no se pueden tener tres corrientes de agua positivas, o las tuberías explotarían. Lo anterior constituye un resultado de las corrientes definidas como independientes de la di-

rección en la cual en realidad fluye el agua. Por lo tanto, por definición, el valor de una o dos corrientes debe ser negativo.

Considere el nodo de la figura 3.2. La suma algebraica de las cuatro corrientes que entran al nodo debe ser cero:

$$i_A + i_B + (-i_C) + (-i_D) = 0$$



■ **FIGURA 3.2** Ejemplo de un nodo para ilustrar la aplicación de la ley de Kirchhoff de corriente.

Es obvio que la ley podría aplicarse de igual forma a la suma algebraica de las corrientes que *abandonan* el nodo:

$$(-i_A) + (-i_B) + i_C + i_D = 0$$

Quizá se desee igualar la suma de las corrientes que tienen flechas de referencia dirigidas hacia el nodo, con la suma de las dirigidas hacia afuera del mismo:

$$i_A + i_B = i_C + i_D$$

lo que establece de manera simple que la suma de las corrientes que entran es igual a la suma de las corrientes que salen.

Una expresión compacta de la ley de Kirchhoff de corriente es:

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0 \qquad [1]$$

que es justo un enunciado breve de:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N = 0 \qquad [2]$$

Cuando se emplea la ecuación [1] o la [2], se entiende que las N flechas de corriente se dirigen hacia el nodo en cuestión, o se alejan de él.

EJEMPLO 3.1

En el circuito de la figura 3.3*a*, calcular la corriente a través del resistor R_3 si se sabe que la fuente de tensión suministra una corriente de 3 A.

Identificar el objetivo del problema.
La corriente que circula por el resistor R_3 ya se marcó como i sobre el diagrama de circuito.

Recopilar la información conocida.
La corriente fluye desde el nodo superior de R_3, que se conecta a las otras tres ramas. Las corrientes que fluyen hacia el nodo a partir de cada rama se sumarán para formar la corriente i.

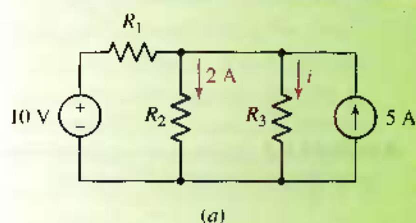
Elaborar un plan.
Empezar marcando la corriente que pasa por R_1 (fig. 3.3*b*), de manera que pueda escribirse una ecuación LKC en el nodo superior de los resistores R_2 y R_3.

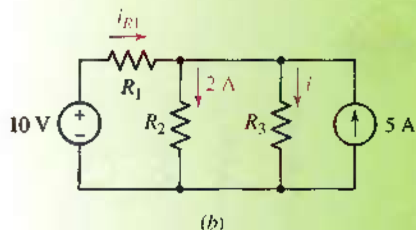
Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.
Sumar las corrientes que circulan hacia el nodo:

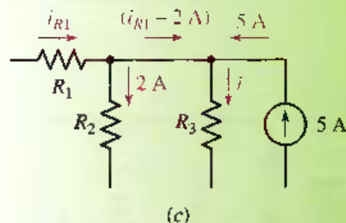
$$i_{R_1} - 2 - i + 5 = 0$$

Para mayor claridad, las corrientes que fluyen hacia este nodo se muestran en el esquema del circuito ampliado de la figura 3.3*c*.

(Continúa en la siguiente página)







■ **FIGURA 3.3** (*a*) Circuito simple en el que se desea que fluya la corriente a través de la resistencia R_3. (*b*) La corriente que circula por la resistencia R_1 se indica de manera que la ecuación de la LCK pueda escribirse. (*c*) Las corrientes en el nodo superior de R_3 se vuelven a dibujar por claridad.

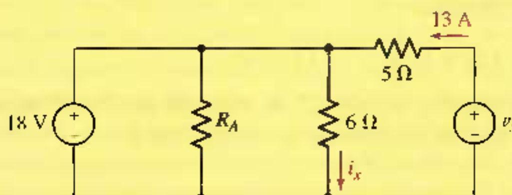
▶ ***Determinar si se requiere información adicional.***
Observar que tiene una ecuación pero dos incógnitas, lo que significa que se necesita obtener una ecuación adicional. En este punto, se vuelve útil el hecho de que sepa que la fuente de 10 V suministra 3 A: la LKC muestra que ésta es también la corriente i_{R_1}.

▶ ***Buscar la solución.***
Sustituyendo, se tiene que $i = 3 - 2 + 5 = 6$ A.

▶ ***Verificar la solución. ¿Es razonable o es la esperada?***
Siempre vale la pena el esfuerzo de verificar una vez más la solución. Además, puede hacerse el intento de evaluar si al menos la magnitud de la solución es razonable. En este caso, tiene dos fuentes: una suministra 5 A y la otra, 3 A. No hay otras fuentes, independientes o dependientes. Por consiguiente, no se debe esperar encontrar ninguna corriente en el circuito mayor que 8 A.

PRÁCTICA

3.1 Contar el número de ramas y nodos que hay en el circuito de la figura 3.4. Si $i_x = 3$ y la fuente de 18 V entrega 8 A de corriente, ¿cuál es el valor de R_A? (Sugerencia: necesita de la ley de Ohm, así como de la LCK).



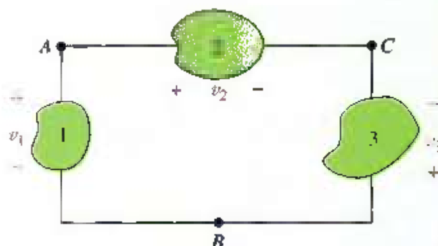
■ **FIGURA 3.4**

Respuesta: 5 ramas, 3 nodos, 1Ω.

3.3 LEY DE TENSIÓN DE KIRCHHOFF

La corriente se relaciona con la carga que fluye *por* un elemento de circuito, en tanto que la tensión constituye una medida de la diferencia de energía potencial *entre* los extremos del elemento. En la teoría de circuitos, la tensión sólo tiene un valor único. Por lo tanto, en un circuito, la energía necesaria para mover una carga unitaria desde el punto *A* hasta el punto *B* debe tener un valor independiente de la trayectoria seguida de *A* a *B* (a menudo existe más de una trayectoria). Este hecho se puede comprobar por medio de la ley de Kirchhoff de tensión (abreviada **LVK**):

La suma algebraica de las tensiones alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero.



■ **FIGURA 3.5** La diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B* es independiente de la trayectoria elegida.

En la figura 3.5, si se lleva una carga de 1 C de *A* a *B* a través del elemento 1, los signos de polaridad de referencia de v_1 muestran que se utilizaron v_1 joules de trabajo.[1] Observar que se eligió una carga de 1 C por conveniencia numérica: por lo tanto, se efectúa. Ahora bien, si, en vez de eso, se elige proceder de *A* a *B*

(1) Observar que se eligió una carga de 1 C por conveniencia numérica; por lo tanto, se efectúa $(1\text{ C})(v_1\text{ J/C}) = v_1$ joules de trabajo.

por el nodo C, entonces consumirá $v_2 - v_3$ joules de energía. El trabajo realizado, sin embargo, es independiente de la trayectoria en un circuito, por lo cual los valores deben ser iguales. Cualquier ruta debe conducir al mismo valor de la tensión. En otras palabras,

$$v_1 = v_2 - v_3 \qquad [3]$$

Resulta que si traza una trayectoria cerrada, la suma algebraica de las tensiones en los elementos individuales, a lo largo de ella, debe ser nula. Así, se podría escribir:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N = 0$$

o de manera más compacta,

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = 0 \qquad [4]$$

Se puede aplicar la LKT a un circuito de varias maneras diferentes. Un método que propicia menos errores de escritura de ecuaciones, en comparación con otros, consiste en moverse mentalmente alrededor de la trayectoria cerrada en la dirección de las manecillas de reloj y escribir de manera directa la tensión de cada elemento a cuya terminal (+) se entra, y después expresar el negativo de cada tensión que se encuentre primero en el signo (−). Aplicando lo anterior al lazo sencillo de la figura 3.5, se tiene

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

lo cual concuerda con el resultado previo, ecuación [3].

EJEMPLO 3.2

En el circuito de la figura 3.6, determinar v_x e i_x.

Se conoce la tensión en dos de los tres elementos del circuito. De tal modo, la LKT se aplica de inmediato para obtener v_x.

Empezando con el nodo superior de la fuente de 5 V, se aplica la LVK en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del lazo:

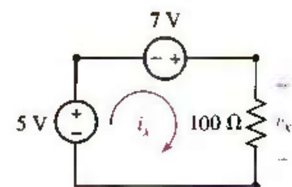
$$-5 - 7 + v_x = 0$$

por lo que $v_x = 12$ V.

La LVK se aplica a este circuito, pero sólo dice que la misma corriente (i_x) fluye a través de los tres elementos. Sin embargo, se conoce la tensión en la resistencia de 100 Ω.

Se puede recurrir a la ley de Ohm,

$$i_x = \frac{v_x}{100} = \frac{12}{100} \text{ A} = 120 \text{ mA}$$

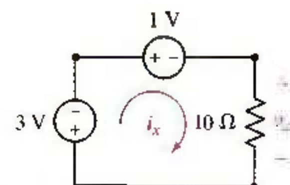


■ **FIGURA 3.6** Circuito simple con dos fuentes de tensión y una sola resistencia.

PRÁCTICA

3.2 Determinar i_x y v_x en el circuito de la figura 3.7.

Respuesta: $v_x = -4$ V; $i_x = -400$ mA.



■ **FIGURA 3.7**

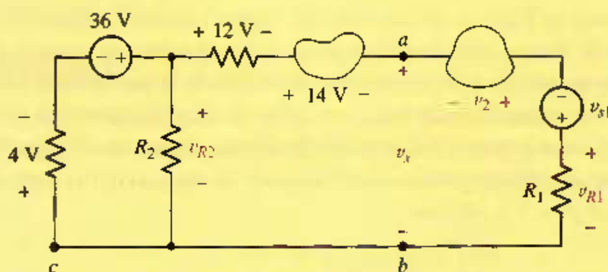
EJEMPLO 3.3

En el circuito de la figura 3.8 hay ocho elementos de circuito; las tensiones con pares más-menos se muestran en los extremos de cada elemento. Calcular v_{R2} (la tensión en R_2) y la tensión marcada v_x.

El mejor método para determinar v_{R2} en esta situación consiste en considerar un lazo en el que sea posible aplicar la LVK. Existen varias opciones, pero después de observar con cuidado el circuito se descubre que el lazo que está más hacia la izquierda ofrece una ruta directa, ya que dos tensiones se especifican con claridad. Por lo tanto, puede encontrar v_{R2} si escribe una ecuación LVK en torno al lazo de la izquierda, empezando en el punto c:

$$4 - 36 + v_{R2} = 0$$

lo que produce $v_{R2} = 32$ V.



■ **FIGURA 3.8** Circuito con ocho elementos en el que se quiere determinar v_{R2} y v_x.

Para determinar v_x, podría considerársele como la suma (algebraica) de las tensiones de los tres elementos de la derecha. Sin embargo, puesto que no hay valores para estas cantidades, tal procedimiento no suministraría una respuesta numérica. En vez de eso, se debe aplicar la LVK empezando en el punto c, moverse hacia arriba y a través de la parte superior hasta a, a través de v_x hasta b, y por el hilo de conducción hasta el punto de inicio teniendo así:

Los puntos b y c, así como el cable entre ellos, son parte del mismo nodo.

$$+4 - 36 + 12 + 14 + v_x = 0$$

por lo que

$$v_x = 6 \text{ V}$$

Procedimiento alterno: conociendo v_{R2} se podría haber tomado el camino corto a través de R_2:

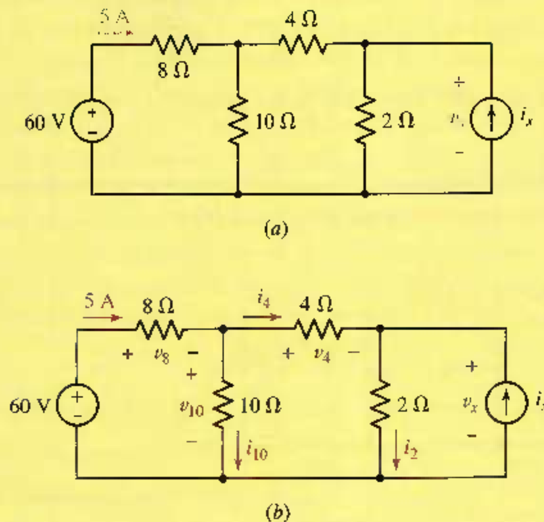
$$-32 + 12 + 14 + v_x = 0$$

con lo cual se obtendría $v_x = 6$ V también en este caso.

Como se puede ver justamente, la clave para analizar de manera correcta un circuito consiste en marcar primero de manera metódica todas las tensiones y las corrientes sobre el esquema del circuito. De este modo, la escritura cuidadosa de las ecuaciones LCK o LVK proporcionaría relaciones correctas y la ley de Ohm se aplicaría como se requiriese, si se obtienen al principio más incógnitas que ecuaciones. Se ilustran estos principios con un ejemplo más detallado.

EJEMPLO 3.4

Determinar v_x en el circuito de la figura 3.9*a*.



■ **FIGURA 3.9** (*a*) Circuito para el que se va a determinar v_x mediante LVK. (*b*) Circuito con tensiones y corrientes señaladas.

Se debe empezar marcando (señalando) las tensiones y las corrientes en el resto de los elementos de circuito (fig. 3.9*b*). Observe que v_x aparece entre los extremos del resistor de 2 Ω y la fuente i_x también.

Si se obtiene la corriente que circula por el resistor de 2 Ω con la ley de Ohm se calculará v_x. Al escribir la ecuación apropiada de la LCK, se ve que:

$$i_2 = i_4 + i_x$$

Desafortunadamente, no se tienen los valores de ninguna de estas tres cantidades. Por lo tanto, la solución se ha atascado (de manera temporal).

Puesto que se conoce el flujo de corriente de la fuente de 60 V, es más conveniente trabajar con ese lado del circuito. Podría obtenerse v_x mediante i_2, de manera directa de la LVK, en lugar de basarse en el conocimiento de v_x. Desde esta perspectiva, se pueden escribir las ecuaciones LVK siguientes:

$$-60 + v_8 + v_{10} = 0$$

y

$$-v_{10} + v_4 + v_x = 0 \qquad [5]$$

Esto ya es un avance. Ahora se cuenta con dos ecuaciones con cuatro incógnitas, lo cual significa una ligera mejora que contar con una ecuación en la que *todos* los términos son incógnitas. En realidad, se sabe que $v_8 = 40$ V por medio de la ley de Ohm, ya que se dijo que 5 A fluyen a través de una resistencia de 8 Ω. Por lo tanto, $v_{10} = 0 + 60 - 40 = 20$ V, de tal forma que la ecuación [5] se reduce a

$$v_x = 20 - v_4$$

Si se pudiera determinar v_4, se resolvería el problema.

(Continúa en la siguiente página)

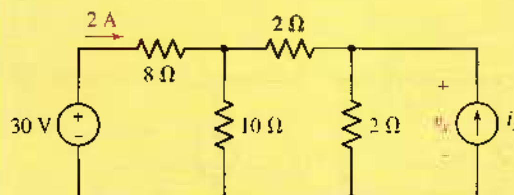
La mejor forma de encontrar el valor numérico de la tensión v_4 en este caso es utilizar la ley de Ohm, la cual requiere contar con un valor para i_4. A partir de LCK, se puede ver que

$$i_4 = 5 - i_{10} = 5 - \frac{v_{10}}{10} = 5 - \frac{20}{10} = 3$$

de tal forma que $v_4 = (4)(3) = 12$ V y, por lo tanto, $v_x = 20 - 12 = 8$ V.

PRÁCTICA

3.3 Determine v_x en el circuito de la figura 3.10.



■ **FIGURA 3.10**

Respuesta: $v_x = 12.8$ V.

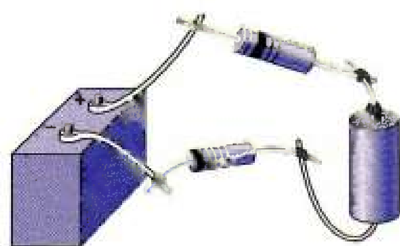
3.4 EL CIRCUITO DE UN SOLO LAZO

Se ha podido observar que el uso repetido de LCK y LVK en conjunto con la ley de Ohm puede aplicarse a circuitos no triviales que cuenten con varios lazos y un determinado número de elementos. Antes de avanzar más, éste es un buen momento para enfocar la atención en el concepto de circuitos en serie (y, en la sección siguiente, paralelo), ya que ambos formarán la base de cualquier red que se presente en el futuro.

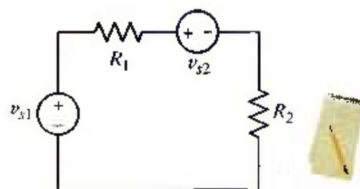
Se dice que todos los elementos del circuito que conducen la misma corriente están conectados en ***serie***. Como ejemplo, considere el circuito de la figura 3.9. La fuente de 60 V está en serie con la resistencia de 8 Ω por ambos circula la misma corriente de 5 A. Sin embargo, la resistencia de 8 Ω no está en serie con la de 4 Ω; por ambas circulan corrientes diferentes. Observe que los elementos pueden conducir corrientes iguales y no estar en serie; dos focos de luz eléctrica de 100 W en casas vecinas quizás conduzcan perfectamente corrientes iguales, pero realmente no conducen la misma corriente y *no* están en serie.

La figura 3.11*a* muestra un circuito simple que consiste en dos baterías y dos resistencias. Se supone que cada terminal, hilo de conexión y soldadura tiene resistencia cero; juntos constituyen un nodo individual del esquema de circuitos de la figura 3.11*b*. Ambas baterías están modeladas por fuentes de tensión ideales; se supone que cualquier resistencia interna que puedan tener es lo suficientemente pequeña como para que pueda despreciarse. Se supone que las dos resistencias son reemplazables por resistencias ideales (lineales).

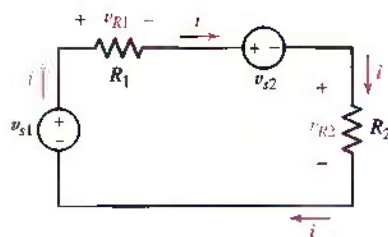
Se trata de encontrar la corriente *a través* de cada elemento, la tensión *en* cada elemento y la potencia que *absorbe* cada elemento. El primer paso del análisis es el supuesto de las direcciones de referencia de las corrientes desconocidas. De manera arbitraria se elige la corriente *i* en el sentido de las manecillas del reloj que sale de la terminal superior de la fuente de tensión a la izquierda. Tal elección se indica mediante una flecha marcada *i* en ese punto del circuito, como se muestra en la figura 3.11*c*. Una aplicación trivial de la ley de Kirchhoff de



(*a*)



(*b*)



(*c*)

■ **FIGURA 3.11** (*a*) Circuito de un solo lazo con cuatro elementos. (*b*) Modelo del circuito con tensiones de fuente y valores de resistencia dados. (*c*) Tienen que agregarse al circuito los signos de referencia de la corriente y de la tensión.

corriente asegura que esta misma corriente debe circular también por cada uno de los demás elementos del circuito; se debe destacar este hecho colocando esta vez varios símbolos de corriente alrededor del circuito.

El segundo paso del análisis consiste en elegir la tensión de referencia para cada una de las dos resistencias. La convención de signos pasiva requiere que las variables de corriente y tensión de la resistencia se definan de manera que la corriente entre a la terminal en la cual se localiza la referencia de tensión positiva v_{R1} y v_{R2}. Puesto que ya se ha elegido (de manera arbitraria) la dirección de la corriente, y se definen como en la figura 3.11*c*.

El tercer paso es aplicar la ley de Kirchhoff de tensión a la única trayectoria cerrada. Es necesario moverse alrededor del circuito en la dirección de las manecillas del reloj, empezar en la esquina inferior izquierda y escribir de manera directa cada tensión que se encuentre primero en su referencia positiva, y expresar el negativo de cada tensión que se encuentre en la terminal negativa. Por lo tanto,

$$-v_{s1} + v_{R1} + v_{s2} + v_{R2} = 0 \qquad [6]$$

Después se aplica la ley de Ohm a los elementos resistivos:

$$v_{R1} = R_1 i \qquad \text{y} \qquad v_{R2} = R_2 i$$

La sustitución en la ecuación [6] produce:

$$-v_{s1} + R_1 i + v_{s2} + R_2 i = 0$$

Puesto que i es la única incógnita, se determina que:

$$i = \frac{v_{s1} - v_{s2}}{R_1 + R_2}$$

La tensión o la potencia asociada con cualquier elemento tal vez se obtenga ahora mediante la aplicación de $v = Ri$, $p = vi$ o $p = i^2 R$.

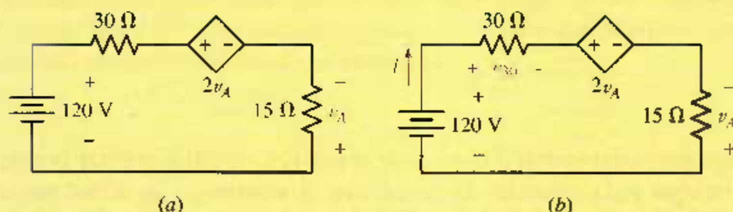
PRÁCTICA

3.4 En el circuito de la figura 3.11*b*, $v_{s1} = 120$ V, $v_{s2} = 30$ V, $R_1 = 30\ \Omega$, y $R_2 = 15\ \Omega$. Calcular la potencia que absorbe cada elemento.

Respuesta: $p_{120V} = -240$ W; $p_{30V} = +60$ W; $p_{30\Omega} = 120$ W; $p_{15\Omega} = 60$ W.

EJEMPLO 3.5

Calcular la potencia que absorbe cada elemento del circuito que se presenta en la figura 3.12*a*.



■ **FIGURA 3.12** (*a*) Circuito de un solo lazo que contiene una fuente dependiente. (*b*) Se asignan la corriente i y la tensión v_{30}.

(Continúa en la siguiente página)

Primero se asigna una dirección de referencia a la corriente i y una polaridad de referencia a la tensión v_{30} como se indica en la figura 3.12*b*. No es necesario asignar una tensión a la resistencia de 15 Ω puesto que la tensión de control v_A de la fuente dependiente ya está disponible. (Sin embargo, vale la pena señalar que los signos de referencia de v_A están invertidos respecto a los que se habrían asignado, con base en la convención de signos pasiva.)

Este circuito contiene una fuente de tensión dependiente, cuyo valor permanece desconocido hasta que se determine v_A. No obstante, se utiliza su valor algebraico $2v_A$ del mismo modo como si se dispusiera de un valor numérico. En consecuencia, al aplicar la LVK alrededor del lazo:

$$-120 + v_{30} + 2v_A - v_A = 0 \qquad [7]$$

Utilizando la ley de Ohm para introducir los valores de resistencia conocidos:

$$v_{30} = 30i \quad \text{y} \quad v_A = -15i$$

Observe que se requiere el signo negativo, puesto que i fluye hacia la terminal negativa de v_A.

La sustitución en la ecuación [7] produce:

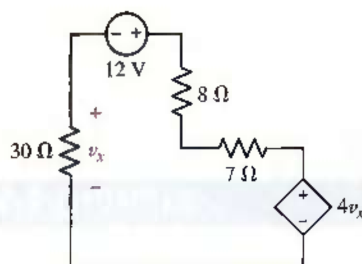
$$-120 + 30i - 30i + 15i = 0$$

y por ello se determina que:

$$i = 8 \text{ A}$$

Al calcular la potencia *absorbida* por cada elemento:

$$p_{120\text{V}} = (120)(-8) = -960 \text{ W}$$
$$p_{30\Omega} = (8)^2(30) \quad = 1\,920 \text{ W}$$
$$p_{\text{dep}} = (2v_A)(8) \quad = 2[(-15)(8)](8)$$
$$= -\,1\,920 \text{ W}$$
$$p_{15\Omega} = (8)^2(15) \quad = 960 \text{ W}$$



■ **FIGURA 3.13** Circuito de un solo lazo.

PRÁCTICA

3.5 En el circuito de la figura 3.13, encontrar la potencia absorbida por cada uno de los cinco elementos del circuito.

Respuesta: (En el sentido de las manecillas del reloj desde la izquierda) 0.768 W; 1.92 W; 0.2048 W; 0.1792 W; −3.072 W.

En el ejemplo anterior y el problema de la práctica, se pidió calcular la potencia absorbida por cada elemento de un circuito. Sin embargo, es difícil pensar en una situación en la que todas las cantidades de potencia absorbidas por un circuito sean positivas, por la sencilla razón de que la energía debe provenir de algún lugar. Por lo tanto, a partir de la conservación de la energía, es de esperar que ***la suma de la potencia absorbida por cada elemento de un circuito sea cero.*** En otras palabras, al menos una de las cantidades debe ser negativa (despreciando

el obvio caso en el que el circuito no esté en operación). Dicho de otra forma, ***la suma de la potencia absorbida por cada elemento debe ser igual a cero***. De manera más práctica, la suma de la potencia absorbida es igual a la suma de la potencia suministrada, lo que parece lógico de acuerdo al valor.

Lo anterior puede probarse con el circuito de la figura 3.12 del ejemplo 3.5, que consiste en dos fuentes (una dependiente y la otra independiente) y dos resistencias. Si se suma la potencia absorbida por cada elemento, se tiene

$$\sum_{\text{todos los elementos}} p_{\text{absorbida}} = -960 + 1\,920 - 1\,920 + 960 = 0$$

En realidad (la indicación en el esquema del circuito es la del signo asociado con la potencia absorbida) la fuente de 120 V *suministra* +960 W, y la fuente dependiente +1 920 W. Por lo tanto, las fuentes suministran un total de 960 + 1 920 =2 880 W. Se espera que las resistencias absorban potencia positiva, que en este caso se adiciona a un total de 1 920 + 960 =2 880 W. Por ende, si tomamos en cuenta cada elemento del circuito,

$$\sum p_{\text{absorbida}} = \sum p_{\text{suministrada}}$$

como se esperaba.

Si se enfoca en el problema de práctica 3.5, la solución con la que querrá comparar, se observa claramente que las potencias absorbidas suman $0.768 + 1.92 + 0.2048 + 0.1792 - 3.072 = 0$. Resulta interesante saber que la fuente de tensión independiente de 12 V absorbe +1.92 W, lo que significa que está *disipando* potencia y no suministrándola. En su lugar, la fuente de tensión dependiente aparenta estar suministrando toda la potencia en este circuito en particular. ¿Es factible esta situación? En general, sería de esperar que una fuente suministrara potencia positiva; sin embargo, puesto que los circuitos emplean fuentes ideales, es factible tener un flujo de potencia neto en cualquier fuente. Si se modifica el circuito de alguna forma, se podrá ver que la misma fuente suministrará la potencia positiva. No se conocerá el resultado hasta que se haya llevado a cabo el análisis de circuitos.

3.5 EL CIRCUITO DE UN PAR DE NODOS

El compañero de un circuito de un solo lazo que se analizó en la sección 3.4 es el circuito de un par de nodos, en el que cualquier número de elementos simples se conectan entre el mismo par de nodos. Un ejemplo de este tipo de circuito se ilustra en la figura 3.14*a*. Se conocen las dos fuentes de corriente y los valores de resistencia. Primero, suponga una tensión en cualquier elemento y asígnele una polaridad de referencia arbitraria. La LKT obliga a reconocer que la tensión en los extremos en cada rama es la misma que la de los extremos de cualquier otra. *Se dice que los elementos de un circuito que tienen una tensión común entre sus extremos están conectados en* ***paralelo***.

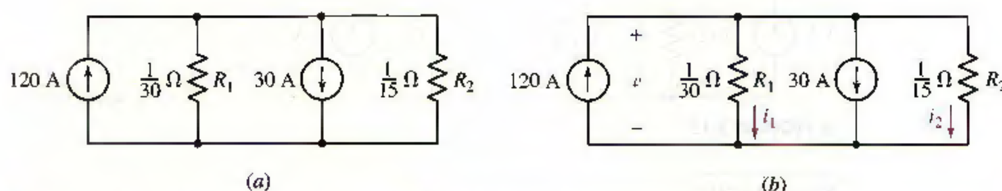


FIGURA 3.14 (*a*) Circuito de un solo par de nodos. (*b*) Se asignan una tensión y dos corrientes.

EJEMPLO 3.6

Determinar la tensión, la corriente y la potencia asociadas con cada elemento del circuito de la figura 3.14*a*.

Primero se define una tensión v y se elige de manera arbitraria su polaridad, como se muestra en la figura 3.14*b*. Dos corrientes, que fluyen en las resistencias, se escogen conforme a la convención de signos pasiva; tales corrientes se indican también en la figura 3.14*b*.

Determinar cualquier corriente i_1 o i_2 permite obtener un valor de v. De este modo, el siguiente paso es aplicar la LKC a cualquiera de los dos nodos del circuito. Igualando a cero la suma algebraica de las corrientes que abandonan el nodo superior, se tiene:

$$-120 + i_1 + 30 + i_2 = 0$$

Al escribir ambas corrientes en términos de la tensión v mediante la ley de Ohm,

$$i_1 = 30v \quad \text{e} \quad i_2 = 15v$$

se obtiene:

$$-120 + 30v + 30 + 15v = 0$$

Cuando se despeja v de esta ecuación, se tiene como resultado,

$$v = 2\ \text{V}$$

Y al recurrir a la ley de Ohm se obtiene:

$$i_1 = 60\ \text{A} \quad \text{e} \quad i_2 = 30\ \text{A}$$

Ahora puede calcularse la potencia absorbida por cada elemento. En las dos resistencias:

$$p_{R1} = 30(2)^2 = 120\ \text{W} \quad \text{y} \quad p_{R2} = 15(2)^2 = 60\ \text{W}$$

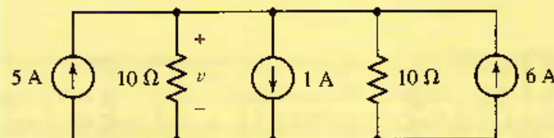
y para las dos fuentes:

$$p_{120\text{A}} = 120(-2) = -240\ \text{W} \quad \text{y} \quad p_{30\text{A}} = 30(2) = 60\ \text{W}$$

En razón de que la fuente de 120 A absorbe 240 W negativos, en realidad ésta *suministra* potencia a los otros elementos del circuito. De manera similar, se encuentra que la fuente de 30 A en realidad *absorbe* potencia, en vez de *suministrarla*.

PRÁCTICA

3.6 Determinar v en el circuito de la figura 3.15.

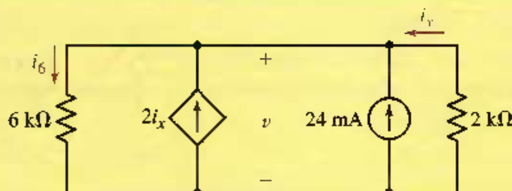


■ **FIGURA 3.15**

Respuesta: 50 V.

EJEMPLO 3.7

Determinar el valor de v y la potencia suministrada por la fuente de corriente independiente de la figura 3.16.



■ **FIGURA 3.16** Se asignan una tensión v y una corriente i_6 circuito de un solo par de nodos que contiene una fuente dependiente.

Mediante la LCK, la suma de las corrientes que salen del nodo superior debe ser cero, por lo que:

$$i_6 - 2i_x - 0.024 - i_x = 0$$

De nuevo, observe que el valor de la fuente dependiente ($2i_x$) se trata como si fuese cualquier otra corriente, aun cuando no se conoce su valor exacto hasta que el circuito haya sido analizado.

A continuación se aplica la ley de Ohm a cada resistencia:

$$i_6 = \frac{v}{6\,000} \quad \text{e} \quad i_x = \frac{-v}{2\,000}$$

Por lo tanto,

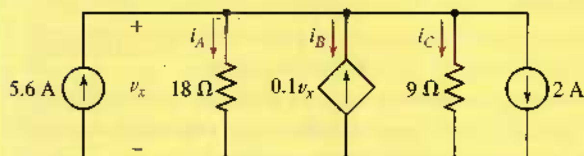
$$\frac{v}{6\,000} - 2\left(\frac{-v}{2\,000}\right) - 0.024 - \left(\frac{-v}{2\,000}\right) = 0$$

y por ello $v = (600)(0.024) = 14.4$ V.

Cualquier otra información que se quiera determinar para este circuito se obtiene ahora con facilidad, por lo general en un solo paso. Por ejemplo, la potencia suministrada por la fuente independiente es $p_{24} = 14.4(0.024) = 0.3456$ W (345.6 mW).

PRÁCTICA

3.7 En el circuito de un solo par de nodos de la figura 3.17, determinar i_A, i_B e i_C.

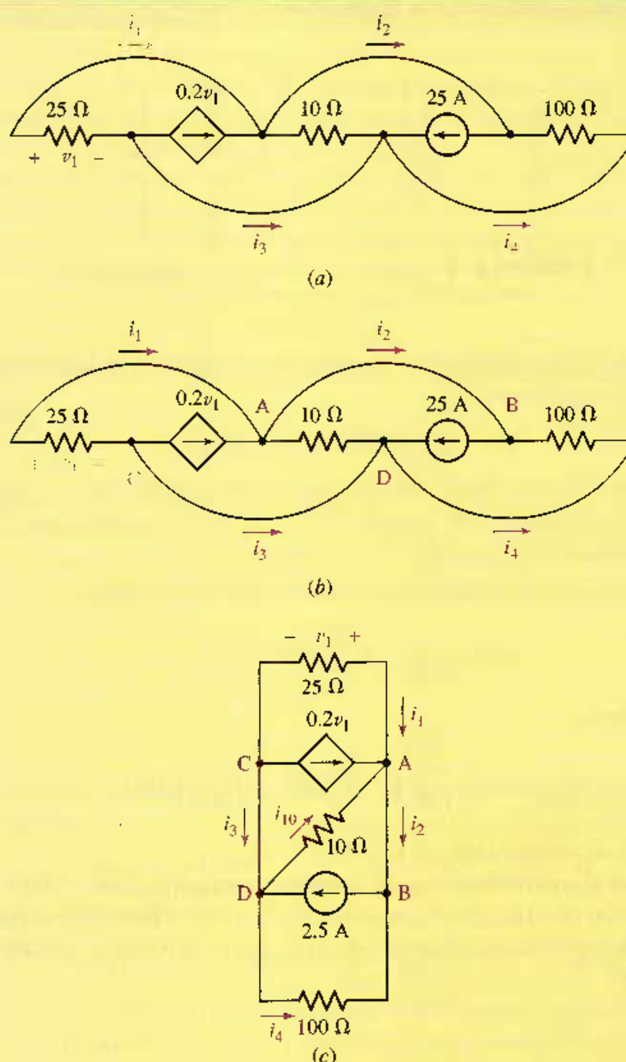


■ **FIGURA 3.17**

Respuesta: 3 A; –5.4 A; 6 A.

EJEMPLO 3.8

En el circuito de la figura 3.18*a*, encontrar i_1, i_2, i_3 e i_4.



■ **FIGURA 3.18** (*a*) Circuito de un solo par de nodos. (*b*) Circuito con los puntos marcados como auxiliares. (*c*) Circuito dibujado nuevamente.

De acuerdo con la ilustración, este circuito es un poco difícil de analizar, por lo que, primero, es necesario volverlo a dibujar, después de marcar los puntos *A*, *B*, *C* y *D* como en la figura 3.18*b* y por último en la 3.18*c*. También se debe definir una corriente i_{10} que circula por la resistencia de 10 Ω para anticiparse al uso de la ley de Kirchhoff de corriente.

Ninguna de las corrientes que se desean resulta evidente de inmediato a partir del esquema del circuito, por lo que será necesario obtenerlas a partir de la ley de Ohm. Cada uno de las tres resistencias tiene la misma tensión (v_1) entre sus extremos, así que, simplemente, se deben sumar las corrientes que fluyen hacia el nodo más a la derecha:

$$-\frac{v_1}{100} - 2.5 - \frac{v_1}{10} + 0.2\, v_1 - \frac{v_1}{25} = 0$$

Despejando, se encuentra que $v_1 = 250/5 = 50$ V.

Al observar la parte inferior del circuito, se ve que

$$i_4 = \frac{-v_1}{100} = -\frac{50}{100} = -0.5 \text{ A}$$

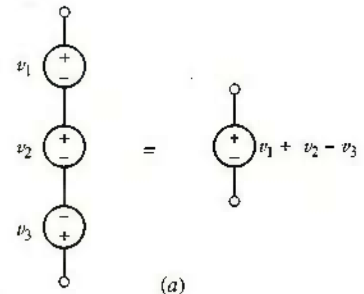
De un modo similar, se determina que $i_1 = -2$ A e $i_{10} = -5$ A. Las dos corrientes restantes, i_2 e i_3 se determinan con la LCK para sumar de manera independiente las corrientes conocidas en los nodos del lado derecho y del lado izquierdo.

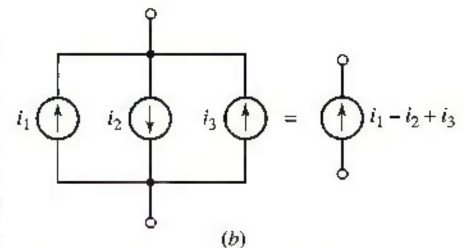
Por lo tanto

$$i_2 = i_1 + 0.2v_1 + i_{10} = -2 + 10 - 5 = 3 \text{ A}$$

e

$$i_3 = i_{10} - 2.5 + i_4 = -5 - 2.5 - 0.5 = -8 \text{ A}$$





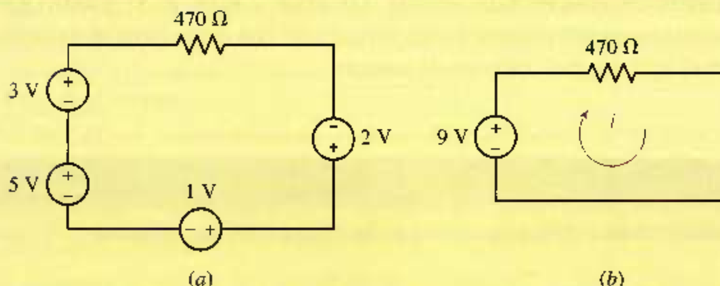
■ **FIGURA 3.19** (*a*) Las fuentes de tensión conectadas en serie se sustituyen por una sola fuente. (*b*) Las fuentes de corriente en paralelo se sustituyen por una sola fuente.

3.6 FUENTES INDEPENDIENTES CONECTADAS EN SERIE Y EN PARALELO

Ocurre que algunas de las ecuaciones obtenidas para los circuitos en serie y en paralelo se evitan si se combinan las fuentes. Sin embargo, observe que la totalidad de las relaciones de corriente, tensión y potencia en el resto del circuito permanecen invariables. Por ejemplo, varias fuentes de tensión en serie tal vez sean sustituidas por una fuente de tensión equivalente que tenga una tensión igual a la suma algebraica de las fuentes individuales (fig. 3.19*a*). También se podrían combinar las fuentes de corriente en paralelo mediante la suma algebraica de las corrientes individuales; además, el orden de los elementos en paralelo quizá se vuelva a arreglar como se desee (fig. 3.19*b*).

EJEMPLO 3.9

Determinar la corriente que circula a través de la resistencia de 470 Ω de la figura 3.20*a* combinando primero las cuatro fuentes en una sola fuente de tensión.



■ **FIGURA 3.20** (*a*) Circuito de un solo lazo que cuenta con cuatro fuentes de tensión en serie. (*b*) Circuito equivalente.

Hay cuatro fuentes de tensión conectadas en serie. Es necesario reemplazarlas por una sola fuente de tensión que tenga su terminal de referencia "+" en la parte superior. Para ello, se debe comenzar en la terminal de referencia "+" de la fuente de 3 V y se escribe:

$$+3 + 5 - 1 + 2 = 9 \text{ V}$$

(Continúa en la siguiente página)

El circuito equivalente se muestra en la figura 3.20*b*. Ahora se calcula el valor de *i* a partir de la ley de Ohm:

$$i = \frac{9}{470} = 19.15 \text{ mA}$$

Es normal que se obtenga una ganancia muy pequeña al incluir una fuente dependiente en una combinación de fuentes de tensión o de corriente, pero no es incorrecto hacerlo de esa forma.

PRÁCTICA

3.8 Determinar v en el circuito de la figura 3.21 combinando primero las tres fuentes de corriente.

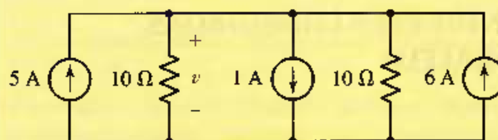


FIGURA 3.21

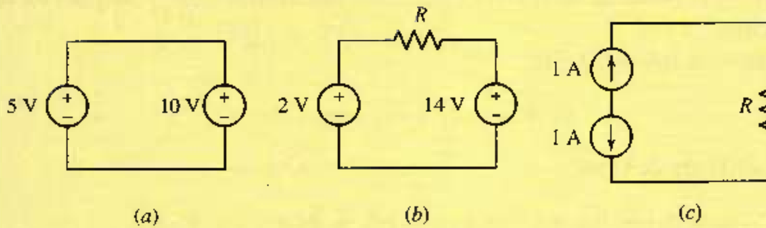
Respuesta: 50 V.

Para concluir el análisis de las combinaciones de fuentes en paralelo y en serie, se debe considerar la combinación en paralelo de dos fuentes de tensión y la combinación en serie de dos fuentes de corriente. Por ejemplo, ¿cuál es el equivalente de una fuente de 5 V en paralelo con una fuente de 10 V? De acuerdo con la definición de una fuente de tensión, no puede cambiar la tensión en la fuente; entonces, mediante la ley de Kirchhoff de tensión, 5 es igual a 10 y se ha supuesto como hipótesis una imposibilidad física. De tal modo, las fuentes de tensión *ideales* en paralelo se pueden tener sólo cuando cada una tiene la misma tensión a nivel terminal en todo instante. De modo similar, no se pueden poner dos fuentes de corriente en serie a menos que cada una tenga la misma corriente y el mismo signo, en cada instante de tiempo.

EJEMPLO 3.10

Determinar cuáles de los circuitos de la figura 3.22 son válidos.

El circuito de la figura 3.22*a* consiste en dos fuentes de tensión en paralelo. El valor de cada fuente es diferente, por lo que viola la LVK. Por ejemplo, si una resistencia se pone en paralelo con la fuente de 5 V, también está en paralelo con la fuente de 10 V. La tensión real en sus extremos es por tanto ambigua y, obviamente, no hay posibilidad de construir el circuito como se indica. Si se intenta construir un circuito de este tipo en la vida real, será imposible localizar fuentes de tensión "ideales", pues todas las fuentes del mundo real tienen una resistencia interna. La presencia de este tipo de resistencia permite una diferencia de tensión entre las dos fuentes *reales*.



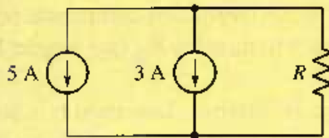
■ **FIGURA 3.22** De (*a*) a (*c*). Ejemplos de circuitos con fuentes múltiples, algunos de los cuales violan las leyes de Kirchhoff.

De acuerdo con lo anterior, el circuito de la figura 3.22*b* es perfectamente válido.

El circuito de la figura 3.22*c* viola LKC: no es claro que, realmente, la corriente fluya a través de la resistencia *R*.

PRÁCTICA

3.9 Determinar si el circuito de la figura 3.23 viola las leyes de Kirchhoff.



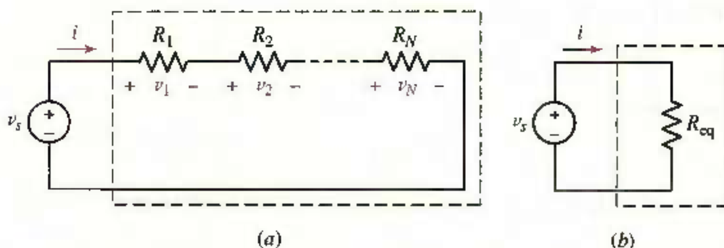
■ **FIGURA 3.23**

Respuesta: No. Sin embargo, si se quitara la resistencia, el circuito resultante sí las violaría.

3.7 RESISTENCIAS EN SERIE Y EN PARALELO

A menudo se sustituyen combinaciones de resistencias relativamente complicadas por una sola resistencia equivalente. Lo anterior resulta útil cuando no se está interesado de manera específica en la corriente, la tensión o la potencia asociadas con cualquiera de las resistencias individuales de las combinaciones. *Todas las relaciones de corriente, tensión y potencia en el resto del circuito permanecerán invariables.*

Considere la combinación en serie de *N* resistencias que se muestra en la figura 3.24*a*. Es necesario simplificar el circuito sustituyendo las *N* resistencias por una sola resistencia R_{eq} de modo que el resto del circuito, en este caso sólo la fuente de tensión, no se percate de que se ha realizado algún cambio. La corriente,



■ **FIGURA 3.24** (*a*) Combinaciones en serie de *N* resistencias. (*b*) Circuito eléctricamente equivalente.

la tensión y la potencia de la fuente deben ser las mismas antes y después de la sustitución.

Primero se aplica la LVK:

$$v_s = v_1 + v_2 + \cdots + v_N$$

y después la ley de Ohm:

$$v_s = R_1 i + R_2 i + \cdots + R_N i = (R_1 + R_2 + \cdots + R_N)i$$

Compare ahora este resultado con la ecuación simple aplicándola al circuito equivalente de la figura 3.24*b*:

$$v_s = R_{eq} i$$

Así, el valor de la resistencia equivalente de N resistencias en serie está dado por

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \quad [8]$$

En consecuencia, se puede sustituir una red de dos terminales compuesta por N resistencias en serie, por un solo elemento de dos terminales R_{eq} que tengan la misma relación v-i.

Debe subrayarse de nuevo que tal vez interese la corriente, la tensión o la potencia de uno de los elementos originales. Por ejemplo, la tensión de una fuente de tensión dependiente quizá dependa de la tensión en R_3. Después de que R_3 se combina con varias resistencias en serie para formar una resistencia equivalente, éste desaparece y su tensión no puede determinarse hasta que R_3 se identifique al separarlo de la combinación. En ese caso, sería mejor continuar adelante y no hacer que al principio R_3 forme parte de la combinación.

Otra sugerencia: la inspección de la ecuación de la LVK para un circuito en serie muestra que no hay diferencia en el orden en el que se ubiquen los elementos.

EJEMPLO 3.11

Utilizar las combinaciones de resistencia y fuente para determinar la corriente *i* de la figura 3.25*a*, así como la potencia que entrega la fuente de 80 V.

Primero se intercambian las posiciones de los elementos del circuito, para lo cual se debe tener cuidado de preservar el sentido apropiado de las fuentes, como se ilustra en la figura 3.25*b*. El siguiente paso consiste en combinar las tres fuentes de tensión en una fuente equivalente de 90 V, y las cuatro resistencias en una resistencia equivalente de 30 Ω como en la figura 3.25*c*. De tal modo, en lugar de escribir:

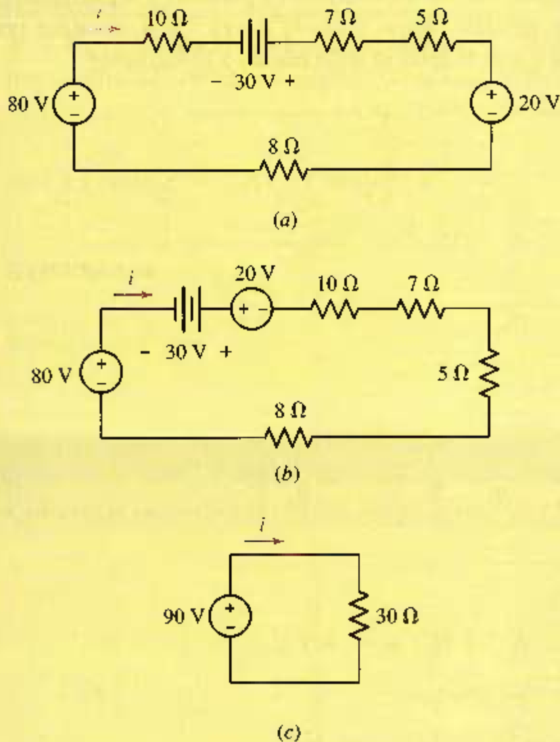
$$-80 + 10i - 30 + 7i + 5i + 20 + 8i = 0$$

simplemente se tiene

$$-90 + 30i = 0$$

y de esa manera se determina que:

$$i = 3 \text{ A}$$



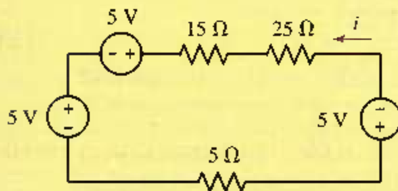
■ **FIGURA 3.25** (*a*) Circuito en serie con varias fuentes y resistencias. (*b*) Los elementos se vuelven a ordenar para lograr una mayor claridad. (*c*) Un equivalente más simple.

Para calcular la potencia que la fuente de 80 V que aparece en el circuito dado entrega al circuito, resulta necesario regresar a la figura 3.25*a* sabiendo que la corriente es igual a 3 A. En ese caso, la potencia deseada es 80 V × 3 A = 240 W.

Es interesante advertir que ningún elemento del circuito original queda en el circuito equivalente.

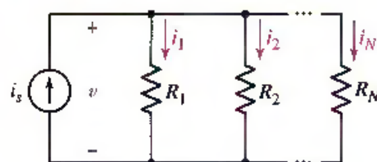
PRÁCTICA

3.10 Determinar *i* en el circuito de la figura 3.26.

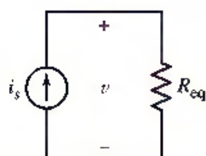


■ **FIGURA 3.26**

Respuesta: –333 mA.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 3.27 (*a*) Circuito con *N* resistencias en paralelo. (*b*) Circuito equivalente.

Se aplican simplificaciones similares a circuitos en paralelo. Un circuito que contiene *N* resistencias en paralelo, como el de la figura 3.27*a*, conduce por medio de la ecuación de la ley de Kirchhoff de corriente a lo siguiente

$$i_s = i_1 + i_2 + \cdots + i_N$$

o

$$i_s = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \cdots + \frac{v}{R_N}$$
$$= \frac{v}{R_{eq}}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}} \qquad [9]$$

que puede escribirse como,

$$R_{eq}^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} + \cdots + R_N^{-1}$$

o en términos de conductancias como,

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_N$$

El circuito simplificado (equivalente) se ilustra en la figura 3.27*b*.

Una combinación en paralelo se indica de manera rutinaria siguiendo la notación abreviada:

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 \| R_3$$

El caso especial de sólo dos resistencias en paralelo se encuentra con bastante frecuencia, y está dado por:

$$R_{eq} = R_1 \| R_2$$
$$= \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$

O, más simplemente:

$$\boxed{R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \qquad [10]$$



Vale la pena memorizar la última forma, si bien es un error común intentar generalizar la ecuación [10] para más de dos resistencias; por ejemplo:

$$R_{eq} \not\approx \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Una rápida revisión de las unidades de esta ecuación muestra de inmediato que no es posible que la expresión sea correcta.

PRÁCTICA

3.11 Determinar v en el circuito de la figura 3.28 combinando primero las tres fuentes de corriente y después las dos resistencias de 10 Ω.

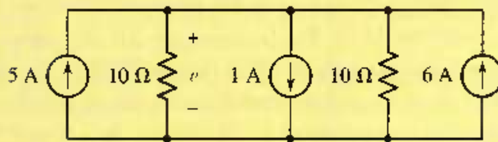
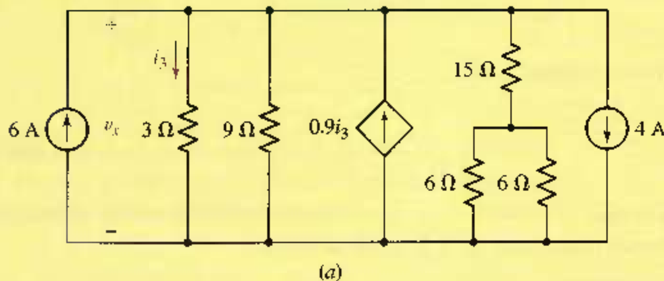


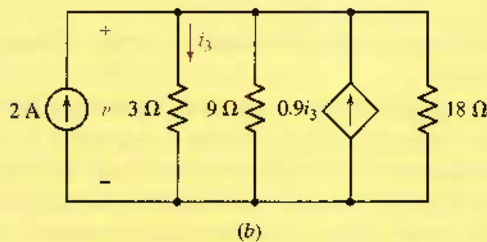
FIGURA 3.28

Respuesta: 50 V.

EJEMPLO 3.12

Calcular la potencia y la tensión de la fuente dependiente de la figura 3.29*a*.





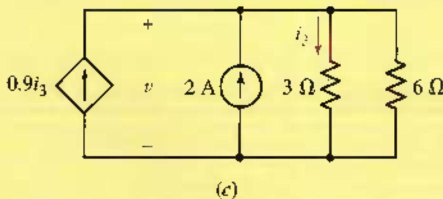


FIGURA 3.29 (*a*) Circuito multinodal. (*b*) Las dos fuentes de corriente independientes se combinan en una fuente de 2 A, y la resistencia de 15 Ω en serie con las dos resistencias de 6 Ω en paralelo se sustituyen por una sola resistencia de 18 Ω. (*c*) Circuito equivalente simplificado.

Es necesario simplificar el circuito antes de analizarlo, pero se debe tener cuidado de no incluir la fuente dependiente puesto que sus características de tensión y de potencia son de interés.

(Continúa en la página siguiente)

A pesar de no estar dibujadas juntas, las dos fuentes de corriente independientes están, en realidad, en paralelo, por lo que se las reemplaza por una fuente de 2 A.

Las dos resistencias de 6 Ω están en paralelo y pueden reemplazarse con una resistencia de 3 Ω en serie con la de 15 Ω. Por lo tanto, las dos resistencias de 6 Ω y la de 15 Ω se reemplazan por una de 18 Ω (figura 3.29*b*).

Sin importar qué tan tentador sea, *no se deben combinar las tres resistencias sobrantes:* la variable de control i_3 depende de la resistencia de 3 Ω por lo que esa resistencia debe quedar intacta. La única simplificación adicional, entonces, es $9\ \Omega \| 18\ \Omega = 6\ \Omega$, como se muestra en la figura 3.29*c*.

Al aplicar la LCK en el nodo superior de la figura 3.29*c*, se tiene

$$-0.9i_3 - 2 + i_3 + \frac{v}{6} = 0$$

Empleando la ley de Ohm:

$$v = 3i_3$$

lo que permite calcular

$$i_3 = \frac{10}{3}\ \text{A}$$

De esta forma, la tensión en la fuente dependiente (que es la misma que la tensión en la resistencia de 3 Ω) está dada por:

$$v = 3i_3 = 10\ \text{V}$$

Entonces, la fuente dependiente suministra $v \times 0.9i_3 = 10(0.9)(10/3) =$ 30 W al resto del circuito.

Ahora bien: si se pide la potencia disipada en la resistencia de 15 Ω se debe volver al circuito original. Tal resistencia se encuentra en serie con una resistencia equivalente de 3 Ω existe una tensión de 10 V en el total de 18 Ω en consecuencia, circula una corriente de 5/9 A por la resistencia de 15 Ω y la potencia absorbida por el elemento corresponde a $(5/9)^2(15)$ o 4.63 W.

PRÁCTICA

3.12 En el circuito de la figura 3.30, encontrar la tensión v.

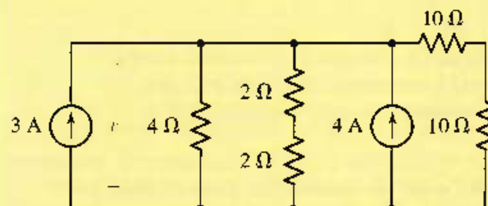
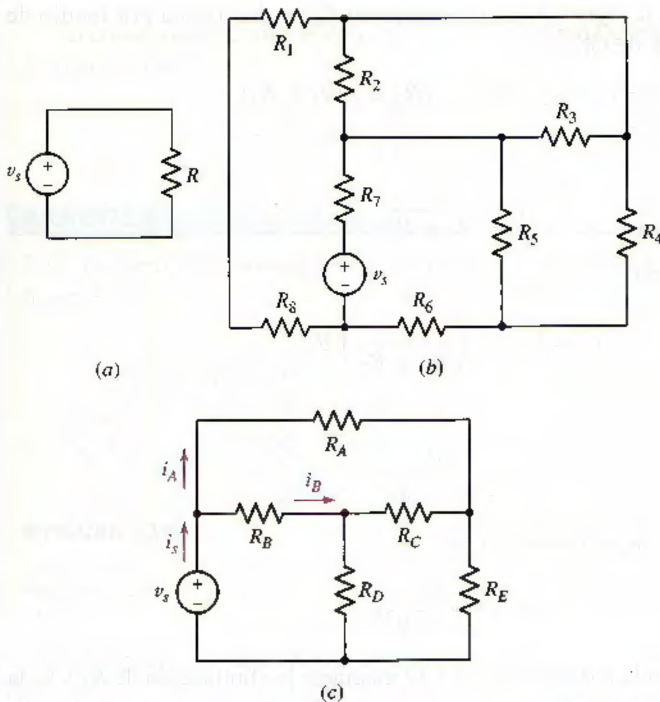


FIGURA 3.30

Respuesta: 12.73 V.



■ **FIGURA 3.31** Estos dos elementos de circuito están en serie y en paralelo. (*b*) R_2 y R_3 están en paralelo, y R_1 y R_8 se encuentran en serie. (*c*) No hay elementos de circuito en serie o en paralelo entre sí.

Tres comentarios finales sobre las combinaciones en serie y en paralelo podrían ser de utilidad. El primero se refiere a la figura 3.31*a* y se debe preguntar: "*¿Están v_s y R en serie o en paralelo?*" La respuesta es "*en las dos condiciones*". Los dos elementos conducen la misma corriente y, por lo tanto, están en serie; están sujetos también a la misma tensión y, en consecuencia, se encuentran en paralelo.

PRECAUCIÓN

El segundo comentario es una alerta. Tal vez los estudiantes sin experiencia o instructores maliciosos dibujen los circuitos de manera que resulte difícil distinguir combinaciones en serie o en paralelo. En la figura 3.31*b*, por ejemplo, las únicas dos resistencias en paralelo son R_2 y R_3, en tanto que las únicas dos en serie son R_1 y R_8.

El último comentario es que un elemento de circuito simple no necesita estar en serie o en paralelo con otro elemento de circuito simple de un circuito. Por ejemplo, R_4 y R_5 en la figura 3.31*b* no están en serie o en paralelo con otro elemento de circuito simple, y no hay elementos de circuito simples en la figura 3.31*c* que estén en serie o en paralelo con cualquier otro elemento de circuito simple. En otras palabras, no se puede simplificar más el circuito utilizando cualquiera de las técnicas analizadas en este capítulo.

3.8 DIVISIÓN DE TENSIÓN Y DE CORRIENTE

Al combinar resistencias y fuentes, se encuentra un método para simplificar el análisis en un circuito. Otro camino útil consiste en la aplicación de las ideas de división de tensión y de corriente. La división de tensión se usa para expresar la tensión en una o varias resistencias en serie, en términos de la tensión de la

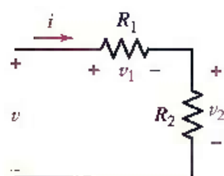


FIGURA 3.32 Ilustración de la división de tensión.

combinación. En la figura 3.32, la tensión en R_2 se determina por medio de la LVK y de la ley de Ohm:

$$v = v_1 + v_2 = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2)$$

de modo que,

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2}$$

En consecuencia:

$$v_2 = iR_2 = \left(\frac{v}{R_1 + R_2}\right) R_2$$

o

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

y la tensión en R_1 es, de modo similar:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v$$

Si se generaliza la red de la figura 3.32 mediante la eliminación de R_2 y se la sustituye por la combinación en serie $R_2, R_3, \ldots, R_N$, entonces se tiene el resultado general de la división de tensión en una cadena de N resistencias en serie,

$$v_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} v \qquad [11]$$

lo cual nos permite calcular la tensión v_k que aparece entre los extremos de una resistencia arbitraria R_k de la serie.

EJEMPLO 3.13

Determinar v_x del circuito de la figura 3.33*a*.

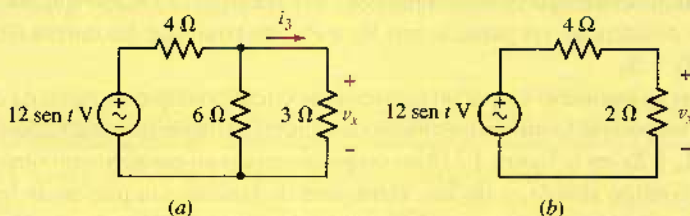


FIGURA 3.33 Ejemplo numérico que ilustra la combinación de resistencia y división de tensión. (*a*) Circuito original. (*b*) Circuito simplificado.

Primero se deben combinar las resistencias de 6 y 3 Ω y sustituirlas por $(6)(3)/(6+3) = 2\ \Omega$.

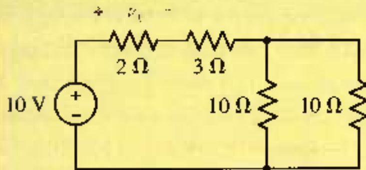
Debido a que v_x aparece en los extremos de la combinación en paralelo, la simplificación no ha perdido esta cantidad. Sin embargo, una simplificación adicional del circuito al sustituir la combinación en serie de la resistencia de 4 Ω por una nueva resistencia de 2 Ω produciría dicha situación.

En consecuencia, sólo se debe aplicar la división de tensión al circuito de la figura 3.33*b*:

$$v_x = (12\,\text{sen}\,t)\frac{2}{4+2} = 4\,\text{sen}\,t \qquad \text{volts}$$

PRÁCTICA

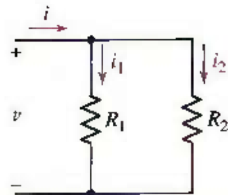
3.13 Recurrir a la división de tensión para determinar v_x en el circuito de la figura 3.34.



■ **FIGURA 3.34**

Respuesta: 2 V.

El complemento[2] de la división de tensión es la división de corriente. En este caso se tiene una corriente total que se alimenta a varias resistencias en paralelo, como en el circuito de la figura 3.35.



■ **FIGURA 3.35** Ilustración de la división de corriente.

La corriente que fluye por R_2 es

$$i_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{i(R_1 \| R_2)}{R_2} = \frac{i}{R_2}\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

o

$$i_2 = i\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad [12]$$

y de manera similar,

$$i_1 = i\frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad [13]$$

La naturaleza no nos sonríe en este caso, ya que estas dos últimas ecuaciones tienen un factor que difiere sutilmente del utilizado con la división de tensión, y se requerirá cierto esfuerzo para evitar errores. Muchos estudiantes consideran la expresión de la división de tensión como "evidente" y la correspondiente a la división de corriente como "diferente". Ayuda a reconocer que la más grande de las dos resistencias en paralelo conduce siempre la corriente más pequeña.

Para combinar en paralelo N resistencias, la corriente que circula por la resistencia R_k es

$$i_k = i\frac{\dfrac{1}{R_k}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \cdots + \dfrac{1}{R_N}} \qquad [14]$$

(2) El principio de dualidad se encuentra a menudo en ingeniería. El tema, en forma breve, se considera en el capítulo 7 cuando se comparan bobinas y capacitores

Escrito en términos de conductancias:

$$i_k = i\frac{G_k}{G_1 + G_2 + \cdots + G_N}$$

lo que se asemeja en gran medida a la ecuación [11] de la división de tensión.

EJEMPLO 3.14

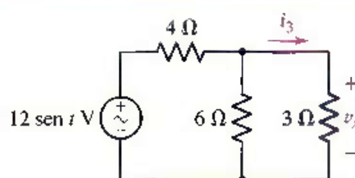


FIGURA 3.36 Circuito utilizado como un ejemplo de división de corriente. La línea ondulada en el símbolo de la fuente de tensión indica su variación senoidal con el tiempo.

Escribir la expresión de la corriente que pasa por la resistencia de 3 Ω en el circuito de la figura 3.36.

La corriente total que fluye en la combinación de 3 y 6 Ω se calcula mediante:

$$i(t) = \frac{12\,\text{sen}\,t}{4 + 3\|6} = \frac{12\,\text{sen}\,t}{4 + 2} = 2\,\text{sen}\,t \qquad \text{A}$$

y por lo tanto la corriente deseada está dada por la división de corriente:

$$i_3(t) = (2\,\text{sen}\,t)\left(\frac{6}{6+3}\right) = \frac{4}{3}\,\text{sen}\,t \qquad \text{A}$$

Desafortunadamente, la división de corriente se aplica algunas veces cuando no es aplicable. Como ejemplo, considere otra vez el circuito de la figura 3.31c, en cuyo caso ya se ha acordado que no contiene elementos de circuito que estén en serie o en paralelo. Sin resistencias en paralelo, no hay forma de que pueda aplicarse la división de corriente. Aun así, hay muchos estudiantes que dan un rápido vistazo a las resistencias R_A y R_B y tratan de aplicar la división de corriente, escribiendo una ecuación incorrecta, como

$$i_A \not= i_S\frac{R_B}{R_A + R_B}$$

Recuerde que, *las resistencias en paralelo deben ser ramas entre el mismo par de nodos.*

PRÁCTICA

3.14 En el circuito de la figura 3.37, utilizar los métodos de combinación de resistencias y de división de corriente para determinar i_1, i_2 y v_3.

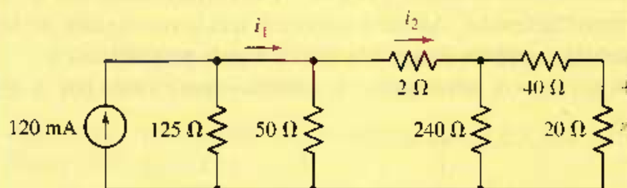


FIGURA 3.37

Respuesta: 100 mA; 50 mA; 0.8 V.

APLICACIÓN PRÁCTICA

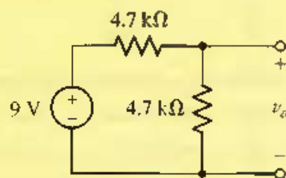
La conexión a tierra difiere de la tierra geológica

Hasta ahora, se han dibujado esquemas de circuito de una manera similar al de la figura 3.38, donde las tensiones se definen entre dos terminales marcadas con toda claridad. Se tuvo especial cuidado en subrayar el hecho de que la tensión no puede definirse en un solo punto: es por definición la *diferencia* de potencial entre *dos puntos*. Sin embargo, muchos esquemas utilizan la convención de considerar a la tierra como la definición de cero volts, de modo que todas las demás tensiones se refieren de manera implícita a este potencial. A menudo el concepto se conoce como ***conexión a tierra***, y está vinculado de manera fundamental con los reglamentos de seguridad diseñados para evitar incendios, choques eléctricos fatales y lo relacionado con el caos. El símbolo de la conexión a tierra se muestra en la figura 3.39*a*.

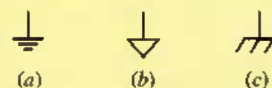
Debido a que la conexión a tierra se define como cero volts, a menudo resulta conveniente emplearla como una terminal común en los esquemas de circuito. El circuito de la figura 3.38 se presenta dibujado otra vez de esta manera en la figura 3.40, donde el símbolo de conexión a tierra representa un nodo común. Resulta importante advertir que dos circuitos son equivalentes en términos de nuestro valor v_a (4.5 V en cualquier caso), aunque ya no son totalmente iguales. Se afirma que el circuito de la figura 3.38 "flota", pues para todos los propósitos prácticos podría instalarse sobre un tablero de circuito de un satélite en una órbita geosíncrona (o en su camino hacia Plutón). Sin embargo, el circuito de la figura 3.40 está conectado físicamente de algún modo a la tierra por medio de una trayectoria conductora. Por esta razón, existen otros dos símbolos que se usan en ocasiones para denotar una terminal común. La figura 3.39*b* muestra lo que suele conocerse como ***tierra de la señal***; tal vez haya (y a menudo hay) una gran tensión entre la conexión a tierra y cualquier terminal conectada a la tierra de la señal.

El hecho de que la terminal común de un circuito pueda o no conectarse mediante alguna trayectoria de baja resistencia a la tierra, propicia situaciones potencialmente peligrosas. Considere el diagrama de la figura 3.41*a*, que describe a un inocente espectador a punto de tocar una pieza de equipo energizado por una toma de corriente de ca. Sólo se han utilizado dos terminales del contacto de la pared; la terminal redonda de conexión a tierra del enchufe no se ha conectado. La terminal común de cualquier circuito del equipo se ha unido y conectado eléctricamente con el chasis conductor del equipo; a menudo, esta terminal se denota mediante el símbolo de la conexión a ***tierra de chasis*** de la figura 3.39*c*. Desafortunadamente, existe una falla en el cableado, debido a una fabricación pobre o quizá sólo al desgaste y a la prisa. De cualquier forma, el chasis no está "aterrizado", por lo que se presenta una gran resistencia entre la conexión al chasis y la conexión a tierra. En la figura 3.41*b*. se exhibe un pseudoesquema (se tomaron ciertas libertades con el símbolo de la resistencia equivalente de la persona) de la situación. En realidad, la trayectoria eléctrica entre el chasis conductor y la tierra puede ser la mesa, la cual puede representar una resistencia de cientos de megaohms o más. Sin embargo, la resistencia de una persona es muchos órdenes menos de magnitud. Una vez que la persona toca el equipo para ver por qué no está trabajando correctamente... bien, sólo se señala que no todas las historias tienen un final feliz.

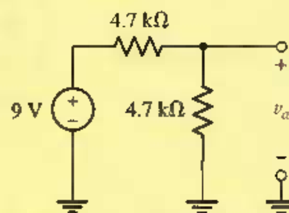
El hecho de que la "tierra" no siempre sea "la conexión a tierra" puede provocar una amplia gama de problemas de seguridad y de ruido eléctrico. De vez en cuando se encuentra un ejemplo en los edificios viejos, donde la plomería consistía al principio en cobre conductor de electricidad. En este tipo de edificios, cualquier tubería de agua se consideró a menudo como una trayectoria de baja resistencia hacia la tierra, y por lo tanto se usó en muchas conexiones eléctricas. Sin embargo, cuando las



■ **FIGURA 3.38** Circuito simple con una tensión v_a definida entre dos terminales.



■ **FIGURA 3.39** Tres símbolos diferentes utilizados para representar una conexión a tierra o terminal común: (*a*) tierra; (*b*) tierra de señal, (*c*) tierra de chasis.

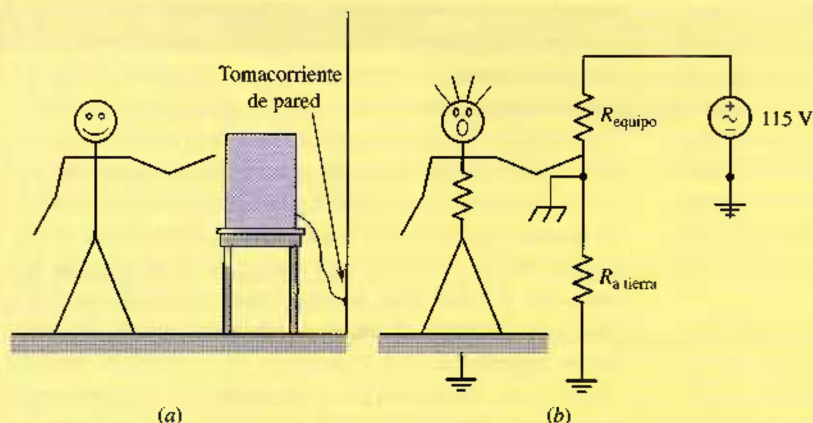


■ **FIGURA 3.40** El circuito de la figura 3.38 se volvió a dibujar utilizando el símbolo de la conexión a tierra. El símbolo de conexión a tierra de la derecha es redundante; sólo se requiere marcar la terminal positiva de v_a; por lo tanto, la referencia negativa es implícitamente la conexión a tierra, o cero volts.

(Continúa en la siguiente página)

tuberías corroídas se sustituyeron por material de PVC no conductor y de costo conveniente, ya no existe la trayectoria de baja resistencia hacia la tierra. Se presenta un problema similar cuando la composición de la tierra varía de modo considerable en una región particular. En tales situaciones, es posible tener en realidad dos edificios separados en los que las dos "conexiones a tierra" no son iguales, y como consecuencia, fluya corriente.

Dentro de este texto, se usará exclusivamente el símbolo de conexión a tierra. Sin embargo, vale la pena recordar que, en la práctica, no todas las conexiones a tierra son iguales.



■ **FIGURA 3.41** (*a*) Bosquejo de una persona desprevenida a punto de tocar una parte de equipo conectada a tierra de manera inadecuada. No va a serle agradable el resultado. (*b*) Diagrama de un circuito equivalente para la situación que está a punto de desencadenarse; la persona se representó con una resistencia equivalente, como la que tiene el equipo. Se utilizó una resistencia para representar la trayectoria no humana hacia tierra.

RESUMEN Y REPASO

- La ley de corriente de Kirchhoff (LCK) establece que la suma algebraica de las corrientes que entran a cualquier nodo es nula.
- La ley de tensión de Kirchhoff (LVK) enuncia que la suma algebraica de las tensiones alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un circuito es nula.
- Se dice que todos los elementos de un circuito que conducen la misma corriente están conectados en serie.
- Se dice que los elementos de un circuito que tienen una tensión común entre sus terminales están conectados en paralelo.
- Una combinación en serie de N resistencias se sustituye por una sola que tiene un valor $R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$.
- Una combinación en paralelo de N resistencias se sustituye por una sola resistencia que tiene el valor

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$

- Se pueden sustituir fuentes de tensión en serie por una sola fuente, siempre que se tenga cuidado de notar la polaridad individual de cada fuente.
- Es posible sustituir las fuentes de corriente en paralelo por una sola fuente, pero hay que tener cuidado de la dirección de cada flecha de corriente.

- La división de tensión permite calcular la fracción de la tensión total en los extremos de una cadena de resistencias en serie que se reduce entre los extremos de cualquier resistencia (o grupo de resistencias).
- La división de corriente permite calcular la fracción de la corriente total en una cadena en paralelo de resistencias que fluye a través de cualquiera de ellas.

LECTURAS ADICIONALES

Se puede encontrar un análisis de los principios de conservación de la energía y conservación de la carga, así como las leyes de Kirchhoff en

R. Feynman, R.B. Leighton y M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1989, pp. 4-1, 4-7 y 25-9.

Un estudio muy profundo acerca de las prácticas de instalación de sistemas de tierras coherentes con el National Electrical Code de 1996 se puede encontrar en

J.F. McPartland y B.J. McPartland, *McGraw-Hill's National Electrical Code Handbook,* 22a. edición, Nueva York: McGraw-Hill, 1996, pp. 337-485.

EJERCICIOS

3.1 Nodos, trayectorias, lazos y ramas

1. Volver a dibujar el circuito de la figura 3.42, pero en esta ocasión consolidar los nodos en el mínimo número posible.

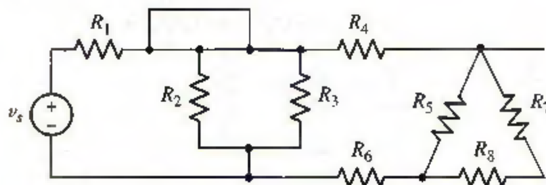


FIGURA 3.42

2. En el circuito de la figura 3.42, contar el número de (*a*) nodos; (*b*) ramas.
3. En la figura 3.43,
   (*a*) ¿Cuántos nodos hay?
   (*b*) ¿Cuántas ramas hay?
   (*c*) Al moverse de *A* a *B* a *E* a *D* a *C* a *B*, ¿se ha formado una trayectoria? ¿Un lazo?

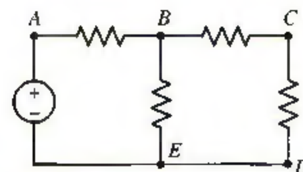


FIGURA 3.43

4. En la figura 3.44,
   (*a*) ¿Cuál es el número de nodos?
   (*b*) ¿Cuántas ramas hay?
   (*c*) Al moverse de *B* a *F* a *E* a *C*, ¿se ha formado una trayectoria? ¿Un lazo?

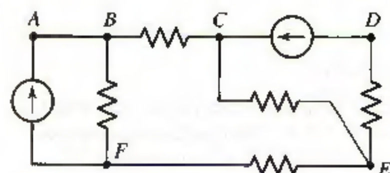


FIGURA 3.44

5. Con referencia al circuito que se muestra en la figura 3.43,
   (*a*) Si un segundo alambre se conecta entre los puntos *E* y *D* del circuito, ¿cuántos nodos tiene el nuevo circuito?
   (*b*) Si se agrega una resistencia al circuito de tal manera que una terminal se conecta al punto *C* y la otra se deja flotando, ¿cuántos nodos tendrá el circuito nuevo?
   (*c*) ¿Cuáles de los siguientes representan lazos?
   (*i*) Al moverse de *A* a *B* a *C* a *D* a *E* a *A*.
   (*ii*) Al moverse de *B* a *E* a *A*.
   (*iii*) Al moverse de *B* a *C* a *D* a *E* a *B*.
   (*iv*) Al moverse de *A* a *B* a *C*.
   (*v*) Al moverse de *A* a *B* a *C* a *B* a *A*.

3.2 Ley de Kirchhoff de corriente

6. (*a*) Determinar la corriente identificada como i_z en el circuito que se muestra en la figura 3.45. (*b*) Si la resistencia que transporta una corriente de 3 A tiene un valor de 1 Ω, ¿cuál es el valor de la resistencia que transporta −5 A?

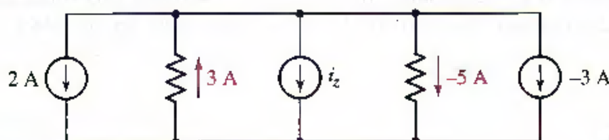
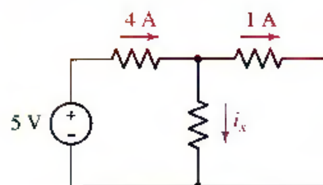


FIGURA 3.45

7. Encontrar i_x en cada uno de los circuitos de la figura 3.46.





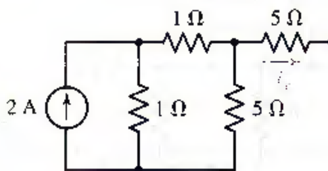


FIGURA 3.46

8. Con referencia en la figura 3.47,
   (*a*) Encontrar i_x si $i_y = 2$ A e $i_z = 0$ A. (*b*) Calcular i_y si $i_x = 2$ A e $i_z = 2\, i_y$.
   (*c*) Proporcionar i_z si $i_x = i_y = i_z$.

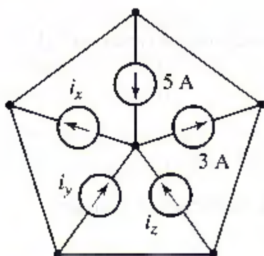


FIGURA 3.47

9. Determinar i_x e i_y en el circuito de la figura 3.48.
10. Un foco de 100 W, uno de 60 W y uno de 40 W se conectan en paralelo entre sí a una fuente casera estadounidense estándar de 115 V. Calcular la corriente que circula en cada foco y la corriente total que entrega la fuente de tensión.

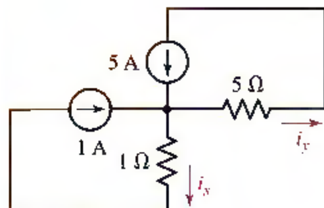


FIGURA 3.48

11. Un multímetro digital (DMM) es un dispositivo que, por lo regular, se utiliza para medir tensiones. Cuenta con dos puntas (en general, rojo para la referencia positiva y negro para la negativa) y un display LCD. Suponga que se conecta un DMM al circuito de la figura 3.46*b* con la punta positiva en el nodo superior y la negativa en el nodo inferior. Con base en la LCK, explicar por qué, idealmente, es deseable que un DMM que se utilizara de esta forma tuviera una resistencia infinita en lugar de resistencia nula.

12. Un restaurante local cuenta con un anuncio de neón construido con 12 focos separados; cuando uno de éstos falla, parece como una resistencia infinita y no puede conducir corriente. Para cablear el anuncio, el fabricante presenta dos opciones (figura 3.49). A partir de lo que se aprendió sobre la LCK, ¿cuál deberá seleccionar el propietario? Explicar su respuesta.



FIGURA 3.49

13. En el circuito de la figura 3.50,
   (*a*) Calcular v_y si $i_z = -3$ A.
   (*b*) ¿Qué tensión necesitaría sustituir la fuente de 5 V para obtener $v_y = -6$ V si $i_z = 0.5$ A?

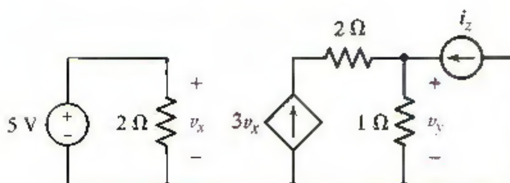


FIGURA 3.50

14. Con referencia a la figura 3.51*a*,
   (*a*) Si $i_x = 5$ A, determinar v_1 e i_y. (*b*) Si $v_1 = 3$ V, calcular i_x e i_y.
   (*c*) ¿Qué valor de i_s haría que $v_1 \neq v_2$?

15. Determinar R y G en el circuito de la figura 3.51*b* si la fuente de 5 A suministra 100 W, y la de 40 V proporciona 500 W.

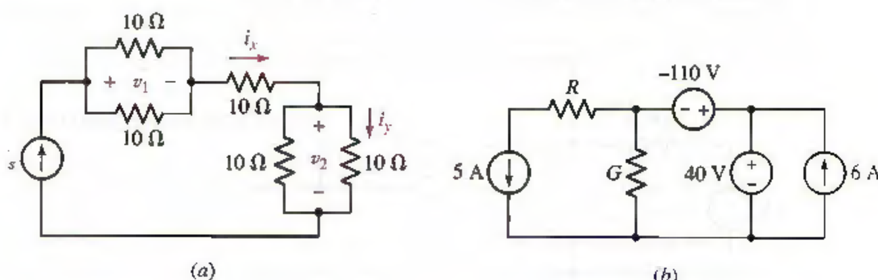


FIGURA 3.51

3.3 Ley de tensión de Kirchhoff

16. En los circuitos de la figura 3.52*a* y *b*, determinar la corriente marcada como *i*.

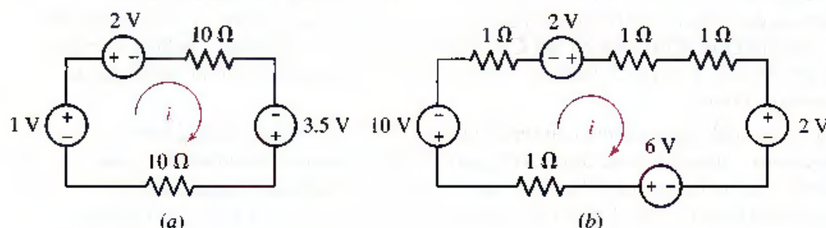


FIGURA 3.52

17. Calcular el valor de *i* en cada circuito de la figura 3.53.

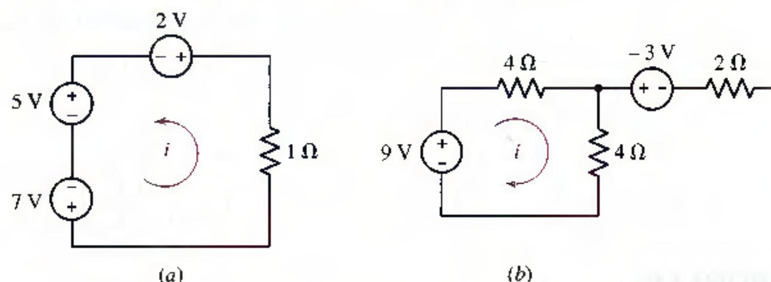


FIGURA 3.53

18. Considerar el circuito simple que se muestra en la figura 3.54. Con base en la LKT, deducir las expresiones,

$$v_1 = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{y} \quad v_2 = v_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

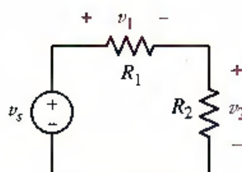


FIGURA 3.54

19. El circuito que se presenta en la figura 3.55 muestra un dispositivo conocido como amp op. Este dispositivo tiene dos propiedades particulares en el circuito que se muestra: 1) $V_d = 0$ V, y 2) no puede circular ninguna corriente en cualquier terminal de entrada (marcada con un "−" y un "+" dentro del símbolo), pero sí *puede* circular a través de terminal de salida (marcada "SAL"). Esta situación aparentemente imposible —en conflicto directo con LCK— es un resultado de canalizaciónes de potencia hacia este dispositivo que no están incluidas en el símbolo. Con base en esta información, calcular V_{sal}. (Sugerencia: se requieren dos ecuaciones LVK, que tomen en cuenta la fuente de 5 V.)

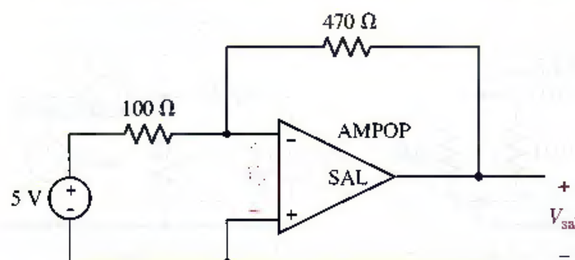


FIGURA 3.55

20. Aplicar las leyes de Ohm y de Kirchhoff al circuito de la figura 3.56 para calcular (*a*) v_x; (*b*) i_{ent}; (*c*) I_s; (*d*) la potencia proporcionada por la fuente dependiente.

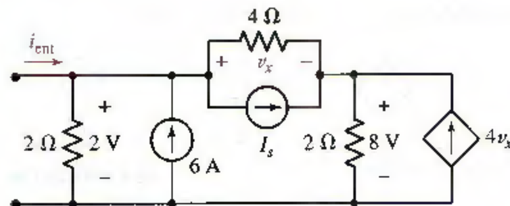


FIGURA 3.56

21. (*a*) Utilizar las leyes de Kirchhoff y Ohm en un procedimiento paso por paso para evaluar todas las corrientes y las tensiones del circuito de la figura 3.57. (*b*) Calcular la potencia que absorbe cada uno de los cinco elementos del circuito y mostrar que la suma es cero.

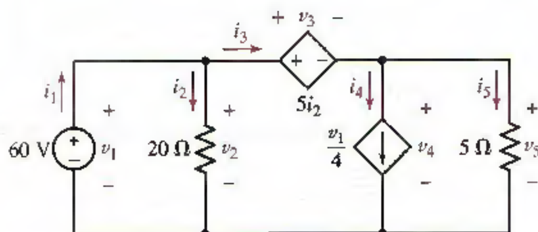


FIGURA 3.57

22. Con referencia al circuito de la figura 3.58, determinar la potencia absorbida por cada uno de los siete elementos del circuito.

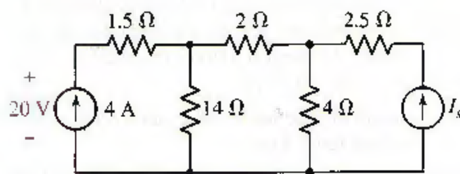


FIGURA 3.58

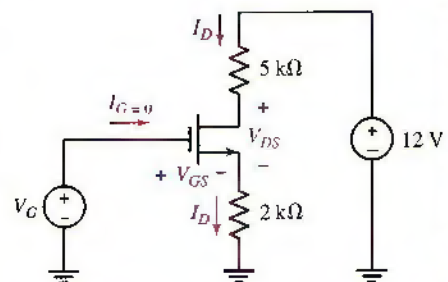


FIGURA 3.59

23. Un circuito contiene seis elementos y cuatro nodos, numerados 1, 2, 3 y 4. Cada elemento del circuito se conecta entre un par diferente de nodos. La tensión v_{12} (+ la referencia en el primer nodo nombrado) es igual a 12 V, y $v_{34} = -8$ V. Proporcionar v_{13}, v_{23} y v_{24} si v_{14} es igual a: (*a*) 0; (*b*) 6 V; (*c*) −6 V.

24. Remitirse al circuito transistorizado de la figura 3.59. Tener en mente que aunque no conoce la relación corriente-tensión del dispositivo, éste sigue cumpliendo la LCK y la LVK. (*a*) Si $I_D = 1.5$ mA, calcular V_{DS}. (*b*) Si $I_D = 2$ mA y $V_G = 3$ V, calcular V_{GS}.

3.4 Circuito de un solo lazo

25. Determinar la potencia que absorbe el elemento *X* de la figura 3.60, si éste es: (*a*) una resistencia de 100 Ω; (*b*) una fuente de tensión independiente de 40 V, referencia + en la parte superior; (*c*) una fuente de tensión dependiente marcada como $25i_x$, + referencia + en la parte superior; (*d*) una fuente de tensión dependiente marcada como $0.8v_1$, + referencia + en la parte superior; (*e*) una fuente de corriente independiente de 2 A, con la flecha dirigida hacia arriba.

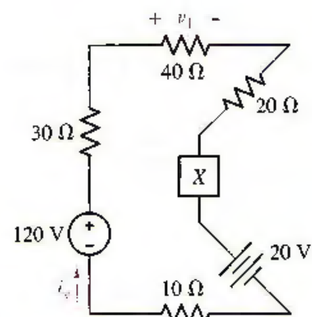


FIGURA 3.60



26. Determinar i_1 en el circuito de la figura 3.61, si la fuente de tensión dependiente se marca como: (*a*) $2v_2$; (*b*) $1.5v_3$; (*c*) $-15i_1$.

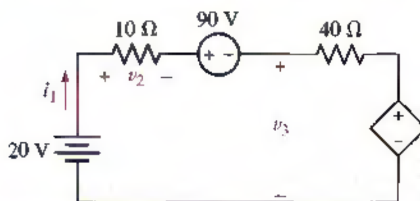


FIGURA 3.61

27. Remitirse al circuito de la figura 3.61 y marcar la fuente dependiente $1.8v_3$. Calcular v_3 si (*a*) la fuente de 90 V genera 180 W; (*b*) la fuente de 90 V absorbe 180 W; (*c*) la fuente dependiente genera 100 W; (*d*) la fuente dependiente absorbe una potencia de100 W.

28. Para el cargador de baterías cuyo modelo es el circuito de la figura 3.62, determinar el valor del resistor ajustable *R* de modo que: (*a*) circule una corriente de carga de 4 A; (*b*) se entregue una potencia de 25 W a la batería (0.035 Ω y 10.5 V); (*c*) esté presente una tensión de 11 V en las terminales de la batería (0.035 Ω y 10.5 V).

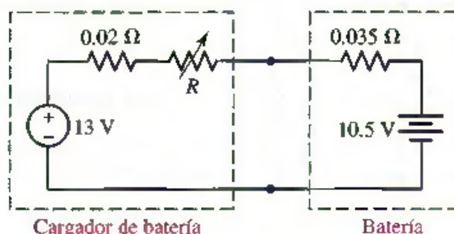


FIGURA 3.62

29. El circuito de la figura 3.62 se modifica si se instala una fuente de tensión dependiente en serie con la batería. Ubicar la referencia + en la parte inferior y dejar que el control sea $0.05i$, donde i es la corriente de lazo en el sentido de las manecillas del reloj. Calcular esta corriente y la tensión a nivel terminal de la batería, incluyendo la fuente dependiente, si $R = 0.5\ \Omega$.

30. Proporcionar la potencia absorbida por cada uno de los seis elementos del circuito de la figura 3.63 y demostrar que su suma es igual a cero.

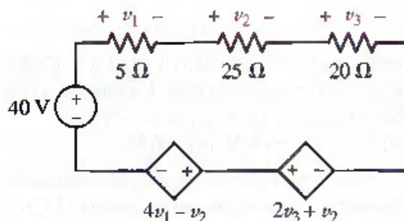


FIGURA 3.63

31. En el circuito de la figura 3.64,
    (*a*) Determine la resistencia *R* cuando la resistencia de 25 kΩ absorbe 2 mW.
    (*b*) Calcular la resistencia *R* cuando la fuente de 12 V entrega 3.6 mW al circuito.
    (*c*) Sustituir la resistencia *R* por una fuente de tensión, de modo que cualquier resistencia no absorba potencia; dibujar el circuito e indicar la polaridad de tensión de la nueva fuente.

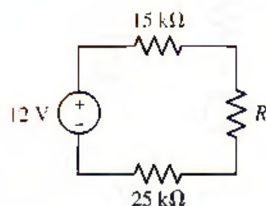
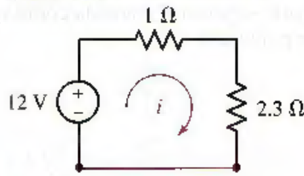
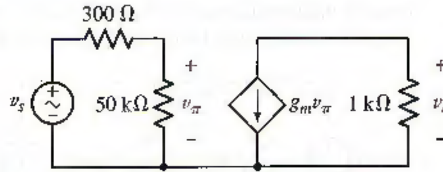


FIGURA 3.64

32. Con referencia a la tabla 2.4, si el segmento de alambre que se muestra en gris en el circuito de la figura 3.65 es cobre sólido del número 22 AWG y de 3 000 pies de largo, calcular la corriente i.



■ FIGURA 3.65



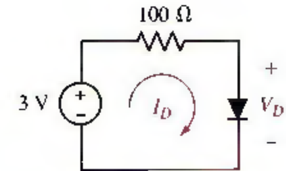
■ FIGURA 3.66

33. Si en la figura 3.66, si $g_m = 25 \times 10^{-3}$ siemens y $v_s = 10 \cos 5t$ mV, determine $v_o(t)$.

34. Las leyes de Kirchhoff se aplican, independientemente de que la ley de Ohm se cumpla para un elemento particular. La característica *I-V* de un diodo, por ejemplo, está dada por

$$I_D = I_S \left(e^{V_D/V_T} - 1\right)$$

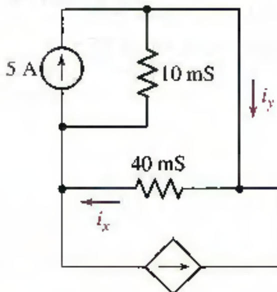
donde $V_T = 27$ mV a temperatura ambiente e I_S puede variar desde 10^{-12} hasta 10^{-3} A. En el circuito de la figura 3.67, utilizar las LVK y LCK para obtener V_D si $I_S = 3\ \mu$A. (*Nota: este problema da como resultado una ecuación trascendental que requiere un método interactivo para obtener una solución numérica. La mayor parte de las calculadoras científicas pueden efectuar una función de este tipo.*)



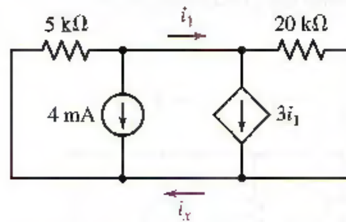
■ FIGURA 3.67

3.5 El circuito de un solo par de nodos

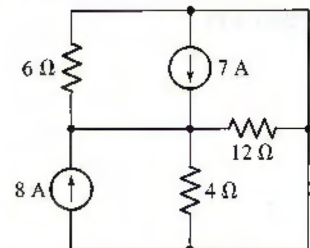
35. Determinar la potencia absorbida por cada elemento del circuito de la figura 3.68, si el control para la fuente dependiente es: (*a*) $0.8i_x$; (*b*) $0.8i_y$. En cada caso, demostrar que la suma de las cantidades de potencia absorbida es cero.



■ FIGURA 3.68



■ FIGURA 3.69

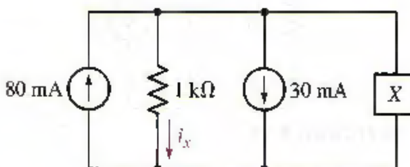


■ FIGURA 3.70

36. Proporcionar i_x del circuito de la figura 3.69.

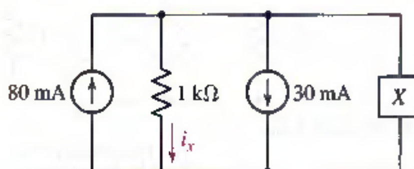
37. Calcular la potencia absorbida por cada elemento del circuito de un par de nodos de la figura 3.70 y demostrar que la suma es igual a cero.

38. Determinar la potencia que absorbe el elemento X del circuito de la figura 3.71 si es: (*a*) una resistencia de 4 kΩ; (*b*) una fuente de corriente independiente de 20 mA, con flecha de referencia hacia abajo; (*c*) una fuente de corriente dependiente, con flecha de referencia hacia abajo, marcada como $2i_x$; (*d*) una fuente de tensión independiente de 60 V, referencia + en la parte superior.



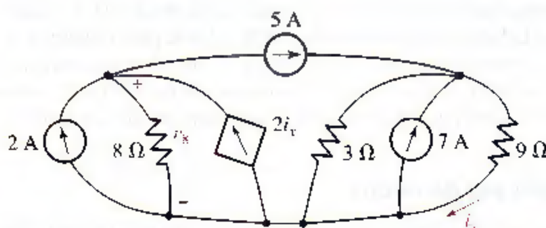
■ FIGURA 3.71

39. (*a*) Si el elemento X de la figura 3.72 es una fuente de corriente independiente, con la flecha dirigida hacia arriba, marcada como i_s. ¿Cuánto vale i_s si ninguno de los cuatro elementos de circuito absorbe potencia? (*b*) Sea el elemento X una fuente de tensión independiente, con la referencia + en la parte superior y marcada como v_s. ¿Cuánto vale v_s si la fuente de tensión no absorbe potencia?

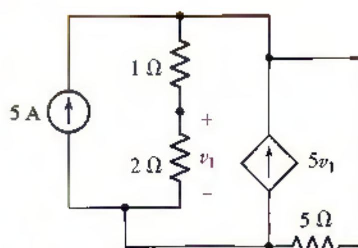


■ **FIGURA 3.72**

40. (*a*) Aplicar las técnicas del análisis de un solo par de nodos en el nodo derecho superior de la figura 3.73 y determinar i_x. (*b*) Trabajar ahora con el nodo izquierdo superior y proporcionar v_8. (*c*) ¿Qué cantidad de potencia genera la fuente de 5 A?



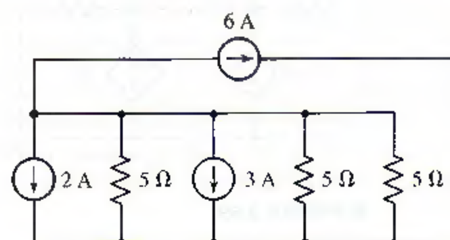
■ **FIGURA 3.73**



■ **FIGURA 3.74**

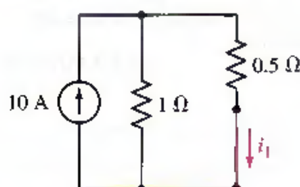
41. Encontrar la potencia que absorbe la resistencia de 5 Ω en la figura 3.74.

42. Calcular la potencia que suministra cada fuente indicada en la figura 3.75, y demostrar que su suma es igual a cero.

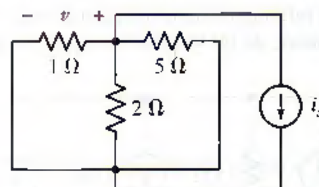


■ **FIGURA 3.75**

43. Con referencia a la tabla 2.4, ¿cuántas millas de alambre de cobre sólido número 28 AWG se requieren para que con el segmento de alambre de la figura 3.76, se obtenga $i_1 = 5$ A?



■ **FIGURA 3.76**

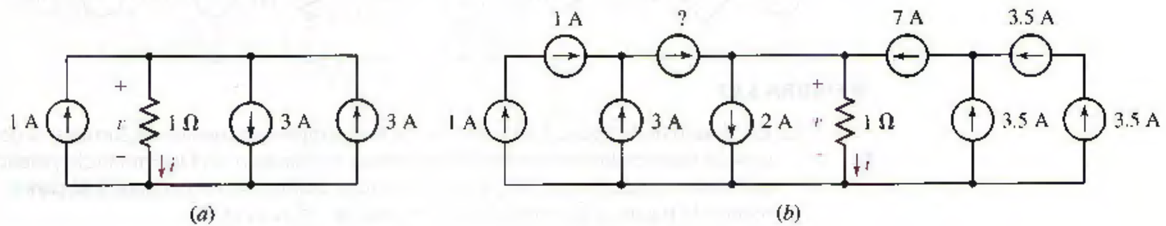


■ **FIGURA 3.77**

44. En el circuito de la figura 3.77, si $v = 6$ V, determinar i_s.

3.6 Fuentes independientes conectadas en serie y en paralelo

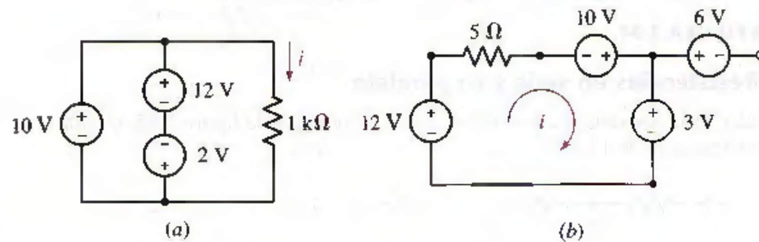
45. Mediante combinaciones de fuentes en serie, calcular i de los dos circuitos de la figura 3.78.



■ FIGURA 3.78

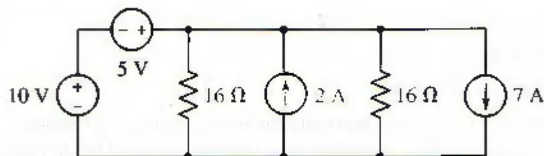
46. Calcular v de cada uno de los circuitos de la figura 3.78 combinando primero las fuentes.

47. Calcular la corriente denominada i de cada uno de los circuitos de la figura 3.79.

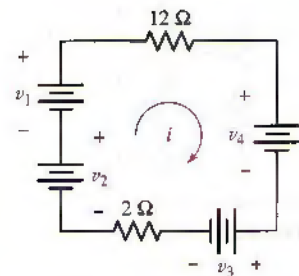


■ FIGURA 3.79

48. Calcular la potencia absorbida por cada uno de los elementos del circuito que se muestra en la figura 3.80 y verificar que su suma sea igual a cero.



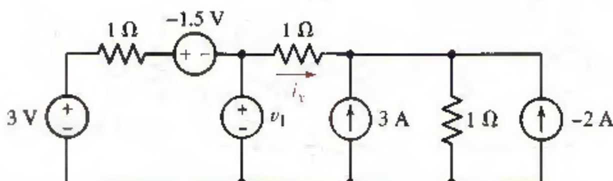
■ FIGURA 3.80



■ FIGURA 3.81

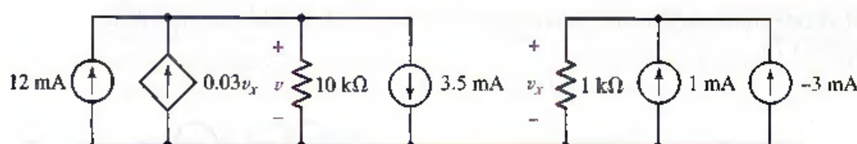
49. En el circuito de la figura 3.81, calcular i si:
   (a) $v_1 = v_2 = 10$ V y $v_3 = v_4 = 6$ V.
   (b) $v_1 = v_3 = 3$ V y $v_2 = v_4 = 2.5$ V.
   (c) $v_1 = -3$ V, $v_2 = 1.5$ V, $v_3 = -0.5$ V, y $v_4 = 0$ V.

50. En el circuito de la figura 3.82, elegir v_1 para obtener una corriente i_x de 2 A.



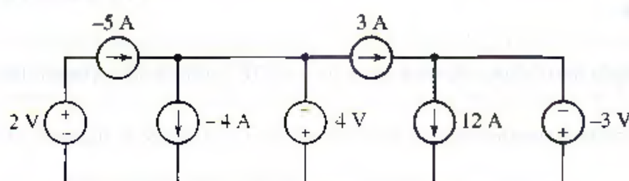
■ FIGURA 3.82

51. Determinar la tensión v en el circuito de la figura 3.83.



■ **FIGURA 3.83**

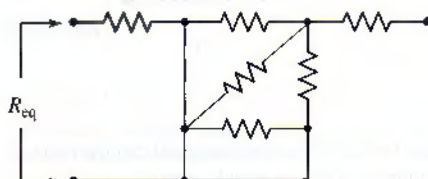
52. El circuito de la figura 3.84 contiene varios ejemplos de fuentes de corriente y de tensión independientes conectadas en serie y en paralelo. *a*) Determinar la potencia que absorbe cada fuente. *b*) ¿A qué valor debe cambiarse la fuente de 4 V para reducir la potencia que suministra la fuente de −5 A a cero?



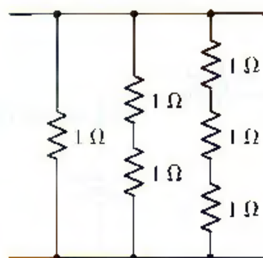
■ **FIGURA 3.84**

3.7 Resistencias en serie y en paralelo

53. Calcular la resistencia equivalente como se indica en la figura 3.85, si cada resistencia es de 1 kΩ.



■ **FIGURA 3.85**

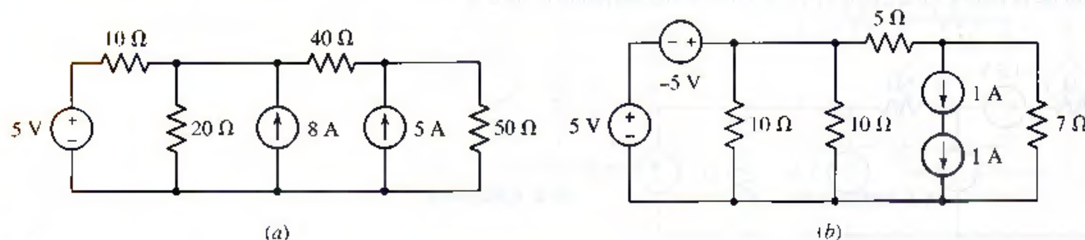


■ **FIGURA 3.86**

54. En el circuito de la figura 3.86,
    (*a*) Calcular la resistencia equivalente.
    (*b*) Obtener la expresión de la resistencia equivalente si el circuito se extiende utilizando N ramas, y cada una de ellas tiene una resistencia más que la rama de su izquierda.

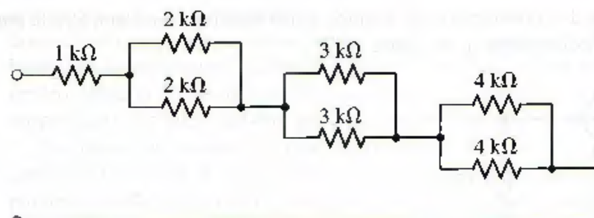
55. Dadas tres resistencias de 10 kΩ, tres de 47 kΩ y tres de 1 kΩ proporcionar una combinación (no es necesario utilizar todas las resistencias) que produzca:
    (*a*) 5 kΩ
    (*b*) 57 333 Ω
    (*c*) 29.5 kΩ

56. Simplificar las redes de la figura 3.87 con combinaciones de resistencias y fuentes.



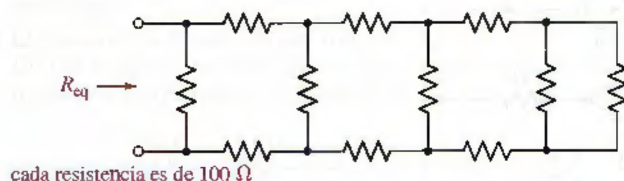
■ **FIGURA 3.87**

57. Calcular la resistencia equivalente del circuito de la figura 3.88.

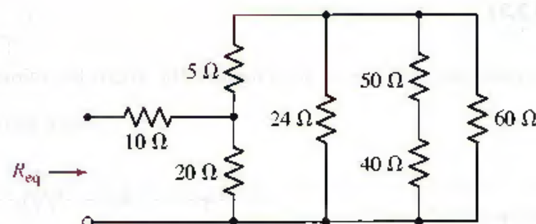


■ **FIGURA 3.88**

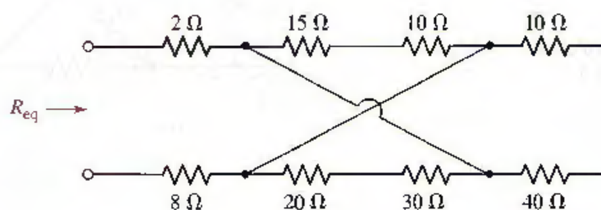
58. Determinar R_{eq} de cada una de las redes resistivas que se muestran en la figura 3.89.



(*a*)



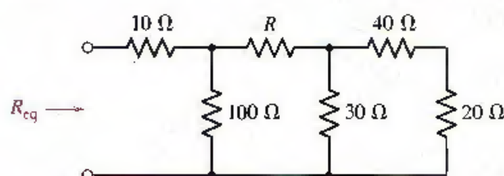
(*b*)



(*c*)

■ **FIGURA 3.89**

59. En la red que se presenta en la figura 3.90: (*a*) si $R = 80\ \Omega$ calcular R_{eq}; (*b*) determine R si $R_{eq} = 80\ \Omega$; (*c*) proporcionar R si $R = R_{eq}$.

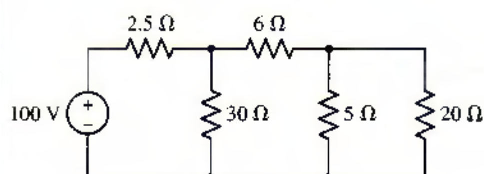


■ **FIGURA 3.90**

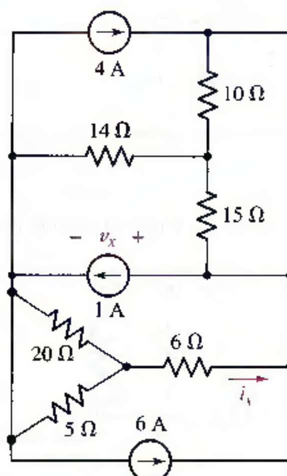
60. Mostrar cómo combinar cuatro resistencias de 100 Ω para obtener una resistencia equivalente de (*a*) 25 Ω; (*b*) 60 Ω; (*c*) 40 Ω.

61. Determinar la potencia absorbida por cada una de las resistencias del circuito de la figura 3.91.

62. Utilizar las técnicas de combinación de fuentes y resistencias como una ayuda para obtener v_x e i_x en los circuitos de la figura 3.92.

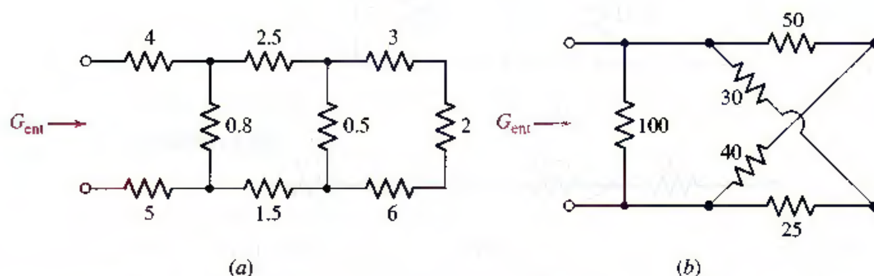


■ **FIGURA 3.91**



■ **FIGURA 3.92**

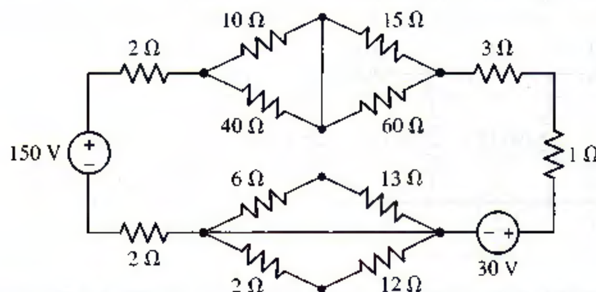
63. Determinar G_{ent} de cada una de las redes de la figura 3.93. Todos los valores se dan en milisiemens.



■ **FIGURA 3.93**

3.8 División de tensión y de corriente

64. Recurrir a las combinaciones de resistencias y de fuentes, así como a la división de corriente, en el circuito de la figura 3.94, para conocer la potencia que absorben las resistencias de 1 Ω, 10 Ω y 13 Ω.

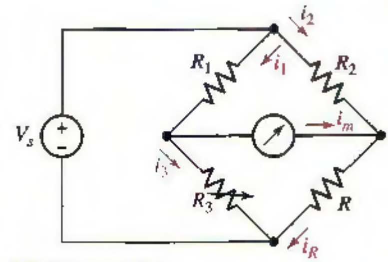


■ **FIGURA 3.94**

65. El ***puente de Wheatstone*** (figura 3.95) es uno de los circuitos eléctricos más famosos y es utilizado en la medición de resistencias. A menudo, a la resistencia con una flecha que cruza su símbolo (R_3) que es una resistencia variable, se le conoce como potenciómetro; su valor puede modificarse simplemente haciendo girar un botón. El amperímetro, simbolizado por un círculo con una flecha en diagonal en el centro, mide la corriente que circula a través del alambre central. Se supone que este amperímetro es ideal, así que tiene una resistencia interna nula.

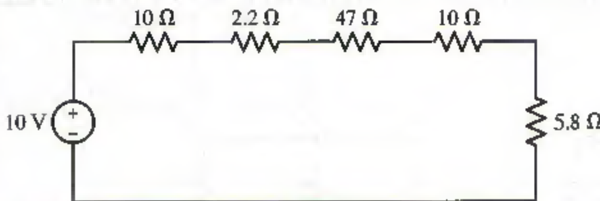
Su operación es sencilla. Los valores de R_1, R_2 y R_3 son conocidos y se desea conocer el valor de R. La resistencia R_3 se ajusta hasta que $i_m = 0$; en otras palabras, hasta que no fluya corriente a través del amperímetro. En este punto se dice que el puente se encuentra "balanceado".

Utilizando la LCK y la LVK, demuestre que $R = \frac{R_2}{R_1} R_3$. (Sugerencias: El valor de V_s es irrelevante; con $i_m = 0$, $i_1 = i_3$ e $i_2 = i_R$; y no existe caída de tensión en el amperímetro.)



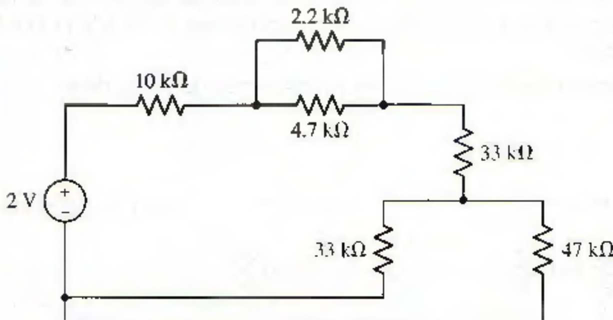
■ **FIGURA 3.95**

66. El circuito de la figura 3.96 está formado por varias resistencias conectadas en serie. Utilizar el divisor de tensión para calcular qué cantidad de tensión decae en la resistencia más pequeña y en la más grande, respectivamente.



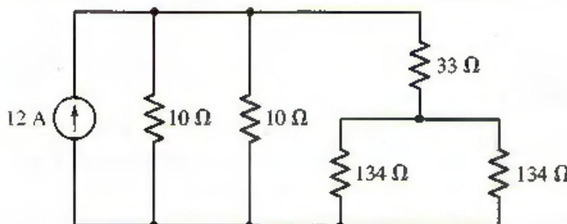
■ **FIGURA 3.96**

67. Utilizar el divisor de tensión para calcular la tensión en la resistencia de 47 kΩ de la figura 3.97.



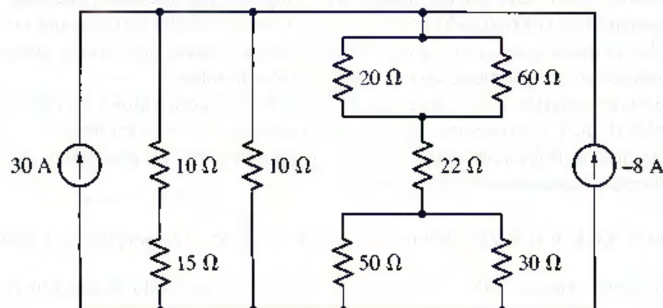
■ **FIGURA 3.97**

68. Con referencia al circuito que se muestra en la figura 3.98, utilizar el divisor de corriente para calcular la corriente que fluye hacia abajo a través de (a) la resistencia de 33 Ω y (b) la resistencia de 134 Ω que se encuentra a la derecha.



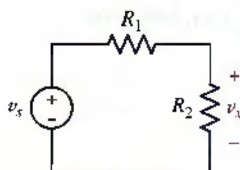
■ **FIGURA 3.98**

69. Aparentemente, a pesar del gran número de componentes del circuito de la figura 3.99, solamente es de interés la tensión en la resistencia de 15 Ω. Utilizar el divisor de corriente para calcular el valor correcto.

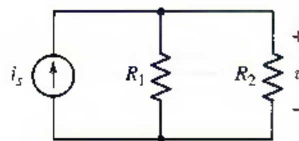


■ FIGURA 3.99

70. Elegir dentro de los siguientes valores de resistencia (pueden utilizarse más de una vez) para fijar v_s, R_1 y R_2 en la figura 3.100 y obtener $v_x = 5.5$ V. [1 kΩ, 3.3 kΩ, 4.7 kΩ, 10 kΩ]



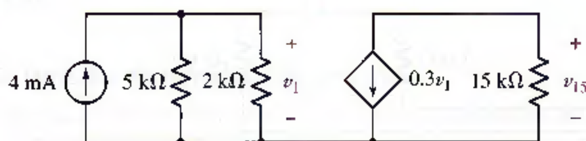
■ FIGURA 3.100



■ FIGURA 3.101

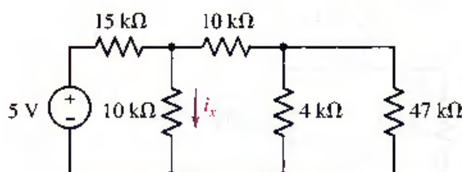
71. Elegir dentro de los siguientes valores de resistencia (se pueden utilizar más de una vez) para establecer i_s, R_1 y R_2 en la figura 3.101 para obtener $v = 5.5$ V. [1 kΩ, 3.3 kΩ, 4.7 kΩ, 10 kΩ]

72. Determinar la potencia que disipa (o absorbe) la resistencia de 15 kΩ de la figura 3.102.



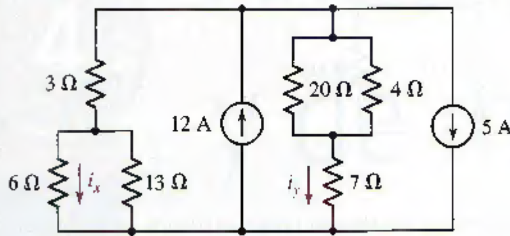
■ FIGURA 3.102

73. En el circuito en la figura 3.103, determinar i_x y calcular la potencia disipada (absorbida) por la resistencia de 15 kΩ.



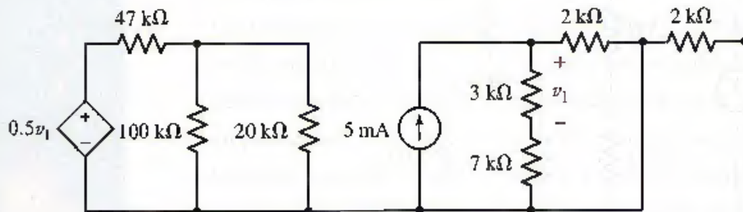
■ FIGURA 3.103

74. En el circuito de la figura 3.104, determinar i_x, i_y, y la potencia disipada (absorbida) por la resistencia de 3 Ω.



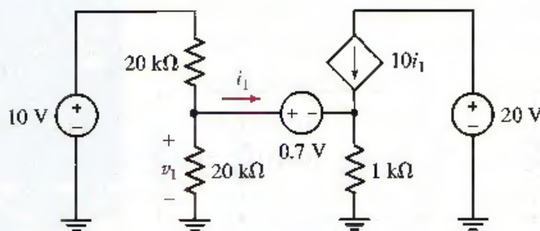
■ **FIGURA 3.104**

75. ¿Cuál es la potencia disipada (absorbida) por la resistencia de 47 kΩ de la figura 3.105?

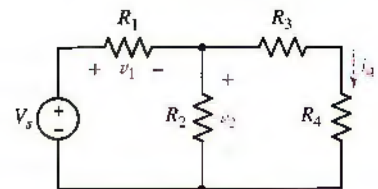


■ **FIGURA 3.105**

76. Explicar por qué no es posible utilizar la división de tensión para determinar v_1 en la figura 3.106.



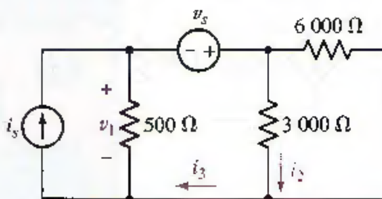
■ **FIGURA 3.106**



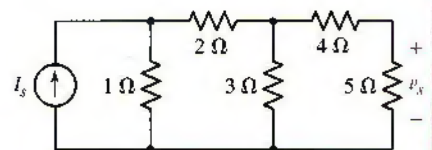
■ **FIGURA 3.107**

77. Utilizar las divisiones de corriente y de tensión del circuito de la figura 3.107 a fin de obtener la expresión de (*a*) v_2; (*b*) v_1; (*c*) i_4.

78. Con referencia a los circuitos indicados en la figura 3.108: (*a*) sea $v_s = 40$ V, $i_s = 0$, determinar v_1; (*b*) sea $v_s = 0$, $i_s = 3$ mA, calcular i_2 e i_3.



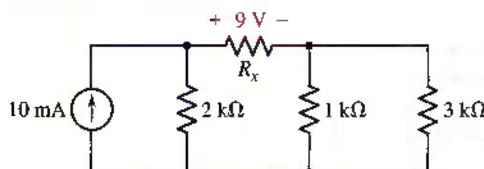
■ **FIGURA 3.108**



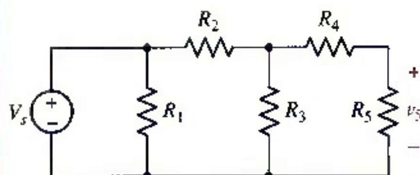
■ **FIGURA 3.109**

79. En la figura 3.109: (*a*) sea $v_x = 10$ V y determinar I_s; (*b*) sea $I_s = 50$ A y proporcionar v_x; (*c*) calcular la proporción v_x/I_s.

80. Determinar la cantidad de potencia que absorbe R_x en el circuito de la figura 3.110.



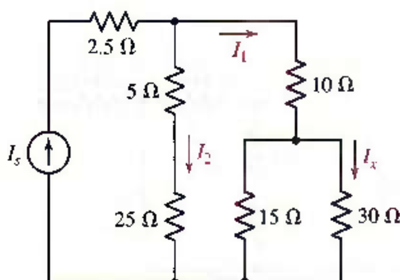
■ **FIGURA 3.110**



■ **FIGURA 3.111**

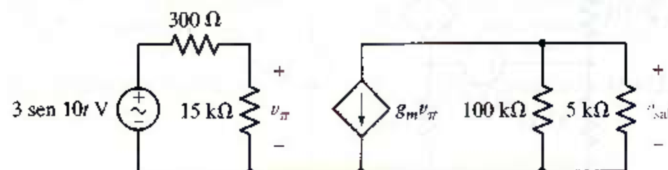
81. Utilizar las divisiones de corriente y de tensión como auxiliares para obtener una expresión correspondiente a v_5 en la figura 3.111.

82. Con referencia al circuito de la figura 3.112, determinar (*a*) I_x si $I_1 = 12$ mA; (*b*) I_1 si $I_x = 12$ mA; (*c*) I_x si $I_2 = 15$ mA; (*d*) I_x si $I_s = 60$ mA.



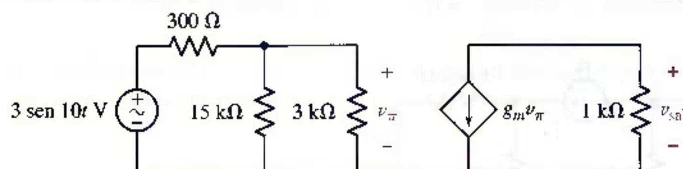
■ **FIGURA 3.112**

83. El de la figura 3.113 es un circuito equivalente que se usa a menudo para hacer un modelo del comportamiento en ca de un circuito amplificador MOSFET. Si $g_m = 4$ m℧, calcular v_{sal}.



■ **FIGURA 3.113**

84. El circuito de la figura 3.114 es un circuito equivalente que se suele utilizar para modelar el comportamiento en ca de un circuito amplificador de transistor de unión bipolar. Si $g_m = 38$ m℧, calcular v_{sal}.



■ **FIGURA 3.114**

CAPÍTULO 4

Análisis nodal y de malla básicos

CONCEPTOS CLAVE

- Análisis nodal.
- Técnica del supernodo.
- Análisis de malla.
- Técnica de la supermalla.
- Selección entre análisis nodal y de malla.
- Análisis asistido por computadora incluyendo PSpice y MATLAB.

INTRODUCCIÓN

Una vez que se conocen las leyes de Ohm y de Kirchhoff, el análisis de un circuito lineal simple para obtener información útil acerca de la corriente, la tensión o la potencia asociadas con un elemento en particular comienza a parecer una misión muy directa. Al menos hasta ahora, cada circuito parece ser único y requiere (hasta cierto punto) un grado de creatividad en el momento de realizar el análisis. En este capítulo se explicarán dos técnicas básicas de análisis de circuitos —el ***análisis nodal*** y el ***análisis de malla***— las cuales permiten analizar una gran cantidad de circuitos de una manera metódica y coherente. El resultado que se obtiene es un análisis más directo, un nivel de complejidad más uniforme en las ecuaciones, un menor número de errores y, quizás, lo más importante, una menor ocurrencia de "*¡Todavía no sé cómo empezar!*"

La mayor parte de los circuitos con los que se ha practicado son simples y (siendo honestos) de importancia práctica cuestionable; sin embargo, resultan útiles como ayuda para aprender a aplicar las técnicas fundamentales. Aunque los circuitos más complejos que aparecen en este capítulo pueden representar una gran variedad de sistemas eléctricos incluyendo circuitos de control, redes de comunicaciones, motores o circuitos integrados, así como modelos de circuitos eléctricos de sistemas no eléctricos, es mejor no profundizar en esos detalles específicos en esta etapa inicial. En lugar de lo anterior, es importante enfocarse en la *metodología para resolver problemas* que se desarrollará a lo largo de este libro.

4.1 ANÁLISIS NODAL

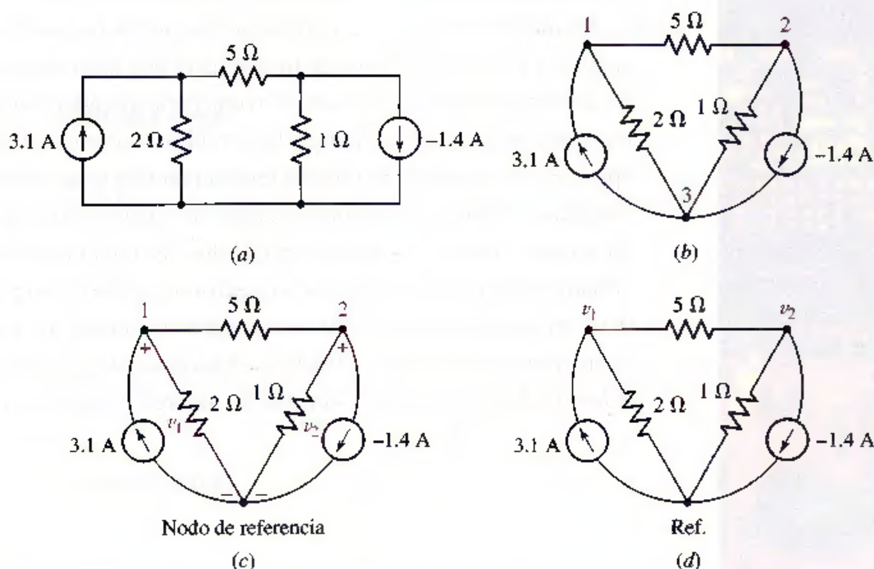
El estudio de métodos generales para el análisis metódico de circuitos se inicia con un método poderoso basado en LKC, llamado ***análisis nodal***. En el capítulo anterior se presentó el análisis de un circuito simple que contenía sólo dos nodos. Así se descubrió que el principal paso del análisis se presentaba cuando se obtenía una ecuación simple en términos de una incógnita simple: la tensión entre el par de nodos.

Se dejará que aumente el número de nodos y se proporcionará de manera correspondiente una cantidad desconocida adicional y una ecuación extra para cada nodo agregado. De tal modo, un circuito de tres nodos tendrá dos tensiones desconocidas y dos ecuaciones; uno de 10 nodos constará de nueve tensiones desconocidas y nueve ecuaciones; un circuito de N nodos se formará con $(N - 1)$ tensiones y $(N - 1)$ ecuaciones. Cada ecuación es una ecuación LCK simple.

Para ilustrar la mecánica básica de esta técnica, considere el circuito de tres nodos que se muestra en la figura 4.1*a*, que se dibuja nuevamente en la figura 4.1*b* para destacar el hecho de que sólo hay tres nodos, numerados de manera correspondiente. El objetivo será determinar la tensión en cada elemento y el paso siguiente del análisis es crítico. Se designa un nodo como ***nodo de referencia***; en este caso será la terminal negativa de las tensiones nodales $N - 1 = 2$ como se muestra en la figura 4.1*c*.

Se logra otra pequeña simplificación en las ecuaciones resultantes si el nodo conectado al mayor número de ramas se identifica como el nodo de referencia. Si hay un nodo de conexión a tierra, a menudo resulta más conveniente elegirlo como el nodo de referencia, aunque mucha gente prefiere seleccionar el nodo inferior de un circuito como la referencia, especialmente si no se especifica una tierra explícita.

La tensión del nodo 1 *en relación con el nodo de referencia* se define como v_1 y v_2 se define como la tensión del nodo 2 con respecto al nodo de referencia.



■ **FIGURA 4.1** (*a*) Circuito simple de tres nodos. (*b*) Dibujo del circuito en donde se hace hincapié en los nodos. (*c*) Nodo de referencia elegido y tensiones asignadas. (*d*) Referencias de tensión abreviadas. Si se desea, un símbolo de conexión a tierra apropiado se podría sustituir por "Ref".

Ambas tensiones son suficientes, puesto que la tensión entre cualquier otro par de nodos puede determinarse en términos de ellos. Por ejemplo, la tensión del nodo 1 con respecto al nodo 2 es $v_1 - v_2$. Las tensiones v_1 y v_2 y sus signos de referencia se muestran en la figura 4.1*c*. Después de marcar el nodo de referencia es una práctica común omitir los signos de referencia para hacerlo más claro; el nodo marcado con la tensión se considera como la terminal positiva (fig. 4.1*d*), lo cual se entiende como un tipo de notación de tensión abreviada.

El nodo de referencia en un diagrama esquemático se define de manera explícita como cero volts. Sin embargo, resulta importante recordar que cualquier terminal puede ser designada como terminal de referencia. En consecuencia, el nodo de referencia está a cero volts con respecto a las otras tensiones nodales definidas, y no necesariamente con respecto a la *conexión a tierra*.

Ahora se aplicará la LCK a los nodos 1 y 2. Este paso se realiza igualando la corriente total que sale del nodo a través de varias resistencias con la corriente de fuente total que entra al nodo. De tal manera que

$$\frac{v_1}{2} + \frac{v_1 - v_2}{5} = 3.1 \qquad [1]$$

o

$$0.7v_1 - 0.2\,v_2 = 3.1 \qquad [2]$$

En el nodo 2 se obtiene

$$\frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_1}{5} = -(-1.4) \qquad [3]$$

o

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = 1.4 \qquad [4]$$

Las ecuaciones [2] y [4] son las dos deseadas con dos incógnitas, y además se pueden resolver con facilidad. Los resultados son $v_1 = 5$ V y $v_2 = 2$ V.

A partir de este punto, se determina de manera directa la tensión en la resistencia de 5 Ω resistor: $v_{5\Omega} = v_1 - v_2 = 3$ V. Las corrientes y las potencias absorbidas también se pueden calcular en un paso.

En este punto se debe observar que existe más de una forma de escribir las ecuaciones LCK en el análisis nodal. Por ejemplo, el lector preferirá sumar todas las corrientes que ingresan a un determinado nodo y fijar esta cantidad a un valor cero. Por lo tanto, se pudo haber escrito para el nodo 1:

$$3.1 - \frac{v_1}{2} - \frac{v_1 - v_2}{5} = 0$$

o

$$3.1 + \frac{-v_1}{2} + \frac{v_2 - v_1}{5} = 0$$

las cuales son equivalentes a la ecuación [1]. *¿Es una forma mejor que la otra?* Cada profesor y cada estudiante tiene una preferencia personal y, al final de cuentas, lo más importante es ser congruente. Los autores prefieren construir ecuaciones LCK para el análisis nodal de una manera tal que al final tengan todos los términos de fuentes de corriente de un lado y todos los términos de resistencia por otro. Específicamente,

Σ de corrientes que ingresan al nodo de las fuentes de corriente
= Σ de corrientes que abandonan el nodo a través de resistencias

Este método tiene varias ventajas. Primero, no puede existir confusión alguna con respecto a que si un término deba ser "$v_1 - v_2$" o "$v_2 - v_1$"; la primera tensión de cada expresión de corriente de resistencia corresponde al nodo para el

que se está escribiendo una expresión LCK, como se puede ver en las ecuaciones [1] y [3]. Segundo, permite verificar rápidamente que un término no se haya eliminado de manera accidental. Simplemente se deben contar las fuentes de corriente conectadas a un nodo y después las resistencias; además, agruparlas en la forma en que se mencionó hace un poco más fácil la comparación.

EJEMPLO 4.1

Determinar la corriente que fluye de izquierda a derecha a través de la resistencia de 15 Ω de la figura 4.2*a*.

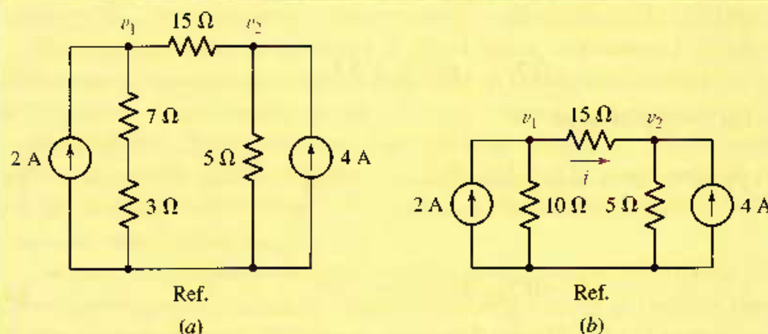


FIGURA 4.2 (*a*) Circuito de cuatro nodos que contiene dos fuentes de corriente independientes. (*b*) Las dos resistencias en serie se reemplazan por una sola resistencia de 10 Ω para reducir a tres nodos el circuito.

El análisis nodal arrojará valores numéricos para las tensiones nodales v_1 y v_2, y la corriente deseada está dada por $i = (v_1 - v_2)/15$.

Sin embargo, antes de comenzar el análisis nodal, se puede observar que no es de interés conocer los detalles respecto de las resistencias de 7 Ω y de 3 Ω. Por lo tanto, se pueden reemplazar sus combinaciones serie por una resistencia de 10 Ω como se muestra en la figura 4.2*b*. El resultado es una reducción del número de ecuaciones que se deben resolver.

Se escribe la ecuación LCK apropiada del nodo 1,

$$2 = \frac{v_1}{10} + \frac{v_1 - v_2}{15} \qquad [5]$$

y del nodo 2,

$$4 = \frac{v_2}{5} + \frac{v_2 - v_1}{15} \qquad [6]$$

Simplificando, se obtiene

$$5v_1 - 2v_2 = 60$$

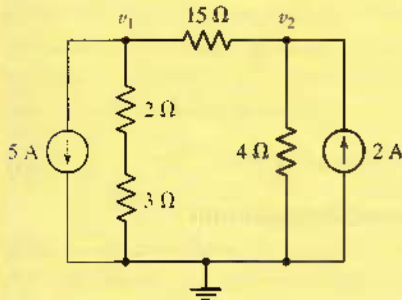
y

$$-v_1 + 4v_2 = 60$$

Despejando, se encuentra que $v_1 = 20$ V y $v_2 = 20$ de tal forma que $v_1 - v_2 = 0$. En otras palabras, ¡en este circuito fluye una ***corriente cero*** a través de la resistencia de 15 Ω!

PRÁCTICA

4.1 Determinar las tensiones nodales v_1 y v_2 del circuito de la figura 4.3.



■ **FIGURA 4.3**

Respuesta: $v_1 = -145/8$ V, $v_2 = 5/2$ V.

A continuación se aumentará el número de nodos de manera que se utilice esta técnica para resolver un problema un poco más difícil.

EJEMPLO 4.2

Determinar las tensiones de nodo del circuito de la figura 4.4*a*.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

Hay cuatro nodos en este circuito. Si se elige el nodo inferior como referencia, se deben marcar los otros tres como se indica en la figura 4.4*b*. El circuito también se volvió a dibujar parcialmente por conveniencia.

▶ ***Recopilar la información conocida.***

Hay tres tensiones desconocidas, v_1, v_2 y v_3. Todas las fuentes de corriente y las resistencias tienen valores designados, las cuales se marcan sobre el esquema.

▶ ***Elaborar un plan.***

Este problema es bastante apropiado para la técnica del análisis nodal que se acaba de presentar, ya que es factible escribir tres ecuaciones LCK independientes en términos de las fuentes de corriente y de la corriente a través de cada resistencia.

▶ ***Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.***

Se empieza escribiendo una ecuación LCK para el nodo 1:

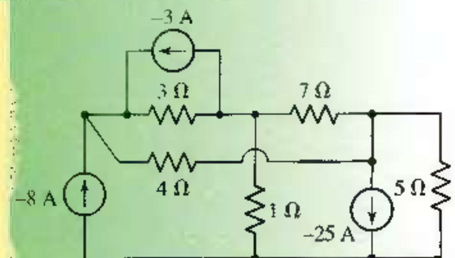
$$-8 - 3 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

o

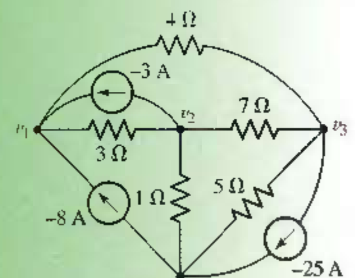
$$0.5833v_1 - 0.3333v_2 - 0.25v_3 = -11 \qquad [7]$$

En el nodo 2:

$$-(-3) = \frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 4.4** (*a*) Circuito de cuatro nodos. (*b*) Dibujo del circuito con el nodo de referencia elegido y las tensiones marcadas.

(*Continúa en la siguiente página*)

o

$$-0.3333v_1 + 1.4762v_2 - 0.1429v_3 = 3 \qquad [8]$$

Y, en el nodo 3:

$$-(-25) = \frac{v_3}{5} + \frac{v_3 - v_2}{7} + \frac{v_3 - v_1}{4}$$

o, de manera más simple,

$$-0.25v_1 - 0.1429v_2 + 0.5929v_3 = 25 \qquad [9]$$

Determinar si se requiere de información adicional.

Hay tres ecuaciones con tres incógnitas. Siempre y cuando éstas sean independientes, lo anterior es suficiente para determinar las tres tensiones.

Intentar obtener la solución.

Las ecuaciones [7] a la [9] se resuelven mediante la eliminación sucesiva de variables, el método de matrices o por medio de la *regla de Cramer y los determinantes.* Si se emplea el último método, descrito en el apéndice 2, se tiene:

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -0.3333 & -0.2500 \\ 3 & 1.4762 & -0.1429 \\ 25 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.2500 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.2500 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}} = \frac{1.714}{0.3167} = 5.412 \text{ V}$$

De manera similar,

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -11 & -0.2500 \\ -0.3333 & 3 & -0.1429 \\ -0.2500 & 25 & 0.5929 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{2.450}{0.3167} = 7.736 \text{ V}$$

y

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -11 \\ -0.3333 & 1.4762 & 3 \\ -0.2500 & -0.1429 & 25 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{14.67}{0.3167} = 46.32 \text{ V}$$

Verificar la solución. ¿Es razonable o es la que se esperaba?

Una forma de verificar parte de la solución consiste en resolver las tres ecuaciones mediante otra técnica. Más allá de eso, ¿es posible determinar si las tensiones son valores "razonables"? Existe una corriente máxima posible de $3 + 8 + 25 = 36$ amperes en cualquier punto del circuito. La resistencia más grande es de 7 Ω, de modo que no es posible esperar ninguna magnitud de tensión superior a $7 \times 36 = 252$ V.

Desde luego, existen numerosos métodos disponibles para resolver sistemas de ecuaciones lineales, algunos de los cuales se describen detalladamente en el apéndice 2. Antes del advenimiento de la calculadora científica, la regla de Cramer que se utilizó en el ejemplo 4.2 era muy común para analizar circuitos, aunque a veces era muy tediosa en su implementación. Sin embargo, es muy sencillo utilizarla en una calculadora de cuatro funciones, por lo que es muy valioso

conocer esta técnica. Por otro lado MATLAB, aunque no es muy probable que se encuentre a la mano durante un examen, es un paquete de software muy poderoso que simplifica enormemente el proceso de solución; en el apéndice 6 se proporciona un breve tutorial para comenzar.

Para el escenario que se menciona en el ejemplo 4.2, existen varias opciones disponibles con MATLAB. Como primer paso, se pueden representar las ecuaciones [7]–[9] en ***forma matricial***:

$$\begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

de modo que,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

En MATLAB se escribe

```
>> a = [0.5833 -0.3333 -0.25; -0.3333 1.4762 -0.1429; -0.25 -0.1429 0.5929];
>> c = [-11; 3; 25];
>> b = a^-1 * c
b =
    5.4124
    7.7375
   46.3127
>>
```

donde espacios separan a los elementos a lo largo de las filas y un punto y coma separan las filas. La matriz denominada **b**, a la cual también se le conoce como ***vector*** puesto que tiene sólo una columna, es nuestra solución. Por ende, $v_1 = 5.412$ V, $v_2 = 7.738$ V y $v_3 = 46.31$ V (se ha incurrido en un error por redondeo).

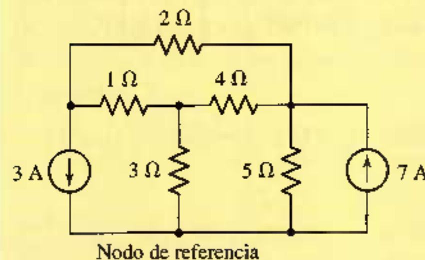
Se pudo haber utilizado las ecuaciones LKC como se escribieron al principio si se emplea al procesador simbólico de MATLAB.

```
>> eqn1 = '-8 -3 = (v1 - v2)/ 3 + (v1 - v3)/ 4';
>> eqn2 = '-(-3) = (v2 - v1)/ 3 + v2/ 1 + (v2 - v3)/ 7';
>> eqn3 = '-(-25) = v3/ 5 + (v3 - v2)/ 7 + (v3 - v1)/ 4';
>> answer = solve(eqn1, eqn2, eqn3, 'v1', 'v2', 'v3');
>> answer.v1
ans =
720/133
>> answer.v2
ans =
147/19
>> answer.v3
ans =
880/19
>>
```

lo que resulta en respuestas exactas, sin errores por redondeo. La rutina *solve()* se invoca con la lista de ecuaciones simbólicas que se nombran como eqn1, eqn2 y eqn3; sin embargo, deben especificarse también las variables $v1$, $v2$ y $v3$. Si a *solve()* se le llama con un menor número de variables que de ecuaciones, se obtiene una solución algebraica. Vale la pena hacer un rápido comentario respecto de la forma de la solución; en el argot de programación, se refiere como algo que se conoce como una *estructura;* en este caso, a dicha estructura se le llama "respuesta". Se accede a cada componente de la estructura de manera separada por nombre, como se muestra.

PRÁCTICA

4.2 Calcular la tensión en cada fuente de corriente del circuito de la figura 4.5.



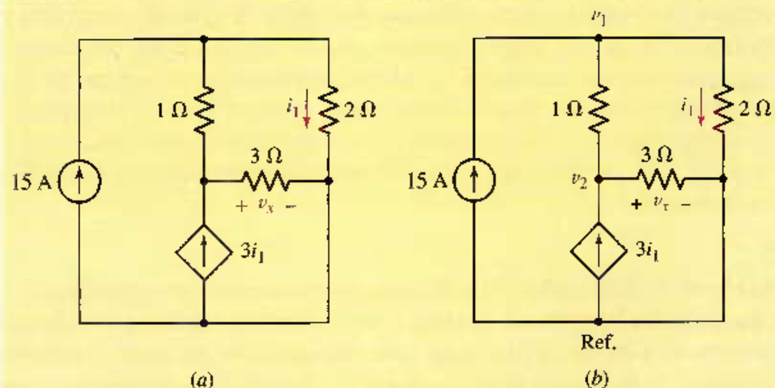
■ **FIGURA 4.5**

Respuesta: $v_{3A} = 5.235$ V; $v_{7A} = 11.47$ V.2

Los ejemplos anteriores han demostrado el método básico para realizar el análisis nodal, pero vale la pena considerar qué pasa si las fuentes dependientes también se encuentran presentes.

EJEMPLO 4.3

Determinar la potencia proporcionada por la fuente dependiente de la figura 4.6*a*.



■ **FIGURA 4.6** (*a*) Circuito de cuatro nodos que contiene una fuente de corriente dependiente. (*b*) Circuito marcado para el análisis nodal.

Se selecciona el nodo inferior como referencia, ya que cuenta con el número más grande de conexiones ramales y se procede a marcar las tensiones nodales v_1 y v_2 como se muestra en la figura 4.6*b*. La cantidad marcada v_x es, en realidad, igual a v_2.

En el nodo 1 se escribe

$$15 = \frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1}{2} \qquad [10]$$

y en el nodo 2,

$$3i_1 = \frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \qquad [11]$$

Desafortunadamente, sólo hay dos ecuaciones pero con tres incógnitas, lo cual *es el resultado directo de la presencia de la fuente de corriente dependiente, puesto que no está controlada por una tensión nodal.* Por ende, es necesario desarrollar una ecuación adicional que relacione i_1 con una o más tensiones nodales.

En este caso se encuentra que

$$i_1 = \frac{v_1}{2} \qquad [12]$$

la cual sustituyéndola en la ecuación [11] obtenemos (con un poco de simplificación)

$$3v_1 - 2v_2 = 30 \qquad [13]$$

y la ecuación [10] se simplifica en

$$-15v_1 + 8v_2 = 0 \qquad [14]$$

Despejando, se encuentra que $v_1 = -40$ V, $v_2 = -75$ V e $i_1 = 0.5v_1 = -20$ A. Por lo tanto, la potencia suministrada por la fuente dependiente es igual a $(3i_1)(v_2) = (-60)(-75) = 4.5$ kW.

Se puede observar que la presencia de una fuente dependiente originará la necesidad de una ecuación adicional en el análisis si la cantidad controladora no es una tensión nodal. Ahora veamos el mismo circuito, pero con la variable controladora de la fuente de corriente dependiente cambiada a otro valor: la tensión de la resistencia de 3 Ω, la cual es de hecho una tensión nodal. Se encontrará que solamente se requieren *dos* ecuaciones para terminar el análisis.



EJEMPLO 4.4

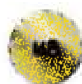
Determinar la potencia suministrada por la fuente dependiente de la figura 4.7*a*.

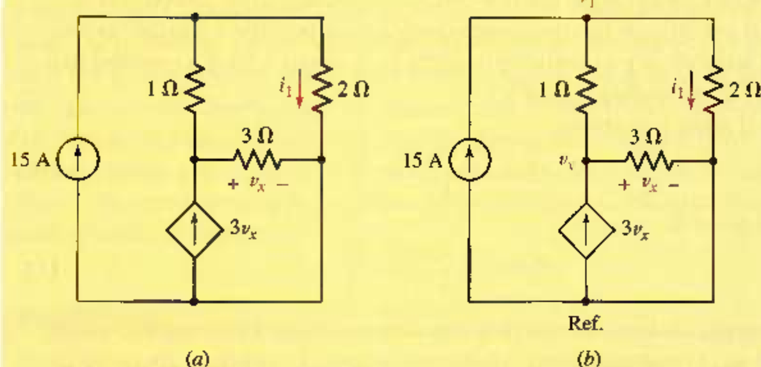
Se selecciona el nodo inferior como nuestra referencia y se marcan las tensiones nodales como se muestra en la figura 4.7*b*. Se ha marcado la tensión nodal v_x explícitamente para efectos de claridad, pero no es necesaria esta redundancia. Obsérvese que la selección del nodo de referencia es importante en este caso; esto lleva a la cantidad v_x la cual es una tensión nodal.

La ecuación LCK del nodo 1 es,

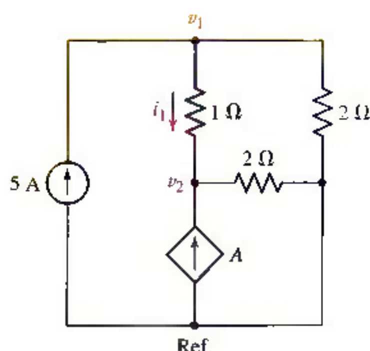
$$15 = \frac{v_1 - v_x}{1} + \frac{v_1}{2} \qquad [15]$$

(Continúa en la siguiente página)





■ **FIGURA 4.7** (*a*) Circuito de cuatro nodos que contiene una fuente de corriente dependiente. (*b*) Circuito marcado para el análisis nodal.



■ **FIGURA 4.8**

y la del nodo *x* es

$$3v_x = \frac{v_x - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \qquad [16]$$

Si se agrupan términos y se despeja, se encuentra que $v_1 = \frac{50}{7}$ V y $v_x = -\frac{30}{7}$ V. Por lo tanto, la fuente dependiente de este circuito genera $(3v_x)(v_x) = 55.1$ W.

PRÁCTICA

4.3 Determinar la tensión nodal del circuito de la figura 4.8 v_1 si *A* es (*a*) $2i_1$; (*b*) $2v_1$.

Respuesta: (*a*) $\frac{70}{9}$ V; (*b*) −10 V.

Resumen del procedimiento básico del análisis nodal

1. **Contar el número de nodos** (*N*).
2. **Designar un nodo de referencia.** El número de términos en sus ecuaciones nodales pueden minimizarse seleccionando el nodo con el mayor número de ramas conectadas a él.
3. **Marcar las tensiones nodales** (Existen $N - 1$ tensiones).
4. **Escribir una ecuación de LCK de cada uno de los nodos excepto el de referencia.** Sumar las corrientes que fluyen hacia un nodo desde las fuentes en un miembro de la ecuación. Del otro lado, sumar las corrientes que circulan *hacia afuera* del nodo a través de las resistencias. Poner particular atención a los signos "−".
5. **Expresar cualquier incógnita adicional como corrientes o tensiones excepto tensiones nodales en términos de tensiones nodales apropiadas.** Esta situación puede presentarse si en el circuito hay fuentes de tensión o fuentes dependientes.
6. **Organizar las ecuaciones.** Agrupándolas de acuerdo con las tensiones nodales.
7. **Resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las tensiones nodales** (Existen $N - 1$ tensiones).

Estos siete pasos básicos funcionarán bien en cualquier circuito que se encuentre, aunque se requerirá de especial cuidado si se presentan fuentes de tensión. En la sección 4.2 se analizan dichas situaciones.

4.2 EL SUPERNODO

A continuación se considera cómo las fuentes de tensión afectan la estrategia del análisis nodal.

Como un ejemplo común, considerar el circuito de la figura 4.9*a*. El circuito original de cuatro nodos de la figura 4.4 se cambió al sustituir la resistencia de 7 Ω entre los nodos 2 y 3 por una fuente de tensión de 22 V. Seguir asignando el mismo nodo a las tensiones de referencia v_1, v_2 y v_3. Antes, el siguiente paso era la aplicación de la LCK en cada uno de los nodos de no referencia. Si se trata de hacerlo otra vez, surgirán algunas dificultades en los nodos 2 y 3, ya que no se conoce cuál es la corriente en la rama con la fuente de tensión. No hay manera de que se pueda expresar la corriente como una función de la tensión, ya que la definición de una fuente de tensión señala precisamente que la tensión es independiente de la corriente.

Hay dos modos de salir de este dilema. El método más complicado consiste en asignar una corriente desconocida a la rama que contiene la fuente de tensión, proseguir para aplicar tres veces la LCK y luego aplicar una vez la LVK ($v_3 - v_2 = 22$) entre los nodos 2 y 3; el resultado consiste en cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas para este ejemplo.

El método más sencillo considera al nodo 2, al nodo 3 y a la fuente de tensión en conjunto como una especie de ***supernodo*** y se aplica la LCK en ambos nodos al mismo tiempo; el supernodo se indica por medio de una región encerrada por la línea punteada de la figura 4.9*a*. Esto es en verdad posible, debido a que si la corriente total que sale del nodo 2 es cero y la corriente total que sale del nodo 3 es nula, entonces la corriente total que sale de la combinación de los dos nodos es igual a cero. Este concepto se describe de manera gráfica en la vista ampliada de la figura 4.9*b*.

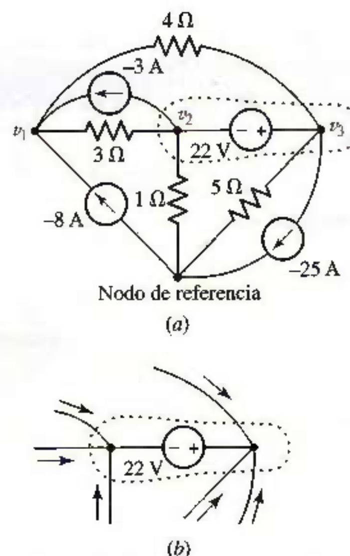


FIGURA 4.9 (*a*) Circuito del ejemplo 4.2 con una fuente de 22 V en lugar de la resistencia de 7 Ω. (*b*) Vista ampliada de la región definida como supernodo; la LCK requiere que todas las corrientes que fluyan hacia la región sumen cero, pues de otra forma los electrones se apilarían o desaparecerían.

EJEMPLO 4.5

Determinar el valor de la tensión del nodo desconocido v_1 del circuito de la figura 4.9*a*.

La ecuación de la LCK del nodo 1 no presenta cambio respecto del ejemplo 4.2:

$$-8 - 3 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

o

$$0.5833v_1 - 0.3333v_2 - 0.2500v_3 = -11 \qquad [17]$$

A continuación se considera el supernodo 2,3. Se encuentran conectadas dos fuentes de tensión y cuatro resistencias. Por lo tanto,

$$3 + 25 = \frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_3 - v_1}{4} + \frac{v_3}{5} + \frac{v_2}{1}$$

o

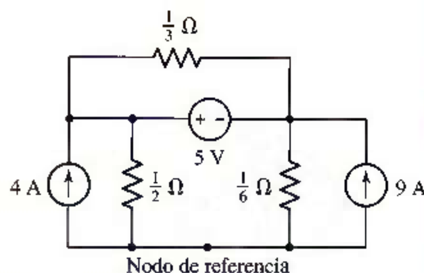
$$-0.5833v_1 + 1.3333v_2 + 0.45v_3 = 28 \qquad [18]$$

(Continúa en la siguiente página)

Puesto que hay tres incógnitas, se necesita una ecuación adicional, y además debe aprovecharse el hecho de que hay una fuente de tensión de 22 V entre los nodos 2 y 3:

$$v_2 - v_3 = -22 \qquad [19]$$

Al resolver las ecuaciones de [17] a [19], la solución de v_1 es 1.071 V.



■ **FIGURA 4.10**

PRÁCTICA

4.4 Calcular la tensión en cada fuente de corriente del circuito de la figura 4.10.

Respuesta: 5.375 V, 375 mV.



De ese modo, la presencia de una fuente de tensión reduce en uno el número de nodos de no referencia en los que se debe aplicar la LCK, sin que importe si la fuente de tensión se extiende entre dos nodos de no referencia o si está conectada entre un nodo y la referencia. También es necesario ser cuidadosos cuando se analizan circuitos como el del problema de práctica 4.4. Puesto que ambos extremos de la resistencia son parte del supernodo, desde un punto de vista técnico debe haber dos términos de corriente correspondientes en la ecuación LCK, aunque se cancelan entre sí. Se puede resumir el método del supernodo de la manera siguiente:

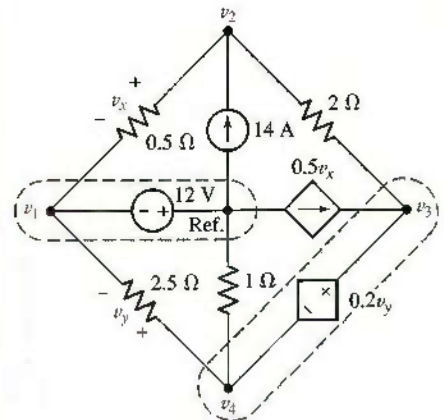
Resumen del procedimiento de análisis del supernodo

1. **Contar el número de nodos** (N).
2. **Designar un nodo de referencia.** El número de términos en sus ecuaciones nodales pueden minimizarse seleccionando el nodo con el mayor número de ramas conectadas a él.
3. **Marcar las tensiones nodales** (habrá $N - 1$ tensiones).
4. **Si el circuito cuenta con fuentes de tensión, construir un supernodo alrededor de cada una.** Para hacer esta tarea debe encerrarse la fuente, sus dos terminales y cualquier otro elemento conectado entre las dos terminales dentro de un cuadro dibujado con línea punteada.
5. **Escribir una ecuación LCK de cada nodo de no referencia y de cada supernodo que *no contenga el nodo de referencia.*** Sumar las corrientes que circulen *hacia* un nodo/supernodo desde las fuentes de corriente en un miembro de la ecuación. En el otro miembro, sumar las corrientes que circulen hacia *afuera* del nodo/supernodo a través de las resistencias. Poner particular atención a los signos "−".
6. **Relacionar la tensión en cada fuente de tensión con las tensiones nodales.** Esta tarea se lleva a cabo aplicando LVK; es necesaria una ecuación por cada supernodo definido.
7. **Expresar cualquier incógnita adicional (es decir, corrientes o tensiones diferentes a las tensiones nodales) en términos de las tensiones nodales apropiadas.** Esta situación puede presentarse si existen fuentes dependientes en nuestro circuito.
8. **Organizar las ecuaciones.** Agrupar términos de acuerdo con las tensiones nodales.
9. **Resolver el sistema de ecuaciones para obtener las tensiones nodales** (habrá $N - 1$ ecuaciones).

Se puede observar que se han agregado dos pasos adicionales al procedimiento general de análisis nodal. Sin embargo, en realidad, la aplicación de la técnica del supernodo a un circuito que contenga fuentes de tensión no conectadas al nodo de referencia dará como resultado una reducción del número de ecuaciones LCK que sean necesarias. Tomando en cuenta lo anterior, considérese el circuito de la figura 4.11, que contiene los cuatro tipos de fuentes y cuenta con cinco nodos.

EJEMPLO 4.6

Determinar las tensiones entre cada nodo y el de referencia en el circuito de la figura 4.11.



■ **FIGURA 4.11** Circuito con cinco nodos con cuatro tipos diferentes de fuentes.

Después de establecer un supernodo en torno a cada fuente de *tensión* es necesario escribir ecuaciones de LCK sólo del nodo 2 y del supernodo que contiene a la fuente de tensión dependiente. Por inspección, está claro que $v_1 = -12$ V.

En el nodo 2,

$$\frac{v_2 - v_1}{0.5} + \frac{v_2 - v_3}{2} = 14 \qquad [20]$$

mientras en el supernodo 3-4,

$$0.5v_x = \frac{v_3 - v_2}{2} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_4 - v_1}{2.5} \qquad [21]$$

A continuación se relacionan las tensiones de fuente con las tensiones de nodo:

$$v_3 - v_4 = 0.2v_y \qquad [22]$$

y,

$$0.2v_y = 0.2(v_4 - v_1) \qquad [23]$$

Por último, se expresa la fuente de corriente dependiente en términos de las variables asignadas:

$$0.5v_x = 0.5(v_2 - v_1) \qquad [24]$$

Cinco nodos requieren *cuatro* ecuaciones LKC en el análisis nodal general, pero se ha reducido este requerimiento a *sólo dos,* ya que se formaron dos supernodos separados. Cada supernodo requiere una ecuación LVK (ecuación [22] y $v_1 = -12$, esta última escrita por inspección). Ninguna de las fuentes dependientes estuvo controlada por una tensión nodal, por lo que se necesitaron dos ecuaciones adicionales como resultado.

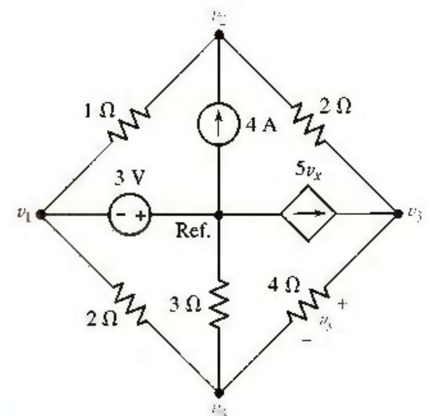
Una vez hecho lo anterior, se pueden eliminar v_x y v_y para obtener un conjunto de cuatro ecuaciones con las cuatro tensiones de nodo:

$$\begin{aligned}
-2v_1 + 2.5v_2 - 0.5v_3 \qquad\qquad &= 14 \\
0.1v_1 - \quad v_2 + 0.5v_3 + 1.4v_4 &= 0 \\
v_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= -12 \\
0.2v_1 \qquad + \quad v_3 - 1.2v_4 &= 0
\end{aligned}$$

Despejando, se obtiene $v_1 = -12$ V, $v_2 = -4$ V, $v_3 = 0$ V y $v_4 = -2$ V.

PRÁCTICA

4.5 Determinar las tensiones nodales del circuito de la figura 4.12.



■ **FIGURA 4.12**

Respuesta: $v_1 = 3$ V, $v_2 = 5.09$ V, $v_3 = 1.28$ V, $v_4 = 1.68$ V.

4.3 ANÁLISIS DE MALLA

La técnica del análisis nodal descrita en la sección anterior es muy general, por lo que siempre puede aplicarse a cualquier red eléctrica. Un método alternativo que en ocasiones resulta más fácil de aplicar en ciertos circuitos se conoce como ***análisis de malla.*** Si bien esta técnica no es aplicable a cualquier red, se puede utilizar en la mayor parte de las redes que se quieren analizar. El análisis de malla se aplica sólo en aquellas redes que son de forma plana, un término que es necesario definir.

Si se puede dibujar el esquema de un circuito sobre una superficie plana de manera tal que ninguna rama pase sobre o por debajo de cualquier otra rama, se afirma que es un ***circuito plano*** o de ***forma plana***. Por lo tanto, la figura 4.13*a* muestra una red de forma plana, la 4.13*b* presenta una red de forma no plana y la 4.13*c* muestra también una red de forma plana, aunque se dibuja de modo que parece ser no plana a primera vista.

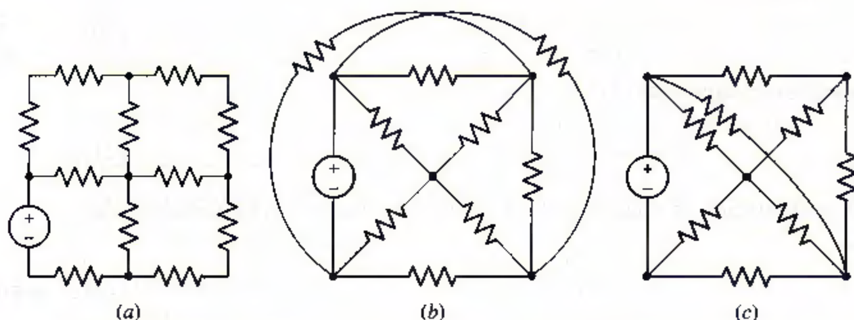


FIGURA 4.13 Ejemplos de redes de forma plana y no planas; los alambres que se cruzan sin que se señalen con un punto grueso no están en contacto físico entre sí.

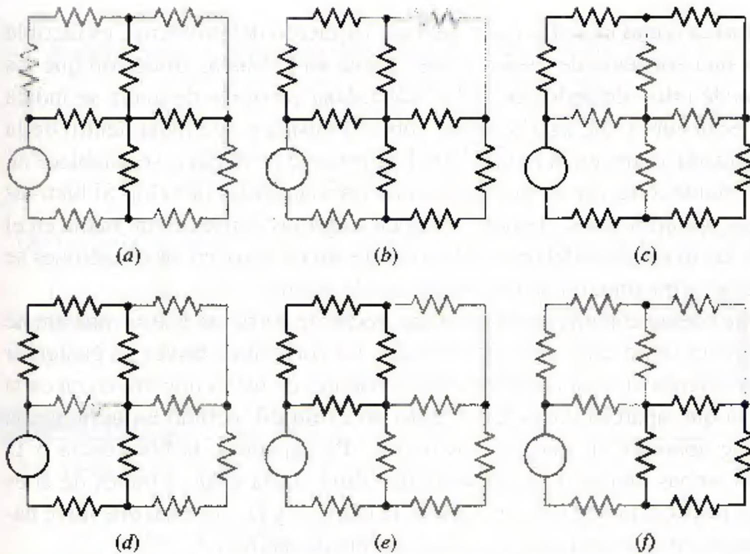
Es necesario mencionar que el análisis tipo malla se aplica a circuitos de forma no plana, pero como no es factible definir un conjunto completo de mallas únicas para este tipo de circuitos, no se pueden asignar corrientes de malla únicas.

En la sección 3.1 se definieron los términos ***trayectoria, trayectoria cerrada*** y ***lazo***. Antes de definir lo que es una malla, se debe considerar el conjunto de ramas dibujadas con líneas gruesas de la figura 4.14. El primer conjunto de ramas no es una trayectoria, puesto que cuatro ramas están conectadas al nodo central, y, desde luego, tampoco constituyen un lazo. El segundo conjunto de ramas no representa una trayectoria, puesto que sólo se recorre pasando dos veces a través del nodo central. Las cuatro trayectorias restantes corresponden a lazos. El circuito contiene 11 ramas.

La ***malla*** es una propiedad de un circuito de forma plana y no se define para un circuito de forma no plana, sino como un lazo que no contiene ningún otro lazo dentro de él. Así, los lazos indicados en la figura 4.14*c* y *d* no son mallas, en tanto que de las partes *e* y *f* sí lo son. Una vez que se ha dibujado un circuito de manera clara en forma plana, a menudo tiene la apariencia de una ventana con hojas de vidrio múltiples; puede considerarse que la frontera de cada vidrio de la ventana es una malla.

Si una red es de forma plana, el análisis de malla se utiliza para llevar a cabo su estudio. Esta técnica implica el concepto de ***corriente de malla,*** que presentamos al considerar el análisis del circuito de dos mallas de la figura 4.15*a*.

Del mismo modo que se procedió en el caso del circuito de un solo lazo, se definirá una corriente a través de una de las ramas. Vamos a denominar i_1 a la corriente que circula hacia la derecha a través de la resistencia de 6 Ω. Se aplicará la LVK alrededor de cada una de las dos mallas, y las dos ecuaciones resultantes son suficientes para determinar las dos corrientes desconocidas. Después



■ **FIGURA 4.14** (*a*) El conjunto de ramas especificadas por líneas gruesas no es ni una trayectoria ni un lazo. (*b*) En este caso, el conjunto de ramas no es una trayectoria, ya que pueden recorrerse sólo al pasar dos veces por el nodo central. (*c*) Esta trayectoria es un lazo pero no una malla, puesto que encierra otros lazos. (*d*) La trayectoria es también un lazo pero no una malla. (*e, f*) Cada una de estas trayectorias es un lazo y una malla.

se define una segunda corriente i_2, que fluye hacia la derecha en la resistencia de 4 Ω. También se podría denominar como i_3 a la corriente que fluye hacia abajo por la rama central, pero resulta evidente, a partir de la LCK, que i_3 puede expresarse en términos de las dos corrientes supuestas antes como $(i_1 - i_2)$. Las corrientes supuestas se muestran en la figura 4.15*b*.

Siguiendo el método de solución para el circuito de un lazo, se aplica ahora la LVK a la malla del lado izquierdo,

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

o

$$9i_1 - 3i_2 = 42 \qquad [25]$$

Aplicando la LVK en la malla del lado derecho,

$$-3(i_1 - i_2) + 4i_2 - 10 = 0$$

o

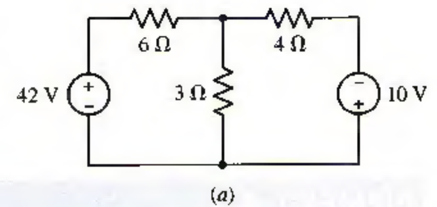
$$-3i_1 + 7i_2 = 10 \qquad [26]$$

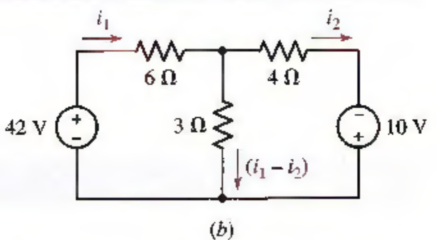
Las ecuaciones [25] y [26] son independientes; no es posible deducir una a partir de la otra. Hay dos ecuaciones y dos incógnitas, y la solución se obtiene sin ninguna dificultad:

$$i_1 = 6 \text{ A} \qquad i_2 = 4 \text{ A} \qquad \text{e} \qquad (i_1 - i_2) = 2 \text{ A}$$

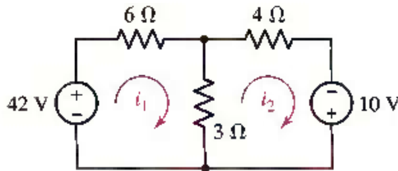
Si el circuito contiene M mallas, entonces se espera tener M corrientes de malla y, por lo tanto, se requerirá escribir M ecuaciones independientes.

A continuación se considerará este mismo problema de una manera un poco diferente, mediante el uso de corrientes de malla. Se define una ***corriente de malla*** como aquella que fluye sólo alrededor del perímetro de una malla. Una de las grandes ventajas en el empleo de las corrientes de malla es el hecho de que la ley de Kirchhoff de corriente se satisface de manera automática. Si una corriente de malla fluye hacia un nodo determinado, también fluye *fuera* de él.





■ **FIGURA 4.15** (*a, b*) Circuito simple para el que se requieren las corrientes.



■ **FIGURA 4.16** El mismo circuito que el de la figura 4.15*b*, pero visto de una manera un poco diferente.

A menudo se identifica una corriente de malla como una corriente de rama, al igual que i_1 e i_2 se identificaron en este ejemplo. Sin embargo, lo anterior no siempre es cierto, pues al considerar una red cuadrada de nueve mallas, la corriente de la malla central no puede identificarse como la corriente de alguna rama.

Si se marca como la malla 1 a la del lado izquierdo del problema, es factible establecer una corriente de malla i_1 que circula en la misma dirección que las manecillas de reloj alrededor de dicha malla. Una corriente de malla se indica por una flecha curva que casi se cierra sobre sí misma y se dibuja dentro de la malla apropiada, como en la figura 4.16. La corriente de malla i_2 se establece en la malla restante, otra vez en la dirección de las manecillas de reloj. Si bien las direcciones son arbitrarias, siempre se deben elegir las corrientes de malla en el sentido de las manecillas del reloj debido a que, en tal caso, en las ecuaciones se produce una cierta simetría de minimización de errores.

Ya no se cuenta con una corriente o una flecha de corriente que se muestre de manera directa sobre cada rama del circuito. La corriente a través de cualquier rama debe determinarse al considerar las corrientes de malla que fluyen en cada malla en la que aparece dicha rama. Esto no es difícil, debido a que ninguna rama puede aparecer en más de dos mallas. Por ejemplo, la resistencia 3 Ω aparece en ambas mallas, y la corriente que fluye hacia abajo a través de él es $i_1 - i_2$. La resistencia 6 Ω sólo aparece en la malla 1, y la corriente que fluye hacia la derecha en esa rama es igual a la corriente de malla i_1.

Para la malla de la izquierda,

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

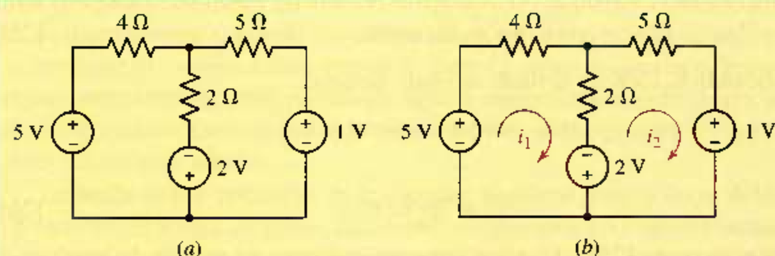
mientras que para la malla derecha,

$$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0$$

así que estas dos ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones [25] y [26].

EJEMPLO 4.7

Determinar la potencia suministrada por la fuente de 2 V de la figura 4.17*a*.



■ **FIGURA 4.17** (*a*) Circuito de dos mallas que contiene tres fuentes. (*b*) Circuito marcado para el análisis de mallas.

Primero definimos dos corrientes de malla en el sentido de las manecillas del reloj en la figura 4.17*b*.

Comenzando en la parte inferior izquierda de la malla 1, se escribe la ecuación LVK siguiente a medida que se procede por las ramas en el sentido de las manecillas del reloj:

$$-5 + 4i_1 + 2(i_1 - i_2) - 2 = 0$$

Se hace lo mismo en la malla 2, por lo cual se puede escribir

$$+2 + 2(i_2 - i_1) + 5i_2 + 1 = 0$$

Simplificando y agrupando términos,

$$6i_1 - 2i_2 = 7$$

y

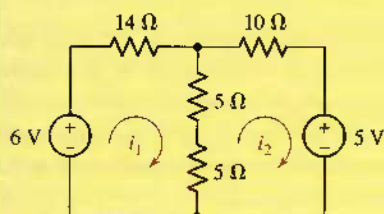
$$-2i_1 + 7i_2 = -3$$

Despejando, se obtiene $i_1 = \frac{43}{38} = 1.132$ A e $i_2 = -\frac{2}{19} = -0.1053$ A.

La corriente que circula hacia afuera de la terminal de referencia positiva de la fuente de 2 V es $i_1 - i_2$. Por lo tanto, la fuente de 2 V suministra $(2)(1.237) = 2.474$ W.

PRÁCTICA

4.6 Determinar i_1 e i_2 en el circuito de la figura 4.18.



■ **FIGURA 4.18**

Respuesta: $i_1 = +184.2$ mA; -157.9 mA.

Examinar en seguida el circuito de cinco nodos, siete ramas y tres mallas que se presenta en la figura 4.19. Es un problema un poco más complicado debido a la malla adicional.

EJEMPLO 4.8

Recurrir al análisis de malla para determinar las tres corrientes de malla en el circuito de la figura 4.19.

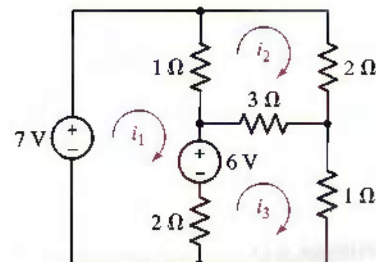
Las tres corrientes de malla requeridas se asignan como se indica en la figura 4.19 y se aplica de manera metódica la LVK en torno a cada malla:

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 6 + 2(i_1 - i_3) = 0$$
$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$
$$2(i_3 - i_1) - 6 + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

Simplificando,

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1$$
$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$
$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6$$

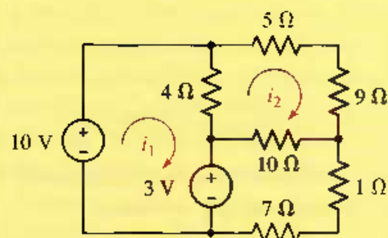
y resolviendo, se obtiene $i_1 = 3$ A, $i_2 = 2$ A e $i_3 = 3$ A.



■ **FIGURA 4.19** Circuito de cinco nodos, siete ramas y tres mallas.

PRÁCTICA

4.7 Determinar i_1 e i_2 en el circuito de la figura 4.20.

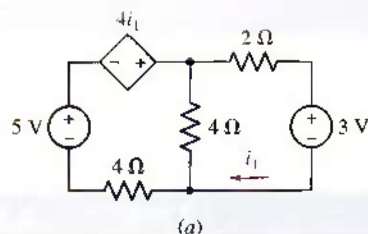


■ **FIGURA 4.20**

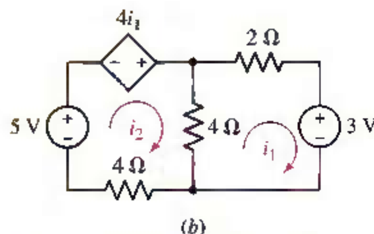
Respuesta: 2.220 A, 470.0 mA.

Los ejemplos anteriores trataron, exclusivamente, acerca de circuitos alimentados por fuentes de tensión independientes. Si se incluyera en el circuito una fuente de corriente, podría simplificar o complicar el análisis, como se estudió en la sección 4.4. Como se analizó en el estudio de la técnica de análisis nodal, en general las fuentes dependientes requieren de una ecuación adicional además de las *M* ecuaciones de malla, a menos que la variable controladora sea una corriente de malla (o la suma de las corrientes de malla). En el ejemplo siguiente se explica este caso.

EJEMPLO 4.9



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 4.21** (*a*) Circuito de dos mallas que contiene una fuente dependiente. (*b*) Circuito marcado para el análisis de mallas.

Determinar la corriente i_1 del circuito de la figura 4.21*a*.

La corriente i_1 es, en realidad, una corriente de malla, así más que redefinirla, se marca la corriente de malla que está más a la derecha, i_1 y se define una corriente de malla en el sentido de las manecillas del reloj, i_2 para la malla de la izquierda, como se muestra en la figura 4.21*b*.

Si se aplica LVK a la malla izquierda se tiene

$$-5 - 4i_1 + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \qquad [27]$$

y para la malla de la derecha se obtiene,

$$4(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0 \qquad [28]$$

Agrupando términos, estas ecuaciones pueden escribirse de manera más compacta como

$$-8i_1 + 8i_2 = 5$$

y

$$6i_1 - 4i_2 = -3$$

Despejando, $i_2 = 375$ mA, así que $i_1 = -250$ mA.

Puesto que la fuente dependiente de la figura 4.21 está controlada por la corriente de malla (i_1), sólo dos ecuaciones —la [27] y la [28]— se requirieron en el análisis del circuito de dos mallas. En el ejemplo siguiente, se explora la situación que se presenta si la variable controladora *no* es una corriente de malla.

EJEMPLO 4.10

Determinar la corriente i_1 del circuito de la figura 4.22*a*.

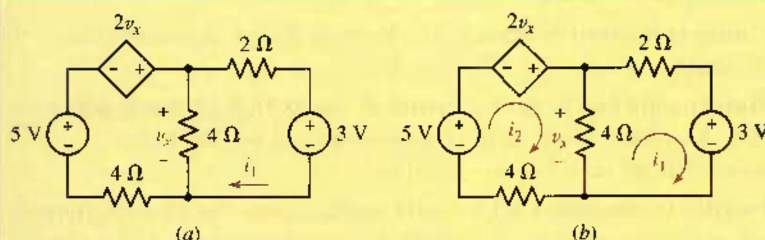


FIGURA 4.22 (*a*) Circuito con una fuente dependiente controlada por tensión. (*b*) Circuito marcado para el análisis de mallas.

Con la finalidad de hacer una comparación con el ejemplo 4.9, se utilizan las mismas definiciones de corriente de malla, como se muestra en la figura 4.22*b*.

En la malla de la izquierda, al aplicar LVK se obtiene

$$-5 - 2v_x + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \qquad [29]$$

y en la malla de la derecha se encuentra lo mismo que antes,

$$4(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0 \qquad [30]$$

Puesto que la fuente dependiente está controlada por una tensión desconocida v_x, se presentan *dos* ecuaciones con *tres* incógnitas. La solución a este dilema es simplemente construir una ecuación con v_x en términos de las corrientes de malla, tales como

$$v_x = 4(i_2 - i_1) \qquad [31]$$

Este sistema de ecuaciones se simplifica si se sustituye la ecuación [31] en la ecuación [29], lo que resulta en

$$4i_1 = 5$$

Simplificando, se encuentra que $i_1 = 1.25$ A. En este ejemplo en particular, la ecuación [30] no es necesaria a menos que se desee obtener un valor para i_2.

PRÁCTICA

4.8 Determinar i_1 en el circuito de la figura 4.23 si la cantidad controladora *A* es igual a: (*a*) $2i_2$; (b) $2v_x$.

Respuesta: (*a*) 1.35 A; (*b*) 546 mA.

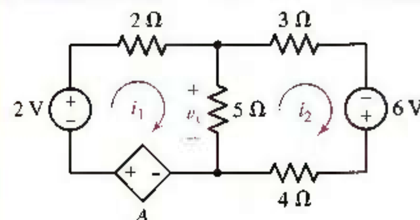


FIGURA 4.23

El procedimiento del análisis de malla puede resumirse en los siete pasos básicos descritos a continuación, que son válidos en cualquier circuito *plano* aunque la presencia de fuentes de corriente requerirá que se tomen precauciones. Dicha situación se estudia en la sección 4.4.

Resumen del procedimiento básico de análisis de malla

1. **Determinar si el circuito es planar (forma plana)**. Si no, lleve a cabo el análisis nodal.
2. **Contar el número de mallas** (M). Volver a dibujar el circuito si es necesario.
3. **Marcar cada una de las corrientes de malla M**. En general, definir todas las corrientes de malla que circulan en el sentido de las manecillas del reloj facilita el análisis.
4. **Escribir la ecuación LKT en cada malla**. Iniciar con un nodo conveniente y proceder en la dirección de la corriente de malla. Poner especial atención a los signos "−". Si una fuente de corriente se localiza en la periferia de una malla, no es necesaria la ecuación LVK y la corriente de malla se determina por inspección.
5. **Expresar cualquier incógnita adicional como tensiones o corrientes que sean diferentes a las corrientes de malla en términos de las corrientes de malla apropiadas.** Esta situación puede presentarse si, en el circuito, aparecen fuentes de corriente o fuentes dependientes.
6. **Organizar las ecuaciones.** Agrupar términos de acuerdo con las corrientes de malla.
7. **Resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las corrientes de malla** (se encontrarán M corrientes).

4.4 SUPERMALLA

¿Cómo se debe modificar este procedimiento directo cuando en la red hay una fuente de corriente? Desde la perspectiva del análisis nodal, se requiere percibir que hay dos métodos posibles. Primero, se podría asignar una tensión desconocida a la fuente de corriente, aplicar la LVK alrededor de cada malla como antes, y relacionar luego la fuente de corriente con las corrientes de malla asignadas. Por lo general, éste es el método más difícil.

Una mejor técnica se asemeja bastante al método del supernodo del análisis nodal. En este caso se forma un supernodo al encerrar por completo la fuente de tensión dentro del supernodo y al reducir en 1 el número de nodos de no referencia de cada fuente de tensión. Así se crea un tipo de ***"supermalla"*** a partir de dos mallas que tienen una fuente de corriente como un elemento común: la fuente de corriente está en el interior de la supermalla. De ese modo se reduce en 1 el número de mallas de cada fuente de corriente presente. Si la fuente de corriente se ubica en el *perímetro* del circuito, entonces se pasa por alto la malla simple en la cual se encuentra. Por lo tanto, la ley de Kirchhoff de tensión se aplica sólo en aquellas mallas o supermallas de la red reinterpretada.

EJEMPLO 4.11

Utilizar la técnica del análisis de malla para evaluar las tres corrientes de malla de la figura 4.24*a*.

Aquí se observa que una fuente de corriente independiente de 7 A está en la frontera común de las dos mallas. Las corrientes de malla i_1, i_2 e i_3 ya se han asignado; además la fuente de corriente crea una supermalla cuyo

interior es el de las mallas 1 y 3, como se ilustra en la figura 4.24*b*. Aplicando la LVK alrededor de este lazo,

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

o

$$i_1 - 4i_2 + 4i_3 = 7 \qquad [32]$$

y alrededor de la malla 2,

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

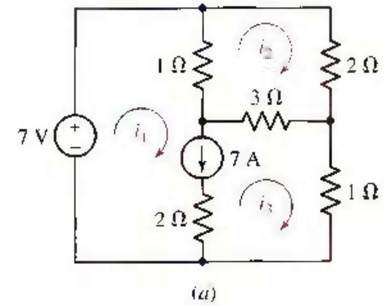
o

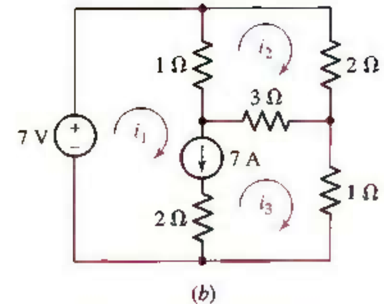
$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \qquad [33]$$

Por último, la corriente de la fuente independiente se relaciona con las corrientes de malla supuestas,

$$i_1 - i_3 = 7 \qquad [34]$$

Al resolver las ecuaciones de la [32] a la [34], se encuentra que $i_1 = 9$ A, $i_2 = 2.5$ A e $i_3 = 2$ A.



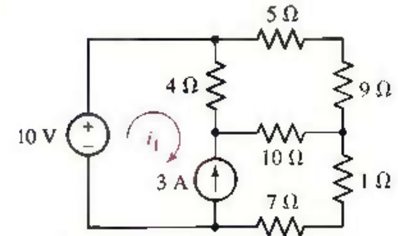


■ **FIGURA 4.24** (*a*) Circuito de tres mallas con una fuente de corriente independiente. (*b*) Supermalla definida mediante línea de colores.

PRÁCTICA

4.9 Determinar la corriente i_1 del circuito de la figura 4.25.

Respuesta: −1.93 A.



■ **FIGURA 4.25**

La presencia de una o más fuentes dependientes requiere tan sólo que cada una de tales cantidades de fuente y la variable de la que dependen se expresan en términos de las corrientes de malla asignadas. En la figura 4.26, por ejemplo, se observa que ambas fuentes de corriente, dependiente e independiente, se incluyen en la red. Se verá cómo afecta su presencia el análisis del circuito y que en realidad lo simplifica.

EJEMPLO 4.12

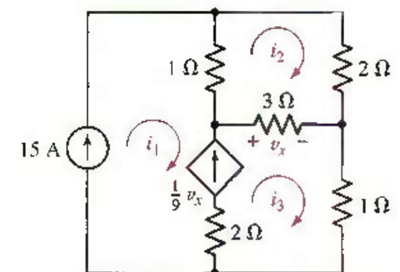
Utilizar el análisis de malla para evaluar las tres corrientes desconocidas en el circuito de la figura 4.26.

Las fuentes de corriente aparecen en las mallas 1 y 3. En razón de que la fuente de 15 A se localiza en el perímetro del circuito, se elimina la malla 1 de la consideración; resulta claro que $i_1 = 15$ A.

Es posible darse cuenta de que debido a que se conoce una de las dos corrientes de malla que son relevantes a la fuente de corriente independiente, no hay necesidad de escribir una ecuación de supermalla alrededor de las mallas 1 y 3. En lugar de hacer eso, simplemente se relacionan i_1 e i_3 con la corriente de la fuente dependiente mediante LCK:

$$\frac{v_x}{9} = i_3 - i_1 = \frac{3(i_3 - i_2)}{9}$$

(Continúa en la siguiente página)



■ **FIGURA 4.26** Circuito de tres mallas con una fuente de corriente dependiente y una independiente.

la cual puede escribirse en forma más compacta como,

$$-i_1 + \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 15 \qquad [35]$$

Con una ecuación y dos incógnitas, todo lo que resta es escribir una ecuación LVK alrededor de la malla 2,

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

o

$$6i_2 - 3i_3 = 15 \qquad [36]$$

Resolviendo las ecuaciones [35] y [36], se encuentra que $i_2 = 11$ A e $i_3 = 17$ A; por inspección, se determina que $i_1 = 15$ A.

PRÁCTICA

4.10 Utilizar el análisis de malla para determinar v_3 en el circuito de la figura 4.27.

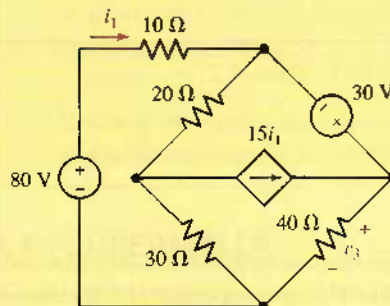


FIGURA 4.27

Respuesta: 104.2 V.

Ahora se puede resumir el método general para escribir ecuaciones de malla, ya sea que haya fuentes dependientes o no, fuentes de tensión y/o fuentes de corriente, siempre y cuando el circuito pueda dibujarse como un circuito de forma plana:

Resumen del procedimiento de análisis de la supermalla

1. **Determinar si el circuito es un circuito de forma plana.** Si no, llevar a cabo el análisis nodal.
2. **Contar el número de mallas (*M*).** Volver a dibujar el circuito si es necesario.
3. **Marcar cada una de las corrientes de las *M* mallas.** En general, la definición de todas las corrientes de malla que circulen en el sentido de las manecillas del reloj da como resultado un análisis más simple.
4. **Si el circuito contiene fuentes de corriente que están compartidas por dos mallas, formar una supermalla que encierre a ambas mallas.** Un cuadro remarcado es de ayuda al escribir las ecuaciones LVK.
5. **Escribir una ecuación LVK alrededor de cada malla/supermalla.** Iniciar en un nodo adecuado y proceder en la dirección de la corriente de malla. Poner especial atención a los signos "−". Si una fuente de corriente

se localiza en la periferia de una malla, no es necesaria ninguna ecuación LVK y la corriente de malla se determina por inspección.

6. **Relacionar la corriente que circula desde cada fuente de corriente con las corrientes de las mallas**. Esta tarea se lleva a cabo mediante la LCK; se necesita una de tales ecuaciones para cada supermalla que se defina.
7. **Expresar cualquier otra incógnita como corrientes y tensiones, aparte de las corrientes de malla en términos de las corrientes de malla apropiadas**. Esta situación se puede presentar si existen fuentes dependientes en nuestro circuito.
8. **Organizar las ecuaciones**. Agrupar los términos de acuerdo con las tensiones nodales.
9. **Resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las tensiones nodales** (se encontrarán M tensiones).

4.5 COMPARACIÓN ENTRE EL ANÁLISIS NODAL Y EL DE MALLA

Ahora que se han examinado dos métodos muy diferentes para analizar circuitos, parece lógico preguntar si se logra alguna ventaja si se utiliza uno u otro. Si el circuito es de forma no plana, entonces no hay elección: sólo se podrá aplicar el análisis nodal.

Sin embargo, siempre que se considere el análisis de un circuito de forma *plana* habrá situaciones en las que una técnica tiene una pequeña ventaja sobre la otra. Si se planea utilizar el análisis nodal, entonces un circuito con N nodos proporcionará a lo más $N - 1$ ecuaciones de la LCK. Cada supernodo definido reducirá de manera adicional en uno este número. Si el mismo circuito tiene M mallas distintas, entonces se obtendrá a lo más M ecuaciones por medio de la LVK; cada supermalla reducirá en uno este número. Con base en estos hechos, se debe elegir el método que producirá el número más pequeño de ecuaciones simultáneas.

Si una o más fuentes dependientes se incluyen en el circuito, cada cantidad controladora puede tener efecto en la elección entre el análisis nodal o de mallas. Por ejemplo, una fuente de tensión dependiente controlada por una tensión nodal no requiere una ecuación adicional cuando se lleva a cabo el análisis nodal. De forma similar, una fuente de corriente dependiente controlada por una corriente de malla no requiere de una ecuación adicional cuando se lleva a cabo el análisis de malla. *¿Qué hay acerca de la situación donde una fuente de tensión dependiente es controlada por una corriente? O de otra forma, ¿dónde es controlada por una tensión una fuente de corriente dependiente?* Siempre que una cantidad controladora puede relacionarse fácilmente con las corrientes de malla, se puede esperar que el análisis de malla sea la opción más conveniente. De manera similar, si la cantidad controladora puede fácilmente relacionarse con las tensiones en los nodos, puede ser preferible el análisis nodal. Un punto final a este respecto es tener en mente la *ubicación* de la fuente: las fuentes de corriente que se ubican en la periferia de una malla, ya sean dependientes o independientes, se manipulan de una manera más fácil con el análisis de malla; las fuentes de tensión conectadas a la terminal de referencia se manejan más fácilmente mediante el análisis nodal.

Si con cualquiera de los métodos se obtiene en esencia el mismo número de ecuaciones, quizás valga la pena considerar también las cantidades que se están buscando. El análisis nodal origina el cálculo directo de tensiones nodales, en tanto que el análisis de malla proporciona corrientes. Si, por ejemplo, se pide determinar

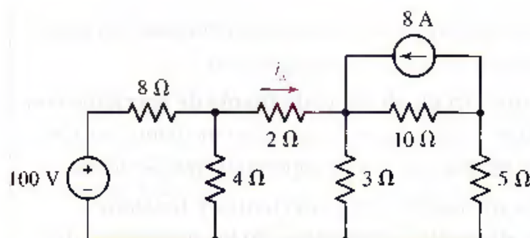


FIGURA 4.28 Circuito de forma plana con cinco nodos y cuatro mallas.

corrientes a través de un conjunto de resistencias, después de efectuar el análisis nodal se debe recurrir aún a la ley de Ohm en cada resistencia para determinar la corriente.

Como ejemplo, considerar el circuito de la figura 4.28. Se desea determinar la corriente i_x.

Se elige el nodo inferior como el de referencia y se observa que hay cuatro nodos de no referencia. Si bien esto significa que es posible escribir cuatro ecuaciones distintas, no hay necesidad de marcar el nodo entre la fuente de 100 V y la resistencia de 8 Ω ya que resulta obvio que la tensión de nodo mide 100 V. En consecuencia, se marcan las siguientes tensiones de nodo v_1, v_2 y v_3 como en la figura 4.29.

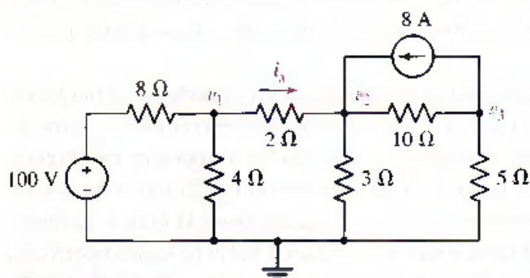


FIGURA 4.29 El circuito de la figura 4.28 con tensiones de nodo marcadas. Observar que se eligió un sistema de tierra física para designar la terminal de referencia.

Se tienen las siguientes tres ecuaciones:

$$\frac{v_1 - 100}{8} + \frac{v_1}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2} = 0 \quad \text{o} \quad 0.875v_1 - 0.5v_2 = 12.5 \qquad [37]$$

$$\frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2}{3} + \frac{v_2 - v_3}{10} - 8 = 0 \quad \text{o} \quad -0.5v_1 - 0.9333v_2 - 0.1v_3 = 8 \qquad [38]$$

$$\frac{v_3 - v_2}{10} + \frac{v_3}{5} + 8 = 0 \quad \text{o} \quad -0.1v_2 + 0.3v_3 = -8 \qquad [39]$$

Resolviendo, se encuentra que $v_1 = 25.89$ V y $v_2 = 20.31$ V. Se determina la corriente i_x mediante la aplicación de la ley de Ohm:

$$i_x = \frac{v_1 - v_2}{2} = 2.79 \text{ A} \qquad [40]$$

En seguida, se considera el mismo circuito mediante el análisis de malla. En la figura 4.30 se tienen cuatro mallas distintas, aunque es evidente que $i_4 = -8$ A; por lo tanto, es necesario escribir tres ecuaciones distintas.

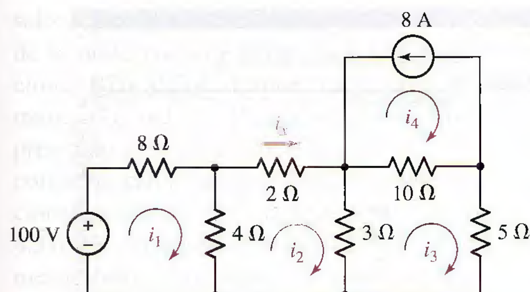


FIGURA 4.30 El circuito de la figura 4.28 con las corrientes de malla marcadas.

Escribiendo una ecuación LKT para las mallas 1, 2 y 3:

$$-100 + 8i_1 + 4(i_1 - i_2) = 0 \quad \text{o} \quad 12i_1 - 4i_2 = 100 \qquad [41]$$

$$4(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0 \quad \text{o} \quad -4i_1 + 9i_2 - 3i_3 = 0 \qquad [42]$$

$$3(i_3 - i_2) + 10(i_3 + 8) + 5i_3 = 0 \quad \text{o} \quad -3i_2 + 18i_3 = -80 \qquad [43]$$

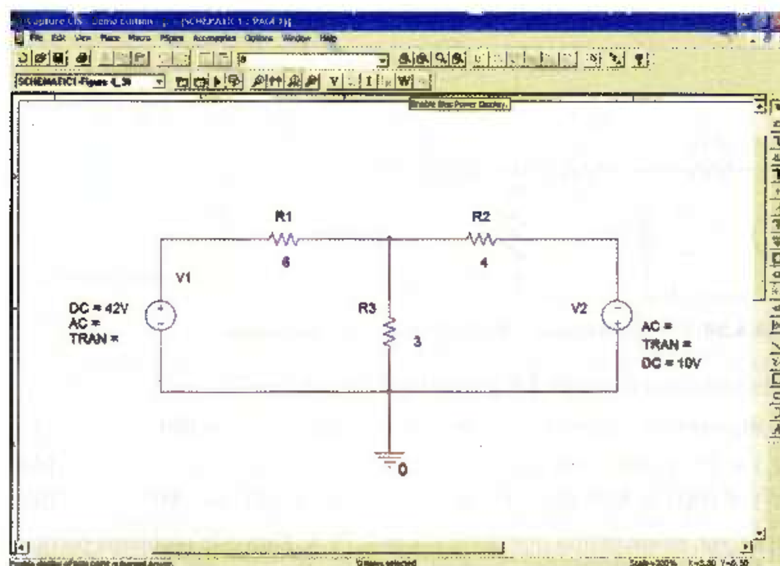
Al resolver, se encuentra que i_2 $(= i_x) = 2.79$ A. Para este problema particular, el análisis de malla mostró ser más simple. No obstante, puesto que cualquier método es válido, si se resuelve el mismo problema de las dos formas también servirá como un medio para verificar las respuestas.

4.6 ANÁLISIS DE CIRCUITOS ASISTIDO POR COMPUTADORA

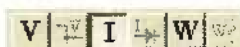
Hemos visto que no es necesario tomar muchos componentes para crear un circuito de complejidad respetable. A medida que se examinen circuitos incluso más complejos, se evidenciará de inmediato que es fácil cometer errores durante el análisis, y que la verificación de las soluciones de manera manual consume mucho tiempo. Un poderoso programa de computadora, conocido como PSpice, se suele utilizar para analizar rápidamente los circuitos, así que las herramientas de captura de esquemas casi siempre se integran con una tablilla de circuito impreso o una herramienta de visualización de circuito integrado. Creado originalmente a principios de los años de 1970 en la Universidad de California en Berkeley, SPICE (*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*) es en la actualidad un estándar industrial. MicroSim Corporation introdujo PSpice en 1984, el cual por medio de interfaces, traza gráficas correspondientes en torno al programa SPICE principal. Según sea el tipo de aplicación de circuitos que se considere, hay en la actualidad varias compañías que ofrecen diferentes versiones del paquete SPICE básico.



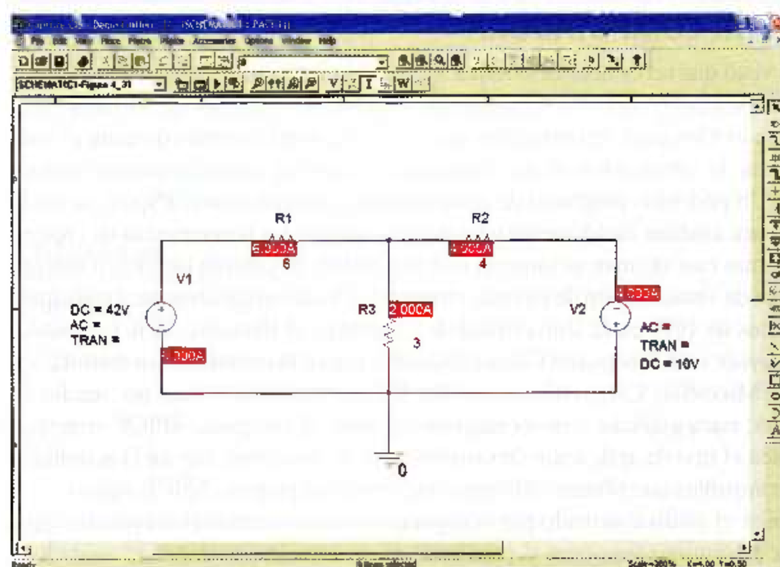
Si bien el análisis asistido por computadora es un medio relativamente rápido para determinar tensiones y corrientes en un circuito, se debe ser cuidadoso de no permitir que los paquetes de simulación reemplacen por completo el análisis tradicional con "papel y lápiz". Existen varias razones que sostienen lo anterior. Primero, para diseñar se debe ser capaz de analizar. La excesiva confianza en las herramientas de cómputo puede inhibir el desarrollo de las capacidades analíticas necesarias, tal como sucedió con la introducción muy temprana de las calculadoras en la escuela elemental. Segundo, es casi imposible utilizar un programa complicado durante un largo tiempo sin cometer algún tipo de error en la entrada de datos. Si no se cuenta con una intuición básica en cuanto al tipo de respuesta que se debe esperar de una simulación, no hay forma de determinar si es o no válida. Por consiguiente, el nombre genérico en realidad es una descripción bastante precisa: análisis *asistido* por computadora. Los cerebros humanos no son obsoletos. No todavía, como quiera que sea.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

FIGURA 4.31 (*a*) Circuito de la figura 4.15*a* dibujado mediante el software de captura de esquemas Orcad. (*b*) Botones de despliegue de corriente, tensión y potencia. (c) Circuito después de ejecutarse la simulación, con el despliegue de corriente habilitado.

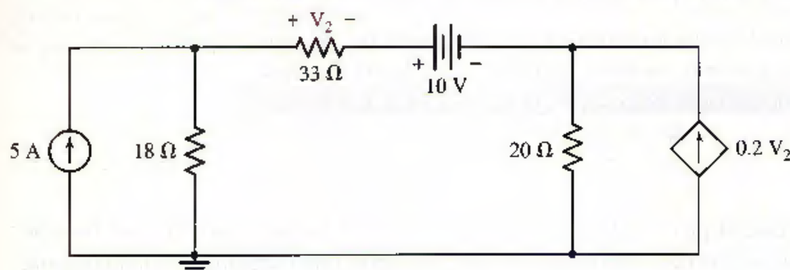
A manera de ejemplo, considere el circuito de la figura 4.15*b*, que incluye dos fuentes de tensión de cd y tres resistencias. Se desea simular este circuito mediante PSpice, de modo que sea posible determinar las corrientes i_1 e i_2. La figura 4.31*a* muestra el circuito en la forma que se dibuja mediante un programa de captura de esquemas.[1]

Con la finalidad de determinar las corrientes de malla, sólo se necesita correr una simulación para encontrar el punto de polarización. Al estar en **PSpice**,

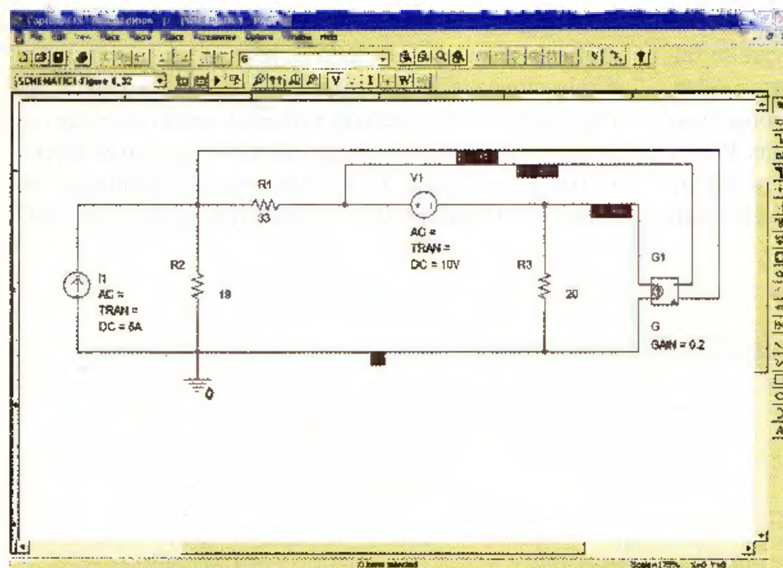
(1) Consultar el apéndice 4 para obtener un breve tutorial sobre PSpice y la captura de diagramas esquemáticos.

seleccionar **New Simulation Profile**. Teclee Primer Ejemplo (o cualquier nombre de su preferencia) y hacer click en **Create**. En el menú **Analysis Type** seleccionar **Bias Point**, después hacer click en **OK**. Regresar a la ventana esquemática original y en **PSpice** seleccionar **Run** (o utilizar alguno de los dos atajos: presionar la tecla **F11** o hacer clic en el símbolo azul "Play"). Para ver las corrientes calculadas por PSpice, asegurarse de que el botón corriente esté seleccionado (figura 4.31*b*). Los resultados de la simulación se muestran en la figura 4.31*c*. Se puede observar que las dos corrientes i_1 e i_2 son 6 A y 4 A, respectivamente, como se pudo ver con anterioridad.

Como ejemplo adicional, considerar el circuito de la figura 4.32*a*. Contiene una fuente de tensión de cd, una fuente de corriente de cd y una fuente de corriente controlada por tensión. El foco de atención se concentra en las tres tensiones nodales que, a partir del análisis nodal o de malla, se puede ver que son 82.91 V, 69.9 V y 59.9 V, respectivamente, a medida que la mirada se desplaza de izquierda a derecha en la parte superior del circuito. La figura 4.32*b* muestra este circuito, dibujado mediante una herramienta de captura de esquemas, después de haberse llevado a cabo la simulación. Las tres tensiones nodales se indican directamente en el esquema. Observar que al dibujar una fuente dependiente con la herramienta de captura de esquemas se deben enlazar de manera *explícita* dos terminales de la fuente con la tensión o la corriente de control.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 4.32** (*a*) Circuito con fuente de corriente dependiente. (*b*) Circuito dibujado con una herramienta de captura de esquemas, cuyos resultados de la simulación se presentan de manera directa sobre el esquema.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Creación de diagramas PSpice con base en nodos

El método más común para describir un circuito, en conjunción con el análisis de circuitos asistido por computadora, es un tipo de programa gráfico para dibujo de esquemas, de cuya salida se muestra un ejemplo en la figura 4.32. Sin embargo, SPICE se escribió antes del advenimiento de este tipo de programas, y como tal requiere que los circuitos se describan en un formato específico basado en texto. El formato tiene sus raíces en la sintaxis utilizada en las tarjetas perforadas, lo cual le da una apariencia un poco distinta. La base para describir circuitos es la definición de elementos, así que a cada terminal del mismo se le asigna un número de nodos. De esa manera, aunque se acaban de estudiar dos métodos de análisis de circuitos generalizados diferentes —las técnicas nodal y de malla— resulta interesante observar que SPICE y PSpice se elaboraron mediante un método de análisis nodal muy bien definido.

Aun cuando el análisis moderno de circuitos se hace en gran medida con un software interactivo orientado a gráficas, cuando se generan errores (casi siempre debidos a equivocaciones en el dibujo del esquema o al elegir una combinación de las opciones de análisis), la capacidad para leer la "plataforma de entrada" basada en textos generados por la herramienta de captura de esquemas resulta invaluable para el seguimiento del problema específico. La mejor forma de desarrollar una capacidad de este tipo consiste en aprender la manera de ejecutar PSPICE de manera directa, a partir de una plataforma de entrada escrita por el usuario.

Considere, por ejemplo, la muestra de la plataforma de entrada siguiente (las líneas que empiezan con un asterisco son comentarios, y SPICE las pasa por alto).

```
* Example input deck for a simple voltage divider.
.OP                 Se pide a SPICE que determine el punto de operación cd del circuito.
R1 1 2 1k           Se define R1 entre los nodos 1 y 2; tiene un valor de 1 kOhms.
R2 2 0 1k           R2 se define entre los nodos 2 y 0; tiene un valor de 1 kOhms.
V1 1 0 DC 5         V1 se define entre los nodos 1 y 0; tiene un valor de 5 V cd.
* End of input deck.
```

Se puede crear la plataforma de entrada con el programa Notepad de Windows o con su editor de textos favorito. Salvar el archivo bajo el nombre example.cir, invoca a PSpice A/D (vea el apéndice 4). En **File**, se selecciona **Open**, se ubica el directorio en el que se salva el archivo example.cir y para **Files of Type**: se selecciona **Circuit Files (*.cir)**. Después de seleccionar el archivo y hacer clic en **Open**, aparece la ventana PSpice A/D con el archivo de circuito cargado (figura 4.33*a*). Una lista de red como ésta, que contiene instrucciones de la simulación que se va a llevar a cabo, puede hacerse con el software de captura de esquemas o manualmente como en este ejemplo.

Se ejecuta la simulación ya sea haciendo clic en el símbolo "play" en color azul en la parte superior derecha o seleccionando **Run** en **Simulation**. En la esquina inferior izquierda de la ventana principal, una ventana de resumen más pequeña informa que la simulación se ejecutó con éxito (figura 4.33*b*). Para ver los resultados, se selecciona **Output File** del menú **View** en donde se verá:

```
**** 02/18/04 09:53:57 ************** PSpice Lite (Jan 2003) *****************
 * Example input deck for a simple voltage divider.
 ****     CIRCUIT DESCRIPTION
*****************************************************************************
.OP
R1 1 2 1k
R2 2 0 1k
V1 1 0 DC 5
* End of input deck.
```

La plataforma de entrada se repite a la salida como referencia y para ayudarle en la verificación de errores.

```
**** 02/18/04 09:53:57 ************** PSpice Lite (Jan 2003) ****************
 * Example input deck for a simple voltage divider.
 ****       SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION        TEMPERATURE =   27.000 DEG C
***************************************************************************
 NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE
(    1)    5.0000  (    2)    2.5000

    VOLTAGE SOURCE CURRENTS
    NAME         CURRENT

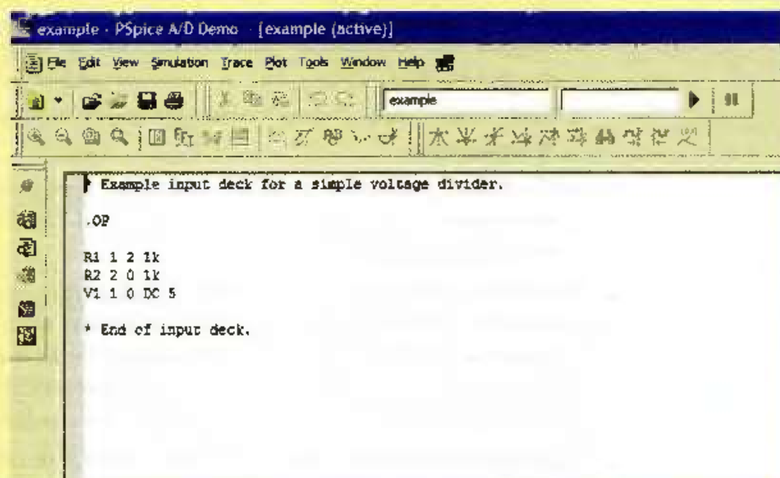
    V1          -2.500E-03

    TOTAL POWER DISSIPATION   1.25E-02  WATTS
```

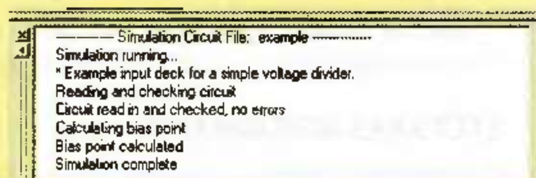
En el resumen de salida, se proporciona la tensión entre cada nodo y el nodo 0. La tensión de 5 V se encuentra conectada entre los nodos 1 y 0; asimismo, la resistencia R2, conectada entre los nodos 2 y 0, tiene una tensión de 2.5 V, como se esperaba.

Observe también una rareza de SPICE: la corriente proporcionada por la fuente se anota utilizando la convención de signos pasiva (es decir −2.5 mA).

Como se puede ver, el uso del método basado en textos para describir circuitos es un poco menos fácil para el usuario, en comparación con las herramientas de captura de esquemas. En particular, resulta muy fácil introducir errores simples (pero importantes) en una simulación si se numeran de manera equivocada los nodos, ya que no hay una visualización directa de la plataforma de entrada, más allá de lo que se escribe en papel. Sin embargo, la interpretación de la salida es bastante directa, así que vale la pena el esfuerzo de practicar la lectura de unos cuantos archivos de este tipo.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 4.33** (*a*) Ventana A/D de PSpice con el archivo del circuito cargado. (*b*) Resumen de la actividad de simulación.

En este punto, el poder real del análisis asistido por computadora empieza a ser patente: una vez que se tiene el circuito dibujado en el programa de captura de esquemas, resulta fácil experimentar con sólo cambiar los valores de los componentes y observar el efecto sobre las corrientes y las tensiones. Para obtener un poco de experiencia a este respecto, tratar de simular cualquiera de los circuitos de los ejemplos previos y de los problemas de práctica.

RESUMEN Y REPASO

- ❑ Antes de iniciar un análisis, elaborar un diagrama de circuito claro y simple. Indicar todos los valores de los elementos y de las fuentes.
- ❑ Si el análisis nodal es el método elegido,
  - ❑ Elegir uno de los nodos como el de referencia. Luego marcar las tensiones de nodo $v_1, v_2, \ldots, v_{N-1}$, recordando que se entiende que cada uno se mide con respecto al nodo de referencia.
  - ❑ Si el circuito contiene sólo fuentes de corriente, aplicar la LCK en cada nodo de referencia.
  - ❑ Si el circuito consiste en fuentes de tensión, formar un supernodo alrededor de cada una y luego proceder a aplicar la LCK en todos los nodos de no referencia y los supernodos.
- ❑ Si se está pensando emplear el análisis de malla, cerciorarse primero de que la red es de forma plana.
  - ❑ Asignar una corriente de malla en dirección de las manecillas del reloj en cada malla: $i_1, i_2, \ldots, i_M$.
  - ❑ Si el circuito sólo contiene fuentes de tensión, aplicar la LVK alrededor de cada malla.
  - ❑ Si contiene fuentes de corriente, crear una supermalla para cada una que sea común a dos mallas y aplicar después la LVK alrededor de cada malla y supermalla.
- ❑ Las fuentes dependientes sumarán una ecuación extra al análisis nodal si la variable de control es una corriente, pero no lo hará así si la variable de control es una tensión nodal. De manera contraria, una fuente dependiente agregará una ecuación extra al análisis de malla si la variable de control es una tensión, pero no lo hará así si la variable de control es una corriente de malla.
- ❑ Cuando deba decidir si se usa el análisis nodal o el de malla para un circuito plano, pensar que un circuito con menor número de nodos/supernodos dará lugar a menor número de ecuaciones mediante el análisis nodal.
- ❑ El análisis asistido por computadora resulta útil para verificar resultados y analizar circuitos con una gran cantidad de elementos. Sin embargo, debe recurrirse al sentido común para verificar los resultados de la simulación.

LECTURAS ADICIONALES

Un tratamiento detallado del análisis nodal y de malla puede encontrarse en:

R.A. DeCarlo y P.M. Lin, *Linear Circuit Analysis,* 2a. edición. Nueva York: Oxford University Press, 2001.

Una sólida guía para utilizar SPICE es

P. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSPICE,* 3a. ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall,1995.

EJERCICIOS

4.1 Análisis nodal

1. (*a*) Determinar v_2 si $0.1v_1 - 0.3v_2 - 0.4v_3 = 0$, $-0.5v_1 + 0.1v_2 = 4$, y $-0.2v_1 - 0.3v_2 + 0.4v_3 = 6$. (*b*) Evaluar el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

2. (*a*) Encontrar v_A, v_B, y v_C si $v_A + v_B + v_C = 27$, $2v_B + 16 = v_A - 3v_C$, y $4v_C + 2v_A + 6 = 0$. (*b*) Encontrar el determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

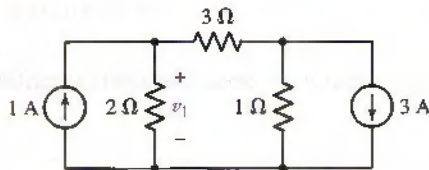


3. (*a*) Resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$4 = v_1/100 + (v_1 - v_2)/20 + (v_1 - v_x)/50$$
$$10 - 4 - (-2) = (v_x - v_1)/50 + (v_x - v_2)/40$$
$$-2 = v_2/25 + (v_2 - v_x)/40 + (v_2 - v_1)/20$$

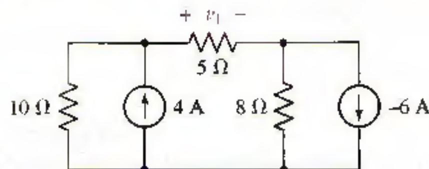
(*b*) Verifica tu solución usando MATLAB.

4. Determinar el valor de la tensión marcada como v_1 en la figura 4.34.



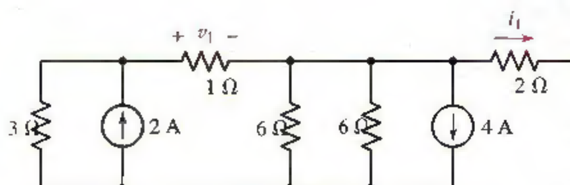
■ **FIGURA 4.34**

5. Determinar el valor de la tensión marcada como v_1 en la figura 4.35.



■ **FIGURA 4.35**

6. En el circuito de la figura 4.36, determinar el valor de la tensión marcada como v_1 y la corriente marcada como i_1.



■ **FIGURA 4.36**

7. Recurrir al análisis nodal para determinar v_P en el circuito de la figura 4.37.

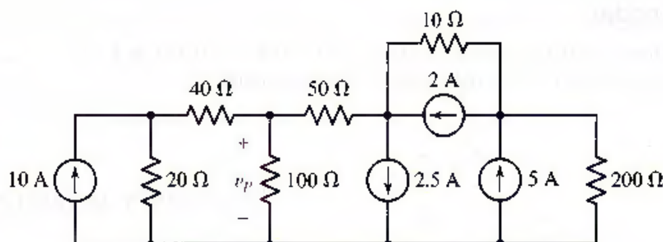


FIGURA 4.37

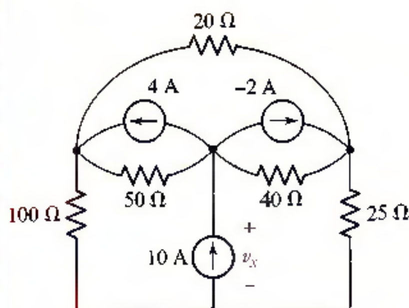


FIGURA 4.38

8. Utilizar el análisis nodal para determinar v_x en el circuito de la figura 4.38.

9. En el circuito de la figura 4.39, (*a*) utilizar el análisis nodal para determinar v_1 y v_2. (*b*) Calcular la potencia absorbida por la resistencia de 6 Ω.

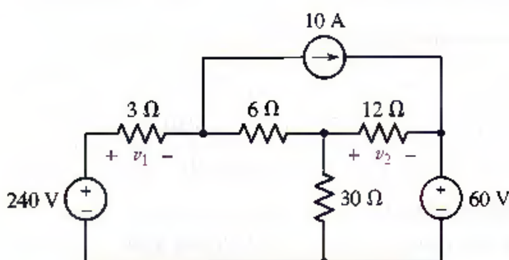


FIGURA 4.39

10. Aplicar las técnicas del análisis nodal para obtener v_1 e i_2 en el circuito de la figura 4.40.

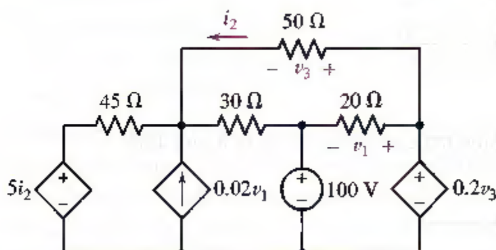


FIGURA 4.40

11. En el caso del circuito de la figura 4.41, utilizar el análisis nodal para determinar el valor de V_2 que dará origen a $v_1 = 0$.

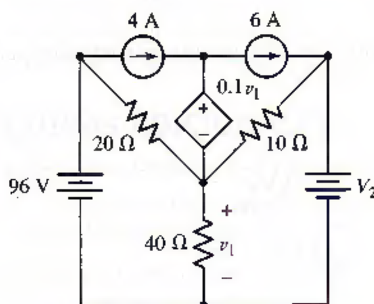
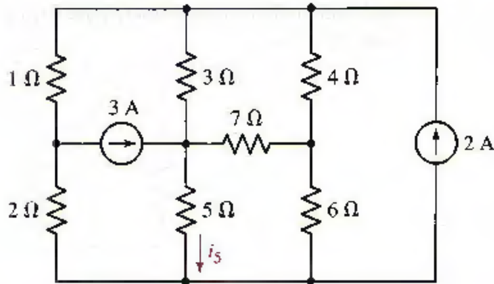


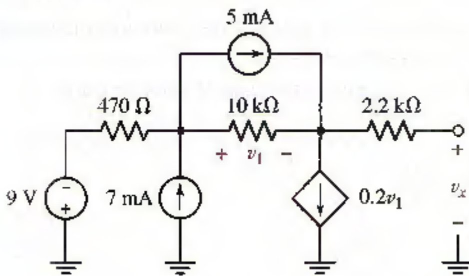
FIGURA 4.41

12. En el caso del circuito de la figura 4.42, utilizar el análisis nodal para determinar la corriente i_5.



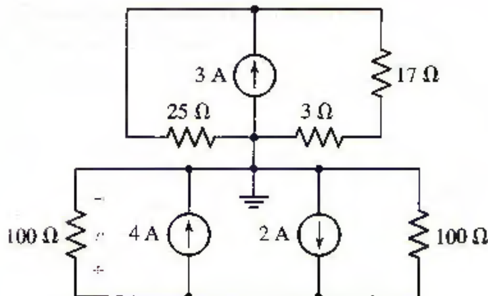
■ **FIGURA 4.42**

13. Emplear el análisis nodal para obtener el valor relativo de v_x como se indica en la figura 4.43.



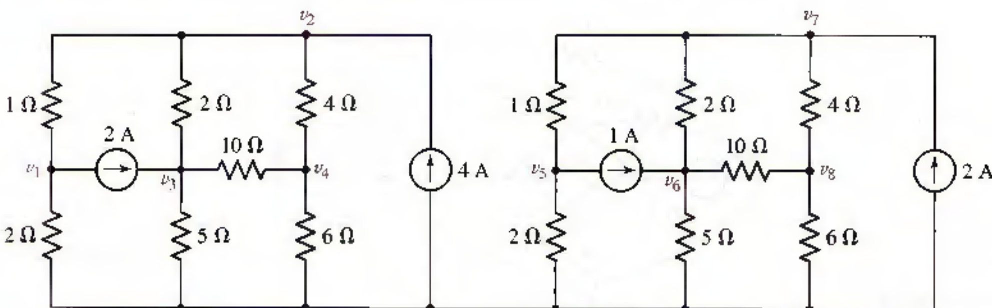
■ **FIGURA 4.43**

14. Determinar la tensión marcada como v en el circuito de la figura 4.44 utilizando técnicas del análisis nodal.



■ **FIGURA 4.44**

15. Determinar las tensiones nodales que se indican en el circuito de la figura 4.45.

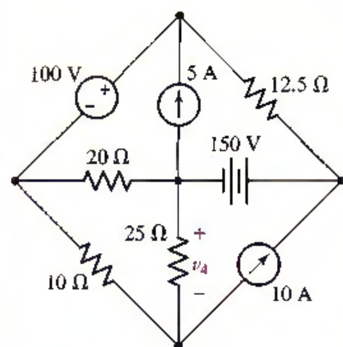


■ **FIGURA 4.45**

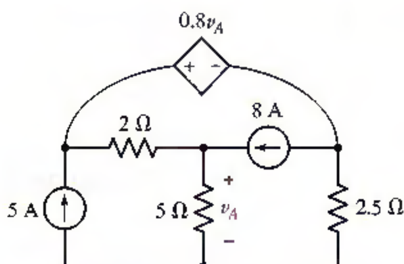
4.2 Supernodo

16. Utilizar el análisis nodal para determinar v_4 en el circuito que se muestra en la figura 4.46.

17. En el circuito de la figura 4.47, con la ayuda del análisis nodal, determinar (*a*) v_A; (*b*) la potencia disipada por la resistencia de 2.5 Ω.

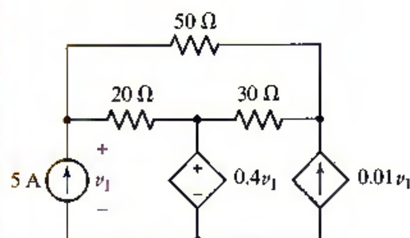


■ **FIGURA 4.46**



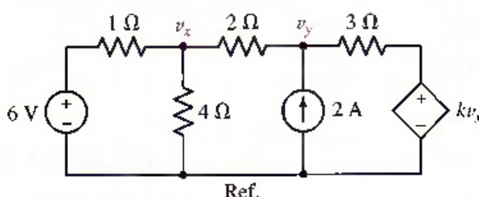
■ **FIGURA 4.47**

18. Utilizar el análisis nodal para determinar v_1 y la potencia que suministra la fuente de corriente dependiente del circuito de la figura 4.48.



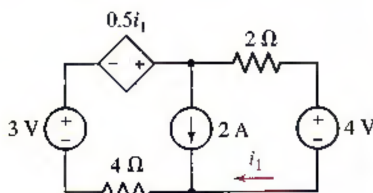
■ **FIGURA 4.48**

19. En la figura 4.49, utilizar el análisis nodal para determinar el valor de k que provocará que v_y sea cero.



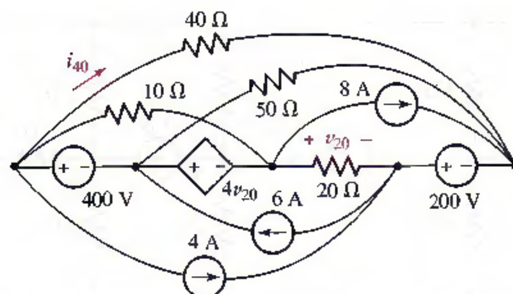
■ **FIGURA 4.49**

20. Considerar el circuito de la figura 4.50. Determinar la corriente marcada como i_1.



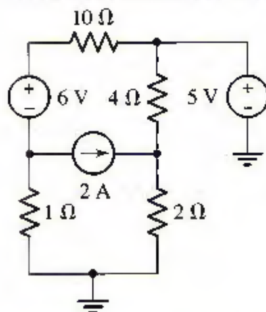
■ **FIGURA 4.50**

21. Recurrir al concepto de supernodo para determinar la tensión marcada como v_{20} en la figura 4.51. Los alambres cruzados que no se marcan mediante un punto grueso no están en contacto físico.

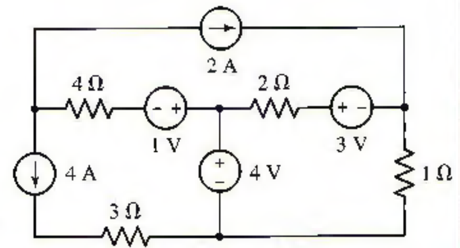


■ **FIGURA 4.51**

22. Para el circuito de la figura 4.52, determinar las cuatro tensiones nodales.



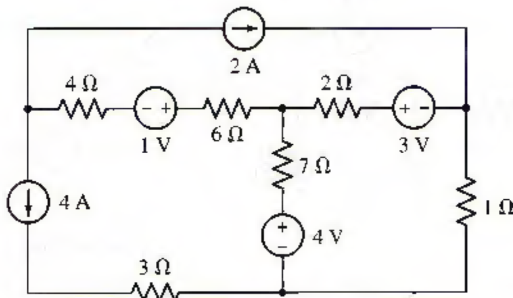
■ **FIGURA 4.52**



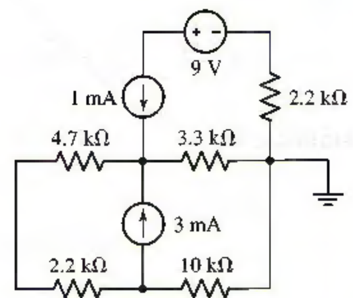
■ **FIGURA 4.53**

23. Calcular la potencia suministrada por la fuente de 2 A en el circuito de la figura 4.53.

24. Obtener la potencia suministrada por la fuente de 2 A en el circuito de la figura 4.54.



■ **FIGURA 4.54**

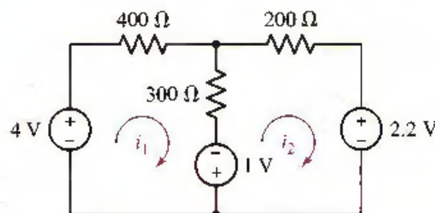


■ **FIGURA 4.55**

25. Determinar las tensiones nodales que caracterizan al circuito de la figura 4.55.

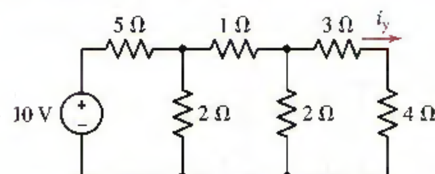
4.3 Análisis de malla

26. Determinar las corrientes de malla i_1 e i_2 que se muestran en el circuito de la figura 4.56.

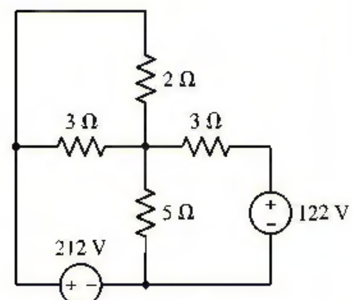


■ **FIGURA 4.56**

27. Utilizar el análisis de malla en el circuito de la figura 4.57 para determinar (*a*) la corriente i_y; (*b*) la potencia suministrada por la fuente de 10 V.



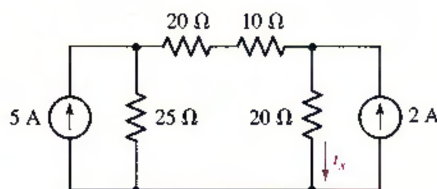
■ **FIGURA 4.57**



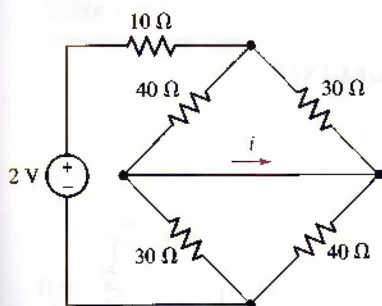
■ **FIGURA 4.58**

28. Utilizar el análisis de malla para determinar la corriente que circula en el circuito de la figura 4.58 a través de (*a*) la resistencia de 2 Ω resistor; (*b*) la resistencia de 5 Ω.

29. Utilizar el análisis de malla en el circuito de la figura 4.59 para determinar (*a*) la corriente marcada como i_x; (*b*) la potencia absorbida por la resistencia de 25 Ω.

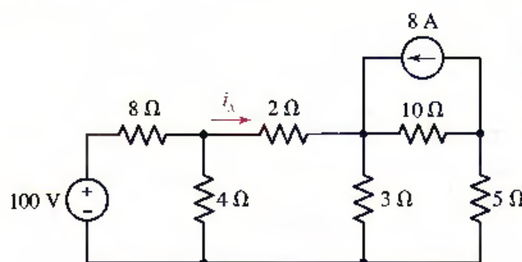


■ **FIGURA 4.59**



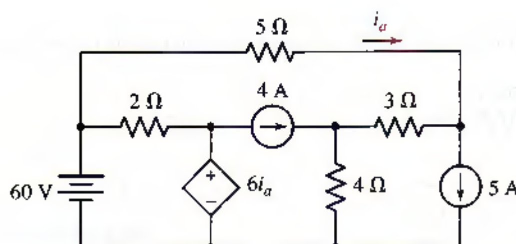
■ **FIGURA 4.60**

30. Utilizar el análisis de malla para determinar la corriente marcada como i en el circuito de la figura 4.60.
31. Utilizar el análisis de malla para determinar i_x en el circuito de la figura 4.61.



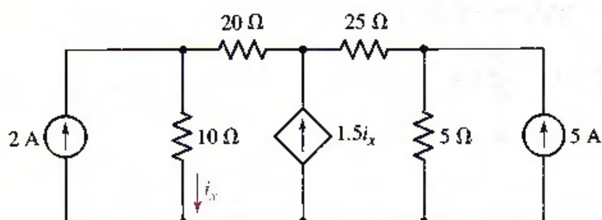
■ **FIGURA 4.61**

32. Calcular la potencia que está disipando la resistencia de 2 Ω del circuito de la figura 4.62.



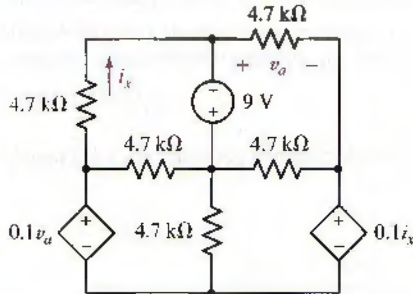
■ **FIGURA 4.62**

33. Utilizar el análisis de malla en el circuito que se muestra en la figura 4.48 para determinar la potencia que suministra la fuente de tensión dependiente.
34. Aplicar el análisis de malla para determinar i_x en el circuito de la figura 4.63.



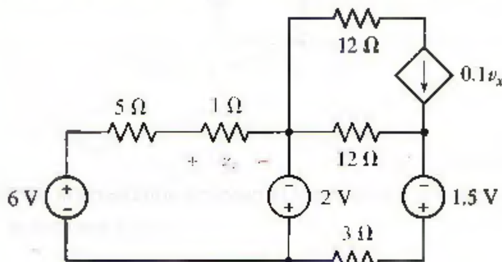
■ **FIGURA 4.63**

35. Determinar las corrientes de malla en la dirección de las manecillas del reloj para el circuito de la figura 4.64.

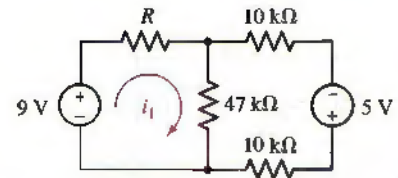


■ **FIGURA 4.64**

36. Calcular cada corriente de malla en el circuito de la figura 4.65.



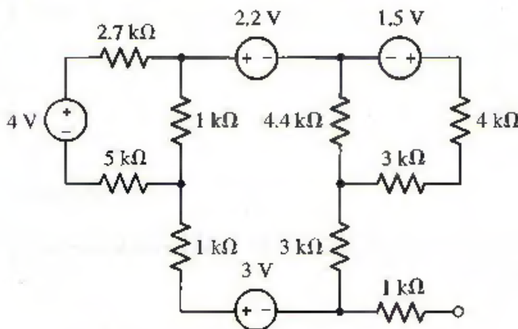
■ **FIGURA 4.65**



■ **FIGURA 4.66**

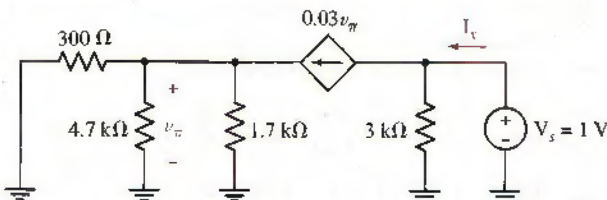
37. (*a*) Con referencia al circuito de la figura 4.66, determinar el valor de *R* si se sabe que la corriente de malla es $i_1 = 1.5$ mA. (*b*) ¿El valor de *R* es necesariamente único? Explique su respuesta.

38. Utilizar la técnica del análisis de malla en el circuito de la figura 4.67 para calcular la potencia que absorbe cada resistencia.



■ **FIGURA 4.67**

39. El circuito que se presenta en la figura 4.68 es el equivalente de un amplificador transistorizado de unión bipolar de base común. La fuente de entrada se puso en



■ **FIGURA 4.68**

cortocircuito y una fuente de 1 V se sustituyó por el dispositivo de salida. (*a*) Utilizar el análisis de malla para determinar I_x. (*b*) Verificar su solución correspondiente al inciso (*a*) mediante el análisis nodal. (*c*) ¿Cuál es el significado físico de la cantidad V_s/I_x?

40. Eligir valores distintos de cero para las tres fuentes de tensión de la figura 4.69 de manera que ninguna corriente circule a través de ninguna resistencia del circuito.

FIGURA 4.69

4.4 Supermalla

41. Utilizar el análisis de malla para determinar la potencia generada por cada una de las cinco fuentes de la figura 4.70.

FIGURA 4.70

42. Determinar i_A en el circuito de la figura 4.71.

43. Utilizar el concepto de supermalla para determinar la potencia suministrada por la fuente de 2.2 V de la figura 4.72.

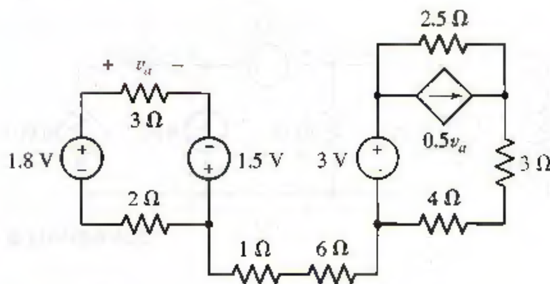
FIGURA 4.71

FIGURA 4.72

44. Calcular la tensión en la fuente de 2 mA de la figura 4.73, suponiendo que el nodo inferior está conectado a tierra.

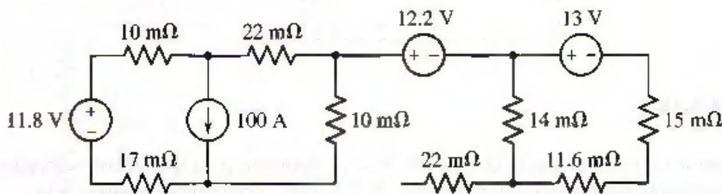
FIGURA 4.73

45. Utilizar el análisis de malla para obtener la tensión en la resistencia de 2.5 Ω de la figura 4.74.



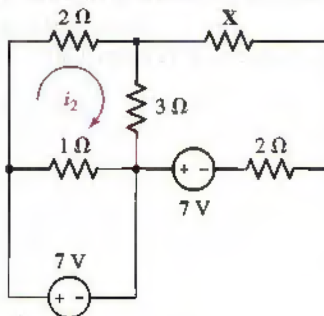
■ **FIGURA 4.74**

46. Calcular las corrientes de malla del circuito de la figura 4.75.



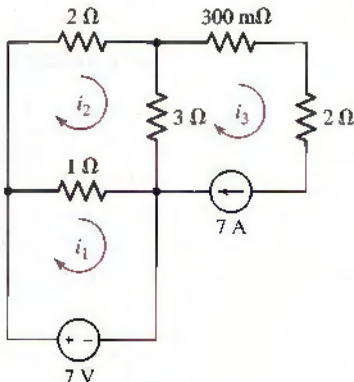
■ **FIGURA 4.75**

47. En el caso del circuito de la figura 4.76, determinar el valor del resistor **X** si $i_2 = 2.273$ A.



■ **FIGURA 4.76**

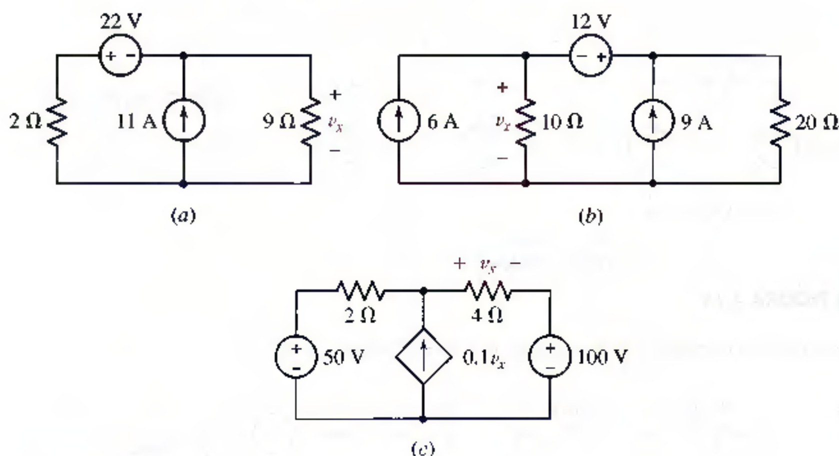
48. Considerar el circuito de la figura 4.77. Calcular las tres corrientes de malla que se indican.



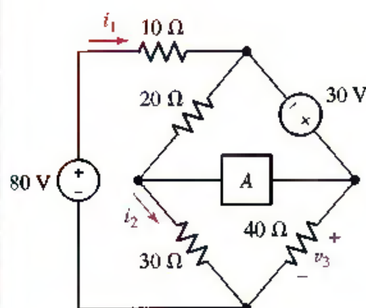
■ **FIGURA 4.77**

4.5 Comparación entre el análisis nodal y el de malla

49. Determinar la tensión denominada v_x en cada uno de los circuitos de la figura 4.78.



■ **FIGURA 4.78**

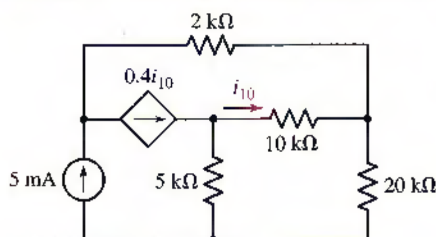


■ **FIGURA 4.79**

50. Encontrar v_3 del circuito de la figura 4.79 si el elemento A es (a) un cortocircuito; (b) una fuente de tensión independiente de 9 V, con la referencia positiva a la izquierda; (c) una fuente de corriente dependiente, con la punta de la flecha hacia la izquierda y marcada como $5i_1$.

51. Determinar las corrientes i_1 e i_2 del circuito de la figura 4.79 si el elemento A es una resistencia de 12 Ω. Explicar la lógica que fundamenta su elección del análisis, ya sea nodal o de malla.

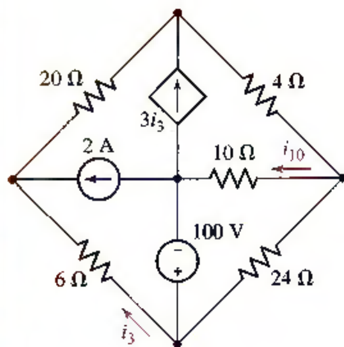
52. Obtener el valor de la corriente designada i_{10} en el circuito de la figura 4.80.



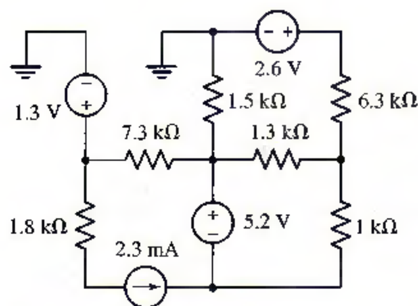
■ **FIGURA 4.80**

53. Calcular las dos corrientes marcadas en el circuito de la figura 4.81.

54. En el caso del circuito de la figura 4.82, proporcionar la tensión del nodo central.

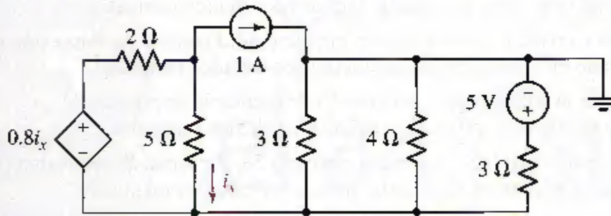


■ **FIGURA 4.81**



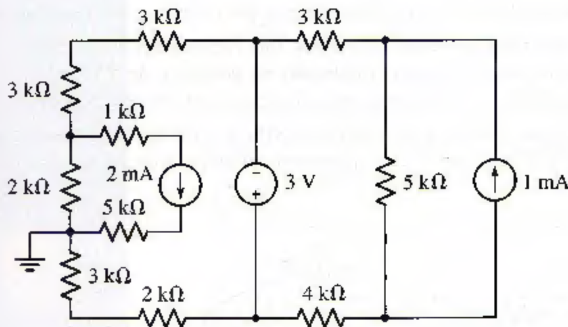
■ **FIGURA 4.82**

55. Determinar la corriente a través de cada rama del circuito de la figura 4.83.



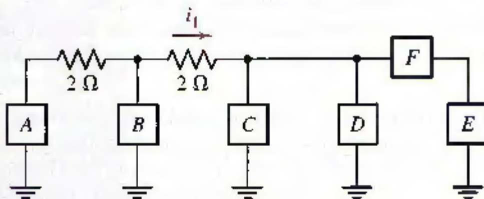
■ **FIGURA 4.83**

56. Calcular la tensión en la fuente de corriente de 2 mA de la figura 4.84.



■ **FIGURA 4.84**

57. En el caso del circuito de la figura 4.85, sea *A* una fuente de tensión de 5 V con referencia positiva en la parte superior, *B* una fuente de corriente de 3 A con la flecha apuntando hacia la conexión a tierra, *C* una resistencia de 3 Ω a una fuente de corriente de *D* a una fuente de corriente de 2 A con la flecha apuntando hacia la conexión a tierra, *F* una fuente de tensión de 1 V con referencia negativa a la derecha y *E* una resistencia de 4 Ω. Calcular i_1.

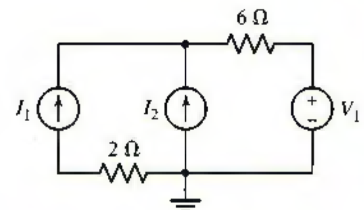


■ **FIGURA 4.85**

58. Elegir cualquier valor distinto de cero para I_1, I_2 y V_1 de modo que la resistencia de 6 Ω en el circuito de la figura 4.86 disipe 6 W.

59. En el caso del circuito de la figura 4.84, sustituir la fuente de corriente de 2 mA por una fuente de tensión de 2 V, y la fuente de 3 V por una fuente de corriente de 7 mA. Determinar las corrientes de malla del nuevo circuito.

60. En el circuito de la figura 4.85, *A* es una fuente de corriente dependiente cuya flecha apunta hacia abajo y con valor de $5i_1$. Sean *B* y *E* resistencias de 2 Ω cada uno, *C* una fuente de corriente de 2 A cuya flecha apunta hacia la conexión a tierra, *F* una fuente de tensión de 2 V con la referencia negativa conectada a tierra, y *D* una fuente de corriente de 3 A con la flecha en la parte superior; calcular las tensiones nodales y las corrientes de malla.



■ **FIGURA 4.86**

4.6 Análisis de circuitos asistido por computadora

61. Utilizar PSpice para verificar la solución del ejercicio 52. Presentar la impresión de un diagrama marcado en forma apropiada. Incluir los cálculos manuales.

62. Utilizar PSpice para verificar la solución del ejercicio 54. Presentar la impresión de un esquema marcado en forma apropiada. Incluir los cálculos manuales.

63. Con PSpice verificar la solución del ejercicio 56. Presentar la impresión de un esquema marcado de manera apropiada. Incluir los cálculos manuales.

64. Mediante PSpice comprobar la solución del ejercicio 58. Presentar la impresión de un esquema marcado de manera apropiada. Incluir los cálculos manuales.

65. Utilizar PSpice para obtener la solución del ejercicio 60. Presentar la impresión de un esquema marcado de manera apropiada. Incluir los cálculos manuales.

66. Construir un circuito compuesto por una fuente de 5 V en serie con una resistencia de 100 Ω conectada a una red que incluye al menos una fuente de 3 A, tres resistencias diferentes y una fuente de corriente controlada por tensión que depende de la tensión en los extremos de la resistencia de 100 Ω. (*a*) Determinar todas las tensiones de nodo y todas las corrientes de rama. (*b*) Utilizar PSpice para verificar sus resultados.

67. Construir un circuito mediante una batería de 10 V, una fuente de 3 A y tantas resistencias de 1 Ω como sea necesario para obtener un potencial de 5 V en los extremos de una fuente de 3 A. Comprobar sus cálculos manuales con PSpice.

68. Elaborar una plataforma de entrada apropiada para SPICE a fin de determinar v_5 en el circuito de la figura 4.87. Presentar una impresión del archivo de salida, con la solución subrayada.

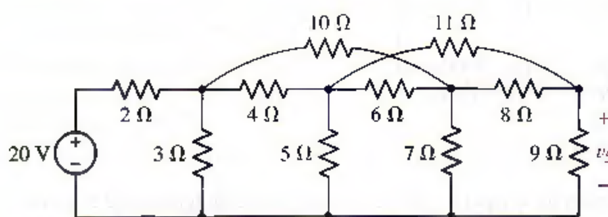


FIGURA 4.87

69. Diseñar un circuito utilizando únicamente baterías de 9 V y resistencias que proporcionen tensiones nodales de 4 V, 3 V y 2 V. Escribir una plataforma de entrada apropiada para SPICE a fin de simular su solución y presentar una impresión del archivo de salida con las tensiones deseadas subrayadas. Dibujar un diagrama marcado sobre la impresión como referencia, con los números de nodo identificados.

70. Una cadena muy larga de luces exteriores multicolores se instala sobre una casa. Después de aplicar la potencia, el propietario observa que se han quemado dos focos eléctricos. (*a*) ¿Las luces están conectadas en serie o en paralelo? (*b*) Elaborar una plataforma de entrada SPICE para simular las luces, suponiendo un alambre de calibre 20 AWG, 115 V ca del suministro de potencia y un valor nominal de los focos individuales de 1 W. Hay 400 luces en la cadena; por simplicidad simular un circuito eléctricamente equivalente con tan sólo 25 componentes. Presentar una impresión del archivo de salida, subrayando la potencia suministrada por la toma de corriente de pared. (*c*) Después de sustituir las focos fundidos, el propietario observa que las luces más cercanas a la toma de corriente son casi 10% más brillantes que las luces del otro extremo de la cadena. Dar una posible explicación, sin olvidar que ningún elemento de la cadena es de cero ohms.

CAPÍTULO 5

Técnicas útiles para el análisis de circuitos

CONCEPTOS CLAVE

La superposición como un medio para *determinar las contribuciones individuales* de diferentes fuentes a cualquier corriente o tensión.

La transformación de fuente como un medio para transformar circuitos.

El teorema de Thévenin.

El teorema de Norton.

Redes equivalentes de Thévenin y de Norton.

Máxima transferencia de potencia.

Transformaciones $\Delta \leftrightarrow Y$ en redes resistivas.

Selección de una combinación particular de técnicas de análisis.

Simulaciones de barrido de cd mediante PSpice.

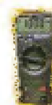
INTRODUCCIÓN

Las técnicas de análisis nodal y de malla que se describieron en el capítulo 4 representan métodos muy confiables y extremadamente poderosos. Sin embargo, ambos requieren del desarrollo de un conjunto completo de ecuaciones a fin de describir un circuito particular como regla general, aun cuando sólo sea de interés un valor de corriente, de tensión o de potencia. En este capítulo se hace una investigación de las diferentes técnicas para aislar partes específicas de un circuito a fin de simplificar el análisis. Después de examinar el uso de estas técnicas, el enfoque se concentrará en cómo seleccionar un modelo sobre otro.

5.1 LINEALIDAD Y SUPERPOSICIÓN

Todos los circuitos que se planea analizar se pueden clasificar como *circuitos lineales*, así que es un buen momento para detallar más, al definir con exactitud lo que entendemos por eso. Luego de ello, se considera la consecuencia más importante de la linealidad, el principio de ***superposición***, el cual resulta fundamental y aparecerá de manera repetida en el estudio del análisis de circuitos lineales. En realidad, el hecho de no poder aplicar la superposición en los circuitos no lineales ¡es la principal razón de que sean tan difíciles de analizar!

> El principio de superposición establece que la *respuesta* (una corriente o tensión deseadas) en un circuito lineal que tiene más de una fuente independiente se obtiene mediante la suma de las respuestas ocasionadas por las fuentes independientes separadas que *actúan solas*.



Elementos lineales y circuitos lineales

Se definirá primero un ***elemento lineal*** como un elemento pasivo que tiene una relación lineal de tensión-corriente. Por "relación lineal de tensión-corriente" se entiende simplemente que al multiplicar la corriente que atraviesa el elemento por una constante K se tiene como resultado la multiplicación de la tensión en el elemento por la misma constante K. En este caso, sólo se ha definido un elemento pasivo (la resistencia) y su relación de tensión-corriente

$$v(t) = Ri(t)$$

es claramente lineal. En realidad, si $v(t)$ se grafica como función de $i(t)$, se obtiene una recta.

También se debe definir una ***fuente dependiente lineal*** como una fuente de corriente o tensión dependiente, cuya corriente o tensión de salida resulta proporcional sólo a la primera potencia de la variable de corriente o tensión especificada en el circuito (o a la *suma* de tales cantidades). Por ejemplo, la fuente de tensión dependiente $v_s = 0.6i_1 - 14v_2$ es lineal, pero $v_s = 0.6i_1^2$ y $v_s = 0.6i_1v_2$ no lo son.

Ahora se podría definir un ***circuito lineal*** como el que está compuesto en forma completa por fuentes independientes, fuentes dependientes lineales y elementos lineales. A partir de esta definición, se demuestra[1] que "la respuesta es proporcional a la fuente", o que la multiplicación de todas las tensiones y corrientes de fuente independiente por una constante K incrementa todas las respuestas de corriente y tensión por el mismo factor K (incluyendo las salidas de tensión y corriente de la fuente dependiente).

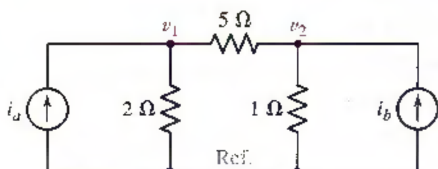


FIGURA 5.1 Circuito con dos fuentes de corriente independientes.

El principio de superposición

La consecuencia más importante de la linealidad es la superposición. Se desarrolla el principio de superposición considerando primero el circuito de la figura 5.1, que contiene dos fuentes independientes, los generadores de corriente que imponen las corrientes i_a e i_b en el circuito. Por esta razón, las fuentes a menudo se denominan *funciones forzadas* y las tensiones nodales que producen se denominan *funciones de respuesta* o simplemente *respuestas*. Quizá tanto las funciones forzadas como las respuestas sean funciones del tiempo. Las dos ecuaciones nodales de este circuito son

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \quad [1]$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \quad [2]$$

Ahora se efectuará el experimento x. Se cambian las dos funciones forzadas a i_{ax} e i_{bx}; las dos tensiones desconocidas serán ahora diferentes, por lo que se denominarán v_{1x} y v_{2x}. Por lo tanto,

$$0.7v_{1x} - 0.2v_{2x} = i_{ax} \quad [3]$$

$$-0.2v_{1x} + 1.2v_{2x} = i_{bx} \quad [4]$$

Enseguida se lleva a cabo el experimento y al cambiar las corrientes de fuente por i_{ay} e i_{by} midiendo también las respuestas v_{1y} y v_{2y}:

$$0.7v_{1y} - 0.2v_{2y} = i_{ay} \quad [5]$$

$$-0.2v_{1y} + 1.2v_{2y} = i_{by} \quad [6]$$

(1) La demostración implicaría comprobar primero que el uso del análisis nodal en los circuitos lineales da como resultado sólo ecuaciones lineales de la forma

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_Nv_N = b$$

donde las a_i son constantes (combinaciones de valores de resistencia o conductancia, constantes que aparecen en expresiones de fuentes dependientes, 0 o ±1), las v_i son tensiones de nodos desconocidas (respuestas) y b es un valor de fuente independiente o una suma de valores de fuentes independientes. Dado un conjunto de este tipo de ecuaciones, si se multiplican todas las b por K, entonces resulta evidente que la solución de este nuevo conjunto de ecuaciones serán las tensiones de nodo, $Kv_1, Kv_2, \ldots, Kv_N$.

Los tres conjuntos de ecuaciones describen el mismo circuito con tres conjuntos diferentes de corrientes de fuente. Se van a *sumar* o "*superponer*" los dos últimos conjuntos de ecuaciones. Al sumar las ecuaciones [3] y [5]:

$$(0.7v_{1x} + 0.7v_{1y}) - (0.2v_{2x} + 0.2v_{2y}) = i_{ax} + i_{ay} \qquad [7]$$

$$0.7v_1 \quad - \quad 0.2v_2 \quad = \quad i_a \qquad [1]$$

y al sumar las ecuaciones [4] y [6]:

$$-(0.2v_{1x} + 0.2v_{1y}) + (1.2v_{2x} + 1.2v_{2y}) = i_{bx} + i_{by} \qquad [8]$$

$$-0.2v_1 \quad + \quad 1.2v_2 \quad = \quad i_b \qquad [2]$$

donde la ecuación [1] se escribió de inmediato debajo de la ecuación [7], y la ecuación [2] debajo de la ecuación [8] para una fácil comparación.

La linealidad de todas las ecuaciones permite comparar la ecuación [7] con la [1], y la ecuación [8] con la [2], además de extraer una conclusión interesante. Si elegimos i_{ax} e i_{ay} de manera que su suma sea i_a y elegimos i_{bx} e i_{by} de modo que su suma corresponda a i_b, entonces las respuestas deseadas v_1 y v_2 se determinan sumando v_{1x} a v_{1y} y v_{2x} a v_{2y}, respectivamente. En otras palabras, se tiene la posibilidad de efectuar el experimento *x* y observar las respuestas, hacer el experimento *y* y observar las respuestas, y finalmente sumar ambos conjuntos de respuestas. Esto conduce al concepto fundamental implicado en el principio de superposición: examinar cada fuente independiente (y la respuesta que genera), una a la vez, junto con las otras fuentes independientes "desactivadas" o "con salida cero".

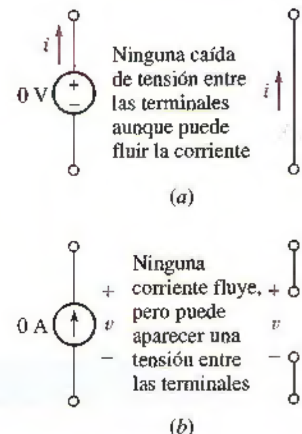


FIGURA 5.2 (*a*) Fuente de tensión igual a cero que actúa como un cortocircuito. (*b*) Fuente de corriente igual a cero que funciona como un circuito abierto.

Si se reduce una fuente de tensión a cero volts, se genera en verdad un cortocircuito (fig. 5.2*a*). Si se reduce una fuente de corriente a cero amper, se crea un circuito abierto (fig. 5.2*b*). De tal modo, el ***teorema de superposición*** expresa que:

> En cualquier red resistiva lineal, la tensión o la corriente a través de cualquier resistencia o fuente se calcula mediante la suma algebraica de todas las tensiones o corrientes individuales ocasionadas por fuentes independientes separadas que actúan solas, junto con todas las demás fuentes de tensión independientes sustituidas por cortocircuitos y todas las demás fuentes de corriente independientes, sustituidas por circuitos abiertos.

Por lo tanto, si hay *N* fuentes independientes se deben efectuar *N* experimentos, cada uno con sólo una de las fuentes independientes activas y las otras inactivas, desconectadas o con salida cero. Obsérvese que las fuentes *dependientes* se encuentran en general activas en cada experimento.

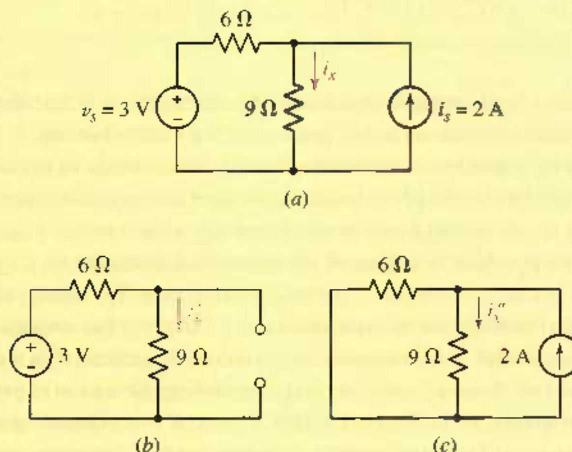
Sin embargo, el circuito que se utilizó como ejemplo indica que podría enunciarse un teorema de mucho mayor alcance; pues un *grupo* de fuentes independientes puede hacerse activo e inactivo de manera colectiva, si así se desea. Por ejemplo, supóngase que hay tres fuentes independientes. El teorema establece que se podría encontrar una respuesta dada al considerar que cada una de las tres fuentes actúa sola y después se suman los tres resultados. De manera alterna, se calcularía la respuesta debida a la primera y a la segunda fuente que operan con la tercera inactiva, y sumando luego a ésta la respuesta ocasionada por la tercera fuente actuando sola. Esto equivale a tratar varias fuentes de manera colectiva como una especie de "superfuente".

Tampoco hay razón para que una fuente independiente deba asumir sólo su valor dado o un valor cero en los diversos experimentos: sólo es necesario que la suma de los diversos valores sea igual al valor original. Sin embargo, una fuente inactiva casi siempre propicia que el circuito sea de lo más simple.

Se ilustrará la aplicación del principio de superposición mediante un ejemplo en el que están presentes ambos tipos de fuente independiente.

EJEMPLO 5.1

En el circuito de la figura 5.3*a*, utilizar la superposición para escribir la expresión de la corriente de rama desconocida i_x.



■ **FIGURA 5.3** (*a*) Ejemplo de circuito con dos fuentes independientes para las cuales se desea la corriente de rama i_x; (*b*) el mismo circuito con la fuente de corriente en circuito abierto; (*c*) el circuito original con la fuente de tensión en cortocircuito.

Primero se iguala a cero la fuente de corriente y se vuelve a dibujar el circuito, como se ilustra en la figura 5.3*b*. La parte de i_x debida a la fuente de tensión se ha denominado i_x' para evitar confusiones; además, se calcula sin ninguna dificultad su valor, que es de 0.2 A.

A continuación se iguala a cero la fuente de tensión de la figura 5.3*a* y de nuevo se dibuja el circuito, como en la figura 5.3*c*. La aplicación rutinaria de la división de corriente permite determinar que i_x'' (la parte de i_x debida a la fuente de corriente de 2 A) es igual a 0.8 A.

Ahora es factible calcular la corriente completa i_x como la suma de las dos componentes individuales:

$$i_x = i_x|_{3\text{ V}} + i_x|_{2\text{ A}} = i_x' + i_x''$$

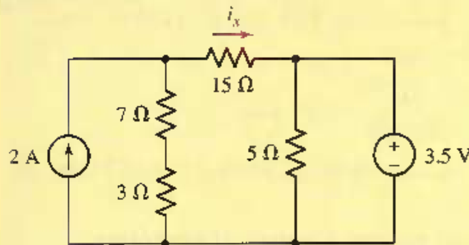
o

$$i_x = \frac{3}{6+9} + 2\left(\frac{6}{6+9}\right) = 0.2 + 0.8 = 1.0 \text{ A}$$

Otra manera de examinar este ejemplo es que la fuente de 3 V y la fuente de 2 A se encuentran cada una efectuando un trabajo sobre el circuito, lo cual origina una corriente total i_x que fluye por la resistencia de 9 Ω. *Sin embargo, la contribución de la fuente de 3 V a i_x no depende de la contribución de la fuente de 2 A, y viceversa.* Por ejemplo, si se duplica la salida de la fuente de 2 A hasta 4 A, contribuirá ahora con 1.6 A a la corriente total i_x que fluye por la resistencia de 9 Ω. Sin embargo, la fuente de 3 V seguirá contribuyendo con sólo 0.2 A a i_x, para una nueva corriente total de 0.2 + 1.6 = 1.8 A.

PRÁCTICA

5.1 Aplicar el principio de superposición en el circuito de la figura 5.4 para calcular la corriente i_x.



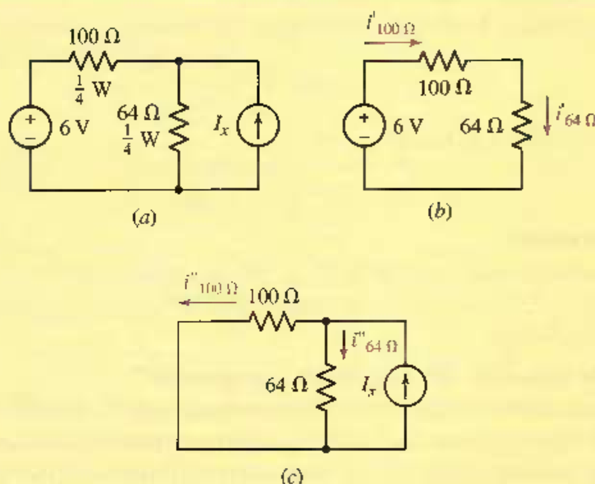
■ **FIGURA 5.4**

Respuesta: 660 mA.

Como se verá, por lo general, la superposición no reduce la carga de trabajo cuando se considera un circuito particular, puesto que implica el análisis de varios nuevos circuitos para obtener la respuesta deseada. Sin embargo, resulta muy útil para identificar la importancia de varias partes de un circuito más complejo. También constituye la base del análisis fasorial, el cual se presenta en el capítulo 10.

EJEMPLO 5.2

Refiriéndose al circuito de la figura 5.5*a*, determinar la corriente *positiva* máxima a la cual la fuente I_x puede ajustarse, antes de que cualquier resistencia supere su valor nominal de potencia y se sobrecaliente.



■ **FIGURA 5.5** (*a*) Circuito con dos resistencias con valor nominal de $\frac{1}{4}$ W cada uno. (*b*) Circuito con solamente la fuente de 6 V activa. (*c*) Circuito con la fuente I_x activa.

Identificar el objetivo del problema.

Cada resistencia se especifica hasta un máximo de 250 mW. Si el circuito permite que se exceda este valor (al forzar demasiada corriente a través de cualquier resistencia), ocurrirá un calentamiento excesivo, lo que quizás provoque un accidente. La fuente de 6 V no puede cambiarse, por lo que

(Continúa en la siguiente página)

se debe encontrar una ecuación que incluya a I_x y a la corriente máxima a través de cada resistencia.

Recopilar la información conocida.

Con base en su valor nominal de potencia de 250 mW, la corriente máxima que la resistencia de 100 ohms tolera es:

$$\sqrt{\frac{P_{máx}}{R}} = \sqrt{\frac{0.250}{100}} = 50 \text{ mA}$$

y, de modo similar, la corriente que circula por el resistor de 64 Ω debe ser menor que 62.5 mA.

Eligir la técnica disponible que mejor se ajuste al problema.

Se aplica el análisis nodal o el de malla para la solución de este problema, aunque la superposición quizá dé una visión un poco diferente, puesto que se está interesado principalmente en el efecto de la fuente de corriente.

Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.

Mediante la superposición, se vuelve a dibujar el circuito como en la figura 5.5*b* y se puede ver que la fuente de 6 V aporta una corriente de:

$$i'_{100\Omega} = \frac{6}{100+64} = 36.59 \text{ mA}$$

a la resistencia de 100 ohms y puesto que la resistencia de 64 ohms está en serie, $i'_{64\Omega} = 36.59$ mA.

Reconociendo al divisor de corriente de la figura 5.5*c*, se observa que $i''_{64\Omega}$ se *sumará* a $i'_{64\Omega}$, pero $i''_{100\Omega}$ tiene una dirección *opuesta* a $i'_{100\Omega}$. En consecuencia I_X $62.5 - 36.59 = 25.91$ mA contribuye con seguridad hasta a la corriente de la resistencia de 64 Ω y hasta $50 - (-36.59) = 86.59$ mA a la corriente de la resistencia de 100 Ω.

La resistencia de 100 Ω impone la siguiente restricción sobre I_X:

$$I_X < (86.59 \times 10^{-3})\left(\frac{100+64}{64}\right)$$

y la resistencia de 64 Ω requiere que:

$$I_X < (25.91 \times 10^{-3})\left(\frac{100+64}{100}\right)$$

Intentar resolver.

Si se considera primero la resistencia de 100 Ω se puede ver que I_X está limitada a $I_X < 221.9$ mA. La resistencia de 64 Ω limita a I_X de manera que $I_X < 42.49$ mA.

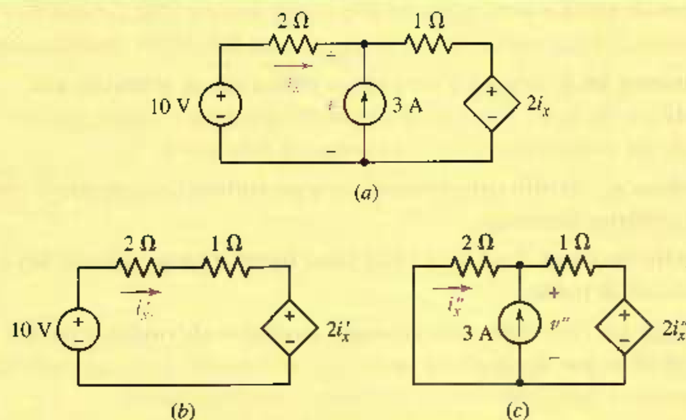
Verificar la solución. ¿Es razonable o esperada?

Para satisfacer ambas restricciones I_X debe ser menor que 42.49 mA. Si se incrementa el valor, la resistencia de 64 Ω se sobrecalentará mucho antes de que lo haga la resistencia de 100 Ω. Una manera en particular útil de evaluar la solución consiste en efectuar un análisis de barrido de cd en PSpice, como se describe en el ejemplo siguiente. Sin embargo, una cuestión interesante es si se habría esperado que la resistencia de 64 Ω se sobrecalentara primero.

Originalmente se encuentra que la resistencia de 100 Ω tiene una corriente máxima más pequeña, por lo que podría ser razonable esperar que limitará a I_X. Sin embargo, debido a que I_X se *opone* a la corriente enviada por la fuente de 6 V a través de la resistencia de 100 Ω, pero se *suma* a la contribución de la fuente de 6 V a la corriente que circula por el resistor de 64 Ω resulta que trabaja de otra forma: es la resistencia de 64 Ω el que fija el límite sobre I_X.

EJEMPLO 5.3

En el circuito de la figura 5.6*a*, aplicar el principio de la superposición para determinar el valor de i_x.



■ **FIGURA 5.6** (*a*) Ejemplo de un circuito con dos fuentes independientes y una dependiente, para la que se desea la corriente de rama i_x. (*b*) Circuito con la fuente de 3 A en circuito abierto. (*c*) Circuito original con la fuente de 10 V en cortocircuito.

Se pone primero en circuito abierto la fuente de 3 A (fig. 5.6*b*). La ecuación de una malla es

$$-10 + 2i'_x + 1i'_x + 2i'_x = 0$$

por lo que

$$i'_x = 2 \text{ A}$$

A continuación, se pone en cortocircuito la fuente de 10 V (fig. 5.6*c*) y se escribe la ecuación de un nodo:

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'' - 2i''_x}{1} = 3$$

y se relaciona la cantidad controladora de la fuente dependiente para v'':

$$v'' = 2(-i''_x)$$

Se encuentra:

$$i''_x = -0.6 \text{ A}$$

y, por lo tanto

$$i_x = i'_x + i''_x = 2 + (-0.6) = 1.4 \text{ A}$$

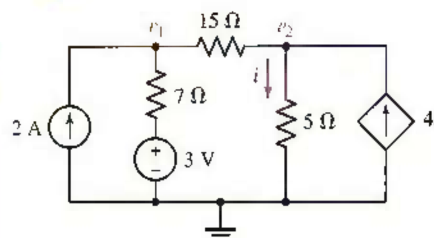
Observar que al volver a dibujar cada subcircuito, siempre se ha tenido cuidado de usar algún tipo de notación para indicar que no se está trabajando con las variables originales. Esto evita la aparición de errores bastante desastrosos cuando se suman los resultados individuales.



PRÁCTICA

5.2 Utilizar la superposición en el circuito de la figura 5.7 para obtener la tensión a través de cada fuente de corriente.

Respuesta: $v_1|_{2A} = 9.180$ V, $v_2|_{2A} = -1.148$ V, $v_1|_{3V} = 1.967$ V, $v_2|_{3V} = -0.246$ V; $v_1 = 11.147$ V, $v_2 = -1.394$ V.



■ **FIGURA 5.7**

Resumen del procedimiento básico de superposición

1. **Seleccionar una de las fuentes independientes. Fijar el valor de las otras fuentes independientes a cero.** Lo anterior significa que las fuentes de tensión se reemplazan con cortocircuitos y las fuentes de corriente con circuitos abiertos. Dejar intactas las fuentes dependientes.
2. **Remarcar las tensiones y corrientes utilizando la notación adecuada** (es decir, v', i_2''). Asegurarse de remarcar las variables de control de las fuentes dependientes para evitar confusión.
3. **Analizar el circuito simplificado para encontrar las corrientes y/o las tensiones deseadas.**
4. **Repetir los pasos 1 a 3 hasta que cada fuente independiente haya sido considerada.**
5. **Agregar las corrientes y/o tensiones parciales obtenidas a partir del análisis por separado.** Poner especial atención a los signos de las tensiones y direcciones de las corrientes cuando se sumen.
6. **No agregar cantidades de potencia.** Si se requieren cantidades que involucren potencias, calcular solamente después de que las tensiones parciales y/o corrientes hayan sido sumadas.

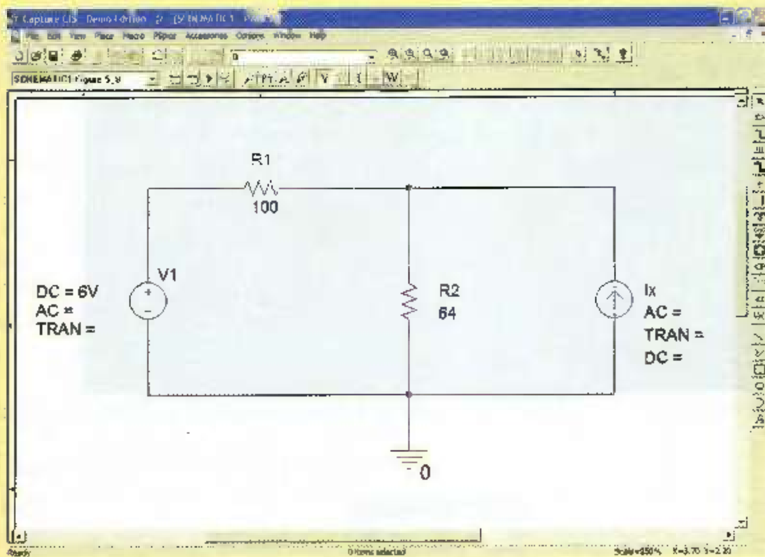
Observar que el paso 1 puede modificarse en diferentes formas. Primero, las fuentes independientes pueden considerarse en grupos en lugar de hacerlo en forma individual si esto simplifica el análisis, siempre y cuando no se incluya ninguna fuente independiente en más de un subcircuito. Segundo, desde el punto de vista técnico no es necesario fijar las fuentes a un valor cero, aunque hacerlo casi siempre es la mejor opción. Por ejemplo, una fuente de 3 V puede aparecer en dos subcircuitos como una fuente de 1.5 V, puesto que $1.5 + 1.5 = 3$ V de la misma forma que $0 + 3 = 3$ V. Sin embargo, debido a que no es probable simplificar el análisis, no tiene caso hacer ese ejercicio.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

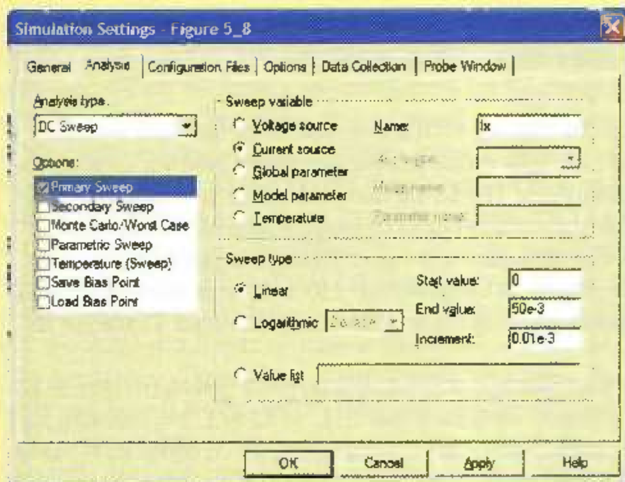
Aunque PSpice es extremadamente útil para verificar que se analiza de manera correcta un circuito completo, también sirve de ayuda para determinar la contribución de cada fuente a una respuesta particular. Para ello, se emplea lo que se conoce como *un barrido de parámetros de cd.*

Considerar el circuito del ejemplo 5.2, cuando se le solicitó determinar la máxima corriente positiva que podría obtenerse de la fuente de corriente sin exceder el valor nominal de potencia de cualquier resistencia en el circuito. El circuito se presenta rediseñado en la figura 5.8, utilizando la herramienta de captura de esquemas de PSpice. Observar que no se asignó un valor a la fuente de corriente.

Después de que se introdujo y se guardó el esquema, el siguiente paso es especificar los parámetros de barrido de cd. Esta opción permite especificar un intervalo de valores para una fuente de tensión o de corriente (en el caso presente, la fuente de corriente I_x), en lugar de un valor específico. Si se selecciona **New Simulation Profile** en **PSpice,** se proporciona un nombre para el perfil y se presenta la caja de diálogo que se muestra en la figura 5.9.



■ **FIGURA 5.8** Circuito del ejemplo 5.2.

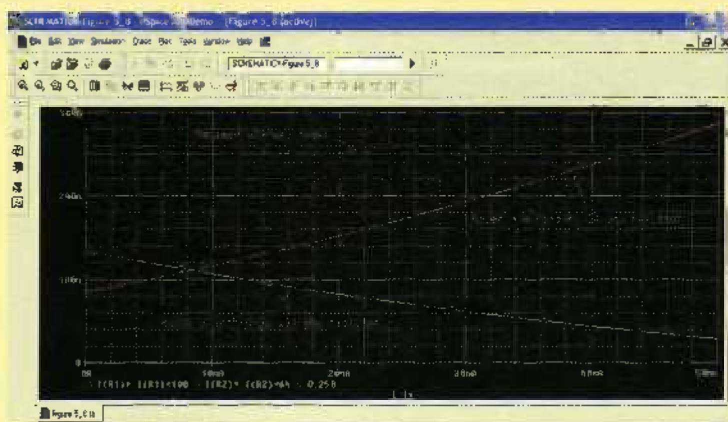


■ **FIGURA 5.9** Ventana de diálogo del barrido cd que se muestra con la I_x elegida como variable.

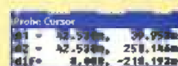
En **Analysis Type**, se accede a la opción **DC Sweep** y se especifica la "variable de barrido" como **Current Source**, y luego se teclea I_x en la caja de **Name**. Existen varias opciones bajo Sweep Type: **Linear, Logarithmic** y **Value List**. La última opción permite especificar cada valor que se asignará a I_x. Sin embargo, para generar una gráfica uniforme se elige efectuar un barrido **Linear** con un **Start Value** de 0.01 mA, un **End Value** de 50 mA y un **Increment** de 0.01 mA.

Después de efectuar la simulación, el programa graficador de salida Probe se inicia de manera automática. Cuando aparece la ventana, se presenta el eje horizontal (correspondiente a nuestra variable, I_x) pero debe escogerse la variable del eje vertical. Al seleccionar **Add Trace** del menú **Trace** se hace clic en **I(R1)**, luego se teclea un asterisco en la caja **Trace**

(Continúa en la siguiente página)



(*a*)



(*b*)

FIGURA 5.10 (*a*) Salida de sondeo con leyendas que identifican la potencia absorbida en forma individual por las dos resistencias. También se incluyó una línea horizontal que indica 250 mW, así como leyenda para mejorar la claridad. (*b*) Ventana de diálogo Cursor.

Expression se hace clic otra vez en **I(R1)** se inserta incluso otro asterisco, y por último se teclea 100. Esta rutina permite que Probe grafique la potencia que absorbe la resistencia de 100 Ω. De manera similar, se repite el proceso para sumar la potencia absorbida por la resistencia de 64 Ω lo que origina una gráfica similar a la ilustrada en la figura 5.10*a*. A la gráfica también se añadió una recta de referencia horizontal en 250 mW, tecleando 0.250 en la caja **Trace Expression** luego de elegir **Add Trace** del menú **Trace por tercera vez.**

Se puede ver en la gráfica que la resistencia de 64 Ω *supera* su valor de potencia nominal de 250 mW en la vecindad de $I_x = 43$ mA. Sin embargo, se observa que independientemente del valor de la fuente de corriente I_x (siempre y cuando se encuentre entre 0 y 50 mA), la resistencia de 100 Ω nunca disipará 250 mW; en realidad, la potencia absorbida *disminuye* con el aumento de corriente de la fuente de corriente. Si se desea una respuesta más precisa, sólo es necesario elegir la herramienta del cursor, la cual se invoca seleccionando **Trace, Cursor** y **Display** de la barra de menús. La figura 5.10*b* muestra el resultado al arrastrar ambos cursores hacia 42.53 mA; la resistencia de 64 Ω apenas ha superado su valor nominal en este nivel de corriente. Se obtiene una mayor precisión al reducir el valor de incremento empleado en el barrido de cd.

Esta técnica resulta muy útil para analizar circuitos electrónicos, donde podría ser necesario determinar qué tensión de entrada se requiere para un circuito de amplificador complicado, a fin de obtener una tensión de salida cero. También se observa que hay varios tipos más de barridos de parámetros, incluyendo un barrido de tensión cd. La capacidad para variar la temperatura sólo es útil cuando se trabaja con modelos de componentes que tienen un parámetro de temperatura incorporado, como los diodos y los transistores.

Desafortunadamente, resulta que casi siempre se ahorra poco tiempo, o nada, cuando se analiza un circuito que contiene una o más fuentes dependientes mediante el uso del principio de superposición, ya que siempre debe haber al menos dos fuentes en operación: una fuente independiente y todas las fuentes dependientes.

En todo momento se debe estar consciente de las limitantes de la superposición. Se aplica sólo para respuestas lineales, y en consecuencia la respuesta no lineal más común —la potencia— no está sujeta a la superposición. Por ejemplo, considerar dos baterías de 1 V en serie con una resistencia de 1 Ω. La potencia que se entrega a la resistencia es evidentemente igual a 4 W, pero se trata de manera errónea de aplicar la superposición, se podría decir que cada batería provee 1 W, y por ello la potencia total sería 2 W. Lo anterior es incorrecto, pero es un error que se comete con una facilidad sorprendente.



5.2 TRANSFORMACIONES DE FUENTE

Fuentes de tensión prácticas

Hasta ahora se ha trabajado sólo con fuentes *ideales* de tensión y de corriente; ahora es tiempo de acercarse más a la realidad y considerar fuentes *prácticas,* las cuales permitirán efectuar representaciones más exactas de los dispositivos físicos. Una vez que se hayan definido las fuentes *prácticas,* se verá que las fuentes prácticas de corriente y tensión se podrían intercambiar sin afectar al resto del circuito. Tales fuentes se denominarán fuentes *equivalentes.* Los métodos resultarán aplicables a las fuentes independientes y a las dependientes, si bien se encontrará que no son tan útiles con las fuentes dependientes.

La fuente de tensión ideal se definió como un dispositivo cuya tensión terminal es independiente de la corriente que circula por él. Una fuente de 1 V cd produce una corriente de 1 A a través de una resistencia de 1 Ω así como una corriente de 1 000 000 A para una resistencia de 1 $\mu\Omega$; ésta puede proporcionar una cantidad de potencia ilimitada. En la práctica, desde luego, no existe tal dispositivo, así que, como se acordó antes, una fuente de tensión física *real* podría representarse mediante una fuente de tensión *ideal* en la medida en que de ella se extrajeran corrientes, o potencias, relativamente pequeñas. Por ejemplo, se puede imitar una batería de automóvil mediante una fuente ideal de tensión de cd de 12 V si su corriente se limita a unos cuantos amperes (fig. 5.11*a*). Sin embargo, cualquiera que haya tratado de hacer arrancar un automóvil con las luces de los faros encendidas debe haber observado que se atenúan de manera perceptible cuando se requiere que la batería entregue la pesada corriente de arranque (100 A o más) además de la corriente de los faros. En estas condiciones, una fuente de tensión ideal no es en realidad una representación adecuada de la batería.

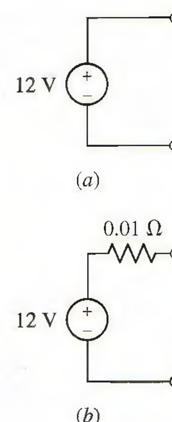
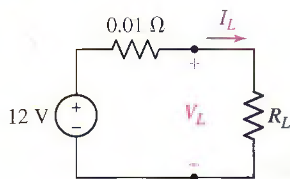
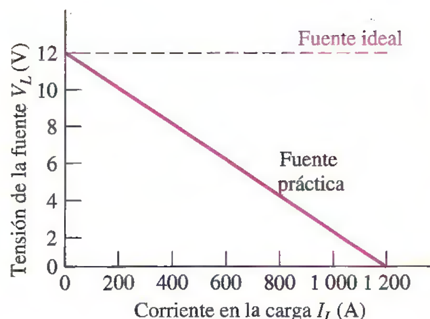


FIGURA 5.11 (*a*) Fuente de tensión ideal de 12 V cd utilizada para hacer un modelo de una batería de automóvil. (*b*) Modelo más exacto que toma en cuenta la reducción observada en la tensión de terminal a corrientes elevadas.

Para reflejar mejor el comportamiento de un dispositivo real, la fuente de tensión ideal debe modificarse para tomar en cuenta la reducción de su tensión de terminal cuando se extraen de ella grandes corrientes. Suponer que se observa en forma experimental que la batería de automóvil tiene una tensión de terminal de 12 V cuando no fluye corriente a través de ella, y una tensión reducida de 11 V cuando circula una corriente de 100 A. ¿Cómo se podría hacer un modelo de este comportamiento? Bien, un modelo más preciso podría ser una fuente de tensión ideal de 12 V en serie con una resistencia en cuyos extremos aparece 1 V cuando circulan 100 A a través de ella. Un cálculo rápido muestra que la resistencia debe ser de $1\ \text{V}/100\ \text{A} = 0.01\ \Omega$, así que la fuente de tensión ideal y la resistencia en serie constituyen una ***fuente de tensión práctica*** (fig. 5.11*b*). Por consiguiente, se está utilizando una combinación en serie de dos elementos de circuito ideales, una fuente de tensión independiente y una resistencia, para modelar un dispositivo real.





■ **FIGURA 5.12** (*a*) Fuente práctica que se asemeja al comportamiento de cierta batería de automóvil de 12 V, se muestra conectada a determinada resistencia de carga R_L. (*b*) La relación entre I_L y V_L es lineal.

Desde luego que no se espera encontrar tal arreglo de elementos ideales dentro de la batería de automóvil. Cualquier dispositivo real se caracteriza por una cierta relación de corriente-tensión en sus terminales, de modo que el problema consiste en desarrollar alguna combinación de elementos ideales que pueda proporcionar una característica de corriente-tensión similar, al menos en algún intervalo útil de corriente, tensión o potencia.

En la figura 5.12*a* se exhibe el modelo práctico de dos piezas de la batería de automóvil conectada ahora a cierta resistencia de carga R_L. La tensión de terminal de la fuente práctica es la misma que la tensión en R_L y se denomina[2] V_L. La figura 5.12*b* muestra una gráfica de la corriente de carga V_L como una función de la tensión de carga I_L para esta fuente práctica. La ecuación LVK para el circuito de la figura 5.12*a* se expresaría en términos de I_L y V_L como:

$$12 = 0.01I_L + V_L$$

y por ello:

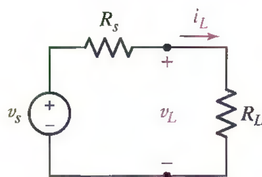
$$V_L = -0.01I_L + 12$$

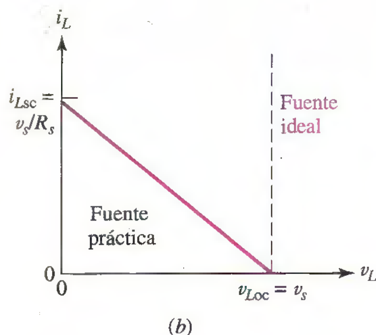
Es una ecuación lineal en I_L y V_L, así que la gráfica en la figura 5.12*b* es una línea recta. Cada punto sobre la línea corresponde a un valor diferente de R_L. Por ejemplo, el punto medio de la línea recta se obtiene cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna de la fuente práctica, o $R_L = 0.01\ \Omega$. En este caso, la tensión de carga es exactamente la mitad de la tensión de la fuente ideal.

Cuando $R_L = \infty$ y la carga no jala ninguna corriente de ningún tipo, la fuente práctica se encuentra en circuito abierto y la tensión terminal, o la tensión en circuito abierto, es $V_{Loc} = 12$ V. Si, por otra parte, $R_L = 0$, con lo cual se pone en cortocircuito las terminales de carga, entonces circulará una corriente de carga o de cortocircuito $I_{LSC} = 1\,200$ A. *(En la práctica, un experimento de este tipo quizá ¡tendría como resultado la destrucción del cortocircuito, la batería y cualesquiera instrumentos de medición incorporados al circuito!)*

Puesto que la gráfica de V_L en función de I_L es una línea recta para tal fuente de tensión práctica, se observará que los valores de V_{Loc} e I_{Lsc} se determinan sólo de la curva $V_L - I_L$ completa.

La línea punteada horizontal que muestra la figura 5.12*b* representa la gráfica $V_L - I_L$ de una fuente de tensión *ideal*; la tensión de terminal permanece constante para cualquier valor de la corriente de carga. En la fuente de tensión práctica, la tensión de terminal tiene un valor cercano al de la fuente ideal sólo cuando la corriente de carga es más o menos pequeña.





■ **FIGURA 5.13** (*a*) Fuente de tensión práctica general conectada a una resistencia de carga R_L. (*b*) La tensión de terminal de una fuente de tensión práctica disminuye cuando i_L crece y $R_L = v_L/i_L$ disminuye. La tensión de terminal de una fuente de tensión ideal (también graficada) permanece igual para cualquier corriente suministrada a una carga.

Considerar nuevamente una fuente de tensión práctica *general*, como la de la figura 5.13*a*. La tensión de la fuente ideal es v_s, y se pone en serie con ella una resistencia R_s, llamada *resistencia interna* o *resistencia de salida.* De nuevo, se debe notar que la resistencia no está en realidad presente como un componente separado, sino que sirve para tomar en cuenta una tensión de terminal que disminuye cuando aumenta la corriente de carga. Su presencia permite hacer con mayor exactitud un modelo del comportamiento de una fuente de tensión física.

La relación lineal entre v_L e i_L es

$$v_L = v_s - R_s i_L \qquad [9]$$

(2) De aquí en adelante se seguirá la convención estándar de referirse en forma estricta a las cantidades de cd mediante letras mayúsculas, en tanto que las letras minúsculas denotan una cantidad que se sabe que posee alguna componente variable en el tiempo. Sin embargo, al explicar teoremas generales que se aplican a cd o a ca, se continuará utilizando minúsculas para subrayar la naturaleza general del concepto.

y ésta se grafica en la figura 5.13*b*. La tensión en circuito abierto ($R_L = \infty$, por lo que $i_L = 0$) es

$$v_{Loc} = v_s \qquad [10]$$

y la corriente en cortocircuito ($R_L = 0$, por lo que $v_L = 0$) es

$$i_{Lsc} = \frac{v_s}{R_s} \qquad [11]$$

También en este caso, los valores son las ordenadas al origen de la recta en la figura 5.13*b* y sirven para definirla de forma completa.

Fuentes de corriente prácticas

Una fuente de corriente ideal tampoco existe en el mundo real; no hay dispositivo físico que entregue una corriente constante, sin que importe la resistencia de carga a la que se conecta o la tensión entre sus terminales. Ciertos circuitos transistorizados entregarán una corriente constante a una amplia gama de resistencias de carga, pero la resistencia de carga siempre se hace lo bastante grande para que la corriente que circula por ella se vuelva muy pequeña. La potencia infinita simplemente nunca está disponible (para mala fortuna).

Una fuente de corriente práctica se define como una fuente de corriente ideal en paralelo con una resistencia interna R_p. Tal fuente se muestra en la figura 5.14*a*, donde se indican la corriente i_L y la tensión v_L asociadas con una resistencia de carga R_L. La aplicación de la LCK produce:

$$i_L = i_s - \frac{v_L}{R_p} \qquad [12]$$

que es otra vez una relación lineal. La tensión en circuito abierto y la corriente en cortocircuito están dadas por:

$$v_{Loc} = R_p i_s \qquad [13]$$

e

$$i_{Lsc} = i_s \qquad [14]$$

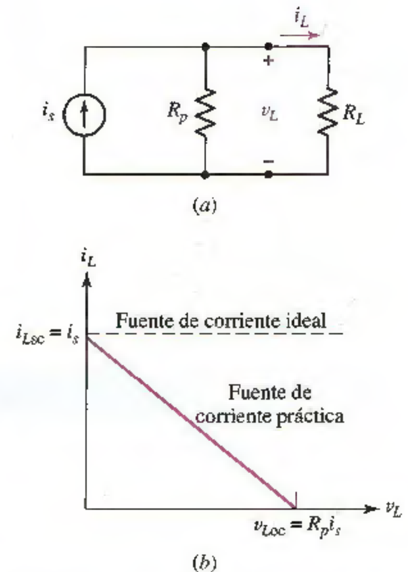
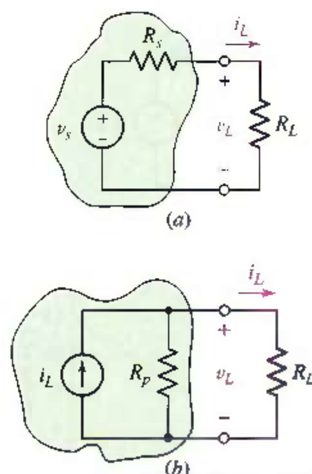


FIGURA 5.14 (*a*) Fuente de corriente práctica general conectada a una resistencia de carga R_L. (*b*) La corriente de carga proporcionada por la fuente de corriente práctica se muestra como una función de la tensión de carga.

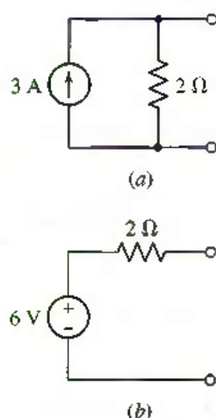
La variación de la corriente de carga con la tensión de carga variable puede observarse al modificar el valor de R_L como se ilustra en la figura 5.14*b*. La recta recorre desde el extremo del cortocircuito, o "noroeste", hasta la terminación en circuito abierto en el extremo "sureste", al incrementar R_L desde cero hasta un valor infinito de ohms. El punto medio ocurre en $R_L = R_p$. Resulta evidente que la corriente de carga i_L y la corriente de fuente ideal son casi iguales sólo para valores pequeños de la tensión de carga, los cuales se obtienen con los valores de R_L que son pequeños en comparación con R_p.

Fuentes prácticas equivalentes

Una vez definidas ambas fuentes prácticas, se está listo para explicar su equivalencia. Se dice que dos fuentes son *equivalentes* si producen valores idénticos de v_L e i_L cuando se conectan a valores idénticos de R_L, sin que importe cuál sea el valor de R_L. En vista de que $R_L = \infty$ y $R_L = 0$ son dos de esos valores, las fuentes equivalentes proporcionan la misma tensión en circuito abierto y la misma corriente en cortocircuito. En otras palabras, si se dan dos fuentes equivalentes, una fuente de tensión práctica y la otra de corriente práctica, cada una encerrada en una caja negra con sólo un par de terminales, entonces *no hay*



■ **FIGURA 5.15** (*a*) Una fuente de tensión práctica conectada a una carga R_L. (*b*) La fuente de corriente práctica equivalente conectada a la misma carga.



■ **FIGURA 5.16** (*a*) Una fuente de corriente práctica dada. (*b*) La fuente de tensión práctica equivalente.

forma de saber cuál fuente está en cuál caja al medir la corriente o la tensión en una carga resistiva.

Considerar la fuente de tensión práctica y la resistencia R_L de la figura 5.15*a*, así como el circuito compuesto por una fuente de corriente práctica y la resistencia R_L de la figura 5.15*b*. Un cálculo simple muestra que la tensión en la carga R_L de la figura 5.15*a* es igual a:

$$v_L = v_s \frac{R_L}{R_s + R_L} \qquad [15]$$

Un cálculo igual de simple señala que la tensión en la carga R_L de la figura 5.15*b* corresponde a:

$$v_L = \left[i_s \frac{R_p}{R_p + R_L} \right] \cdot R_L$$

Las dos fuentes prácticas son eléctricamente equivalentes, por lo que:

$$R_s = R_p \qquad [16]$$

y

$$v_s = R_p i_s = R_s i_s \qquad [17]$$

donde dejamos que ahora R_s represente la resistencia interna de cualesquiera de las fuentes prácticas, lo cual es la notación convencional.

Como ilustración del uso de estas ideas, considerar la fuente de corriente práctica que se exhibe en la figura 5.16*a*. Debido a que su resistencia interna es igual a 2 Ω, la resistencia interna de la fuente de tensión práctica equivalente también es igual a 2 Ω; la tensión de la fuente de tensión ideal contenida dentro de la fuente de tensión práctica es (2)(3) = 6 V. La fuente de tensión práctica equivalente se muestra en la figura 5.16*b*.

Para confirmar la equivalencia, considerar una resistencia de 4 Ω conectada a cada fuente. En ambos casos una corriente de 1 A, una tensión de 4 V y una potencia de 4 W se asocian con la carga de 4 Ω. Sin embargo, se debe observar con mucho cuidado que la fuente de corriente ideal entrega una potencia total de 12 W, mientras que la fuente de tensión ideal sólo suministra 6 W. Además, la resistencia interna de la fuente de corriente práctica absorbe 8 W, en tanto que la resistencia interna de la fuente de tensión práctica absorbe sólo 2 W. En consecuencia, se observa que las dos fuentes prácticas son equivalentes sólo con respecto a lo que sucede en las terminales de carga; ¡pero *no* son equivalentes internamente!

EJEMPLO 5.4

Calcular la corriente que circula por la resistencia de 4.7 kΩ de la figura 5.17*a* después de transformar la fuente de 9 mA en una fuente de tensión equivalente.

La fuente equivalente consiste en una fuente de tensión independiente de (9 mA) × (5 kΩ) = 45 V en serie con una resistencia de 5 kΩ como se ve en la figura 5.17*b*.

Una ecuación de la LVK simple alrededor del lazo da como resultado:

$$-45 + 5\,000I + 4\,700I + 3\,000I + 3 = 0$$

que puede resolverse con facilidad para encontrar la corriente I = 3.307 mA.

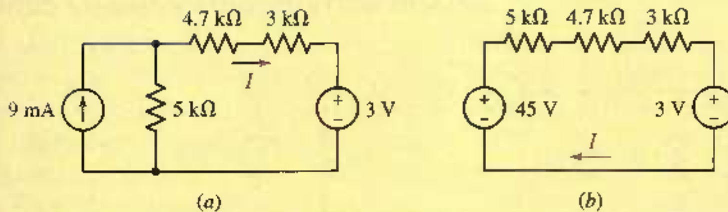


FIGURA 5.17 (*a*) Circuito con fuente de tensión y con fuente de corriente. (*b*) Circuito después de que la fuente de 9 mA se transformó en una fuente de tensión equivalente.

PRÁCTICA

5.3 Calcular la corriente I_x que circula por la resistencia de 47 kΩ del circuito de la figura 5.18, luego de efectuar una transformación de fuente sobre la fuente de tensión.

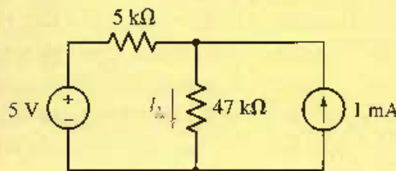


FIGURA 5.18

Respuesta: 192 μA.

EJEMPLO 5.5

Calcular la corriente que circula por la resistencia de 2 Ω de la figura 5.19*a* mediante las transformaciones de fuente.

Se comienza transformando cada fuente de corriente en una fuente de tensión (fig. 5.19*b*), donde la estrategia consiste en convertir el circuito en un lazo simple.



Se debe tener cuidado de conservar la resistencia de 2 Ω por dos razones: primero, la fuente dependiente que controla la variable aparece en sus extremos, y segundo, se desea que la corriente fluya a través de él. Sin embargo, se pueden combinar las resistencias de 17 Ω y de 9 Ω puesto que aparecen en serie. También se observa que es posible combinar las resistencias de 3 y 4 Ω para obtener una resistencia de 7 Ω la cual se emplea entonces para transformar la fuente de 15 V en una fuente de 15/7 A, como en la figura 5.19*c*.

Como una simplificación final, observar que se pueden combinar las dos resistencias de 7 Ω en una resistencia de 3.5 Ω la cual tal vez se use para transformar la fuente de corriente de 15/7 A en una fuente de tensión de 7.5 V. El resultado da el circuito de lazo simple que se muestra en la figura 5.19*d*.

La corriente I se puede calcular ahora utilizando la LVK:

$$-7.5 + 3.5I - 51V_x + 28I + 9 = 0$$

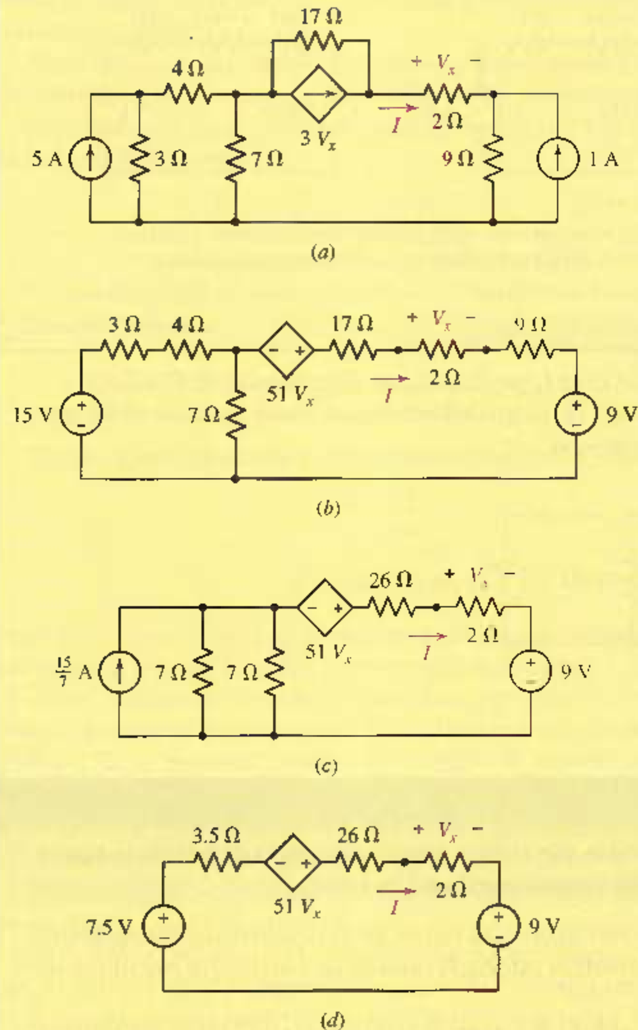
donde:

$$V_x = 2I$$

De tal modo:

$$I = 21.28 \text{ mA}$$

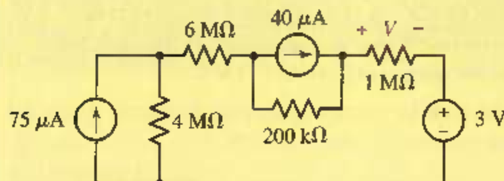
(Continúa en la siguiente página)



■ **FIGURA 5.19** (*a*) Circuito con dos fuentes de corriente independientes y una dependiente. (*b*) Circuito después de que cada fuente se transformó en una fuente de tensión. (*c*) Circuito después de combinaciones adicionales. (*d*) Circuito final.

PRÁCTICA

5.4 En el circuito de la figura 5.20, determinar la tensión V en los extremos de la resistencia de 1 MΩ mediante transformaciones de fuente repetidas.



■ **FIGURA 5.20**

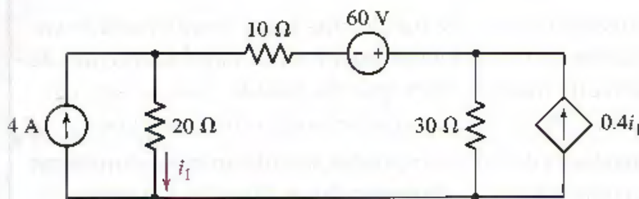
Respuesta: 27.23 V.

Unos cuantos comentarios finales

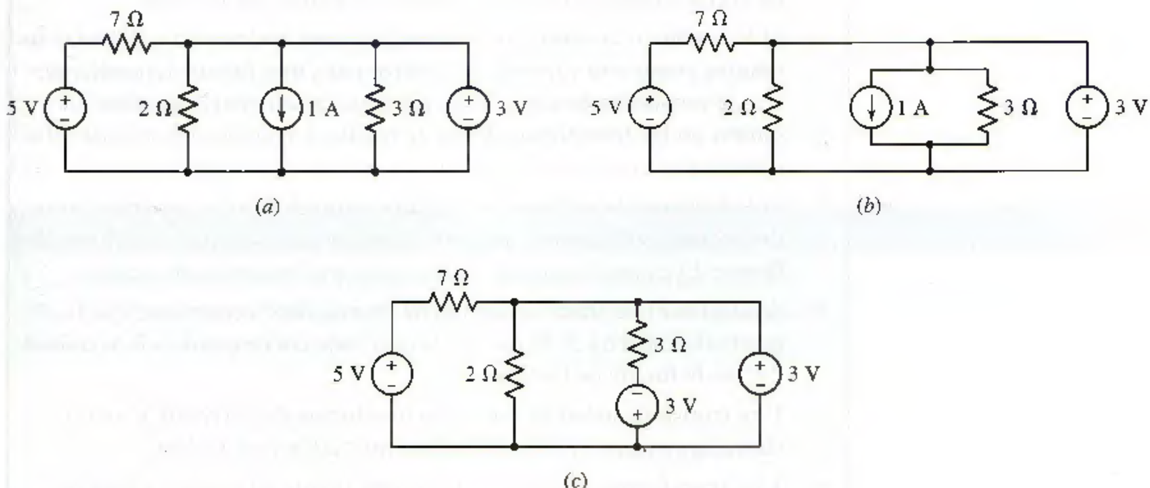
El análisis sobre fuentes prácticas y transformaciones de fuentes concluye con unas cuantas observaciones específicas. Primero, cuando se transforma una fuente de tensión, es necesario asegurarse de que la fuente está, en realidad, *en serie* con la resistencia en consideración. Por ejemplo, en el circuito que se muestra en la figura 5.21, es perfectamente válido realizar una transformación de fuente en la fuente de tensión, utilizando la resistencia de 10 Ω ya que están en serie. Sin embargo, sería incorrecto intentar una transformación de fuente utilizando la fuente de 60 V y la resistencia de 30 Ω, lo cual es un tipo de error muy común.

De manera similar, cuando se transforma una combinación de fuente de corriente y resistencia, se debe asegurar que éstas se encuentran en *paralelo*. Considerar la fuente de corriente que se muestra en la figura 5.22*a*. Se puede llevar a cabo una transformación de fuente que incluya a la resistencia de 3 Ω ya que se encuentran en paralelo, pero, después de la transformación, podría haber alguna ambigüedad en cuanto al lugar en dónde colocar la resistencia. En dichas circunstancias, es de mucha ayuda redibujar en primera instancia los componentes que se van a transformar, como se indica en la figura 5.22*b*. Después, la transformación en una fuente de tensión en serie con una resistencia se dibuja de manera correcta como se indica en la figura 5.22*c*; en realidad, la resistencia puede dibujarse sobre o debajo de la fuente de tensión.

Asimismo, vale la pena considerar el raro caso de una fuente de corriente en serie con una resistencia y su dual, el caso de una fuente de tensión en paralelo



■ **FIGURA 5.21** Ejemplo de circuito que ilustra cómo determinar si puede llevarse a cabo una transformación de fuente.



■ **FIGURA 5.22** (*a*) Circuito con una fuente de corriente que se transformará en una fuente de tensión. (*b*) Circuito redibujado de tal forma que se evitan errores. (*c*) Combinación fuente/resistencia transformada.

con una resistencia. Se comienza con el circuito simple de la figura 5.23*a*, donde el interés es solamente en la tensión en la resistencia marcada como R_2. Se observa que sin considerar el valor de la resistencia R_1, $V_{R_2} = I_x R_2$. Aunque podríamos ser tentados a realizar una transformación fuente en forma inadecuada en dicho circuito, en realidad *simplemente se puede eliminar la resistencia* R_1 (siempre y cuando no sea de interés). Una situación parecida surge con una fuente de tensión en paralelo con una resistencia, como se muestra en la figura 5.23*b*. De nuevo, si solamente se está interesado en alguna cantidad que involucre a la resistencia R_2, es posible que se vea tentado a realizar algunas transformaciones extrañas (e incorrectas) de fuente en la tensión de fuente y la resistencia R_1. En realidad, se puede eliminar la resistencia R_1 del circuito en lo que respecta a la resistencia R_2 pues su presencia no altera la tensión, la corriente y la potencia disipada por la resistencia R_2.

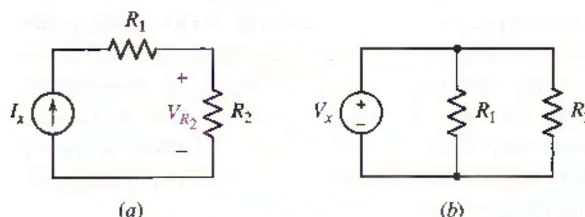


FIGURA 5.23 (*a*) Circuito con una resistencia R_1 en serie con una fuente de corriente. (*b*) Una tensión de fuente en paralelo con dos resistencias.

Resumen de la transformación de fuente

1. **Al usar las transformaciones de fuente, una meta común consiste en terminar con todas las fuentes de corriente o con todas las fuentes de tensión en el circuito final, siempre que sea posible.** Esto es especialmente válido si con ello se hace más fácil el análisis nodal o de malla.
2. **Las transformaciones de fuente repetidas se utilizan para simplificar un circuito permitiendo la combinación de resistencias y fuentes.**
3. **El valor de la resistencia no varía durante una transformación de fuente, pero no es la misma resistencia.** Ello significa que las tensiones o corrientes asociadas con la resistencia original se pierden sin poderse recuperar cuando se lleva a cabo una transformación de fuente.
4. **Si la tensión o la corriente asociada con una resistencia particular se emplea como una variable de control para una fuente dependiente, o es la respuesta deseada de un circuito, la resistencia no debe incluirse en las transformaciones de fuente.** La resistencia original debe conservarse intacta en el circuito.
5. **Si la tensión o la corriente asociada con un elemento en particular es de interés, ese elemento no debe incluirse en las transformaciones de fuente.** El elemento original debe conservarse intacto en el circuito.
6. **Al efectuar una transformación de fuente, debe recordarse que la punta de la flecha de la fuente de corriente corresponde a la terminal "+" de la fuente de tensión.**
7. **Una transformación de fuente en una fuente de corriente y una resistencia requiere que los dos elementos estén en paralelo.**
8. **Una transformación de fuente en una fuente de tensión y una resistencia requiere que los dos elementos estén en serie.**

5.3 CIRCUITOS EQUIVALENTES DE THÉVENIN Y NORTON

Ahora que se han presentado las transformaciones de fuente y el principio de superposición, se pueden explicar otras dos técnicas que simplificarán en gran medida el análisis de muchos circuitos lineales. El primero de estos teoremas recibe su nombre en honor a M. L. Thévenin, ingeniero francés quien trabajaba en telegrafía y que publicó el teorema en 1883; el segundo puede considerarse un corolario del primero y se acredita a E. L. Norton, científico de los Bell Telephone Laboratories.

Suponga que se necesita efectuar sólo un análisis parcial de un circuito. Por ejemplo, quizá se requiera determinar la corriente, la tensión y la potencia que se entregan a una resistencia de "carga" por medio del resto del circuito, el cual quizá consiste en un número considerable de fuentes y resistencias (fig. 5.24*a*). O tal vez se desee determinar la respuesta para diferentes valores de la resistencia de carga. El teorema de Thévenin dice que se puede sustituir todo, excepto la resistencia de carga, por una fuente de tensión independiente en serie con una resistencia (fig. 5.24*b*); la respuesta medida en la *resistencia de carga* permanecerá invariable. Mediante el teorema de Norton, se obtiene un equivalente compuesto por una fuente de corriente independiente en paralelo con una resistencia (fig. 5.24*c*).

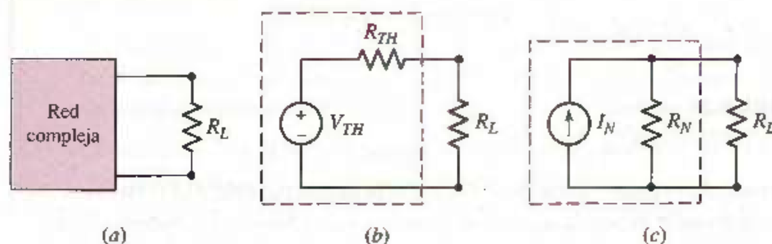


FIGURA 5.24 (*a*) Red compleja que incluye una resistencia de carga R_L. (*b*) Red equivalente de Thévenin conectada a la resistencia de carga R_L. (*c*) Red equivalente de Norton conectada a la resistencia de carga R_L.

En consecuencia, debe ser patente que una de las principales aplicaciones de los teoremas de Thévenin y de Norton es la sustitución de una gran parte de un circuito, a menudo una parte complicada y no interesante, por un equivalente muy simple. El nuevo circuito más simple permite efectuar cálculos rápidos de la tensión, la corriente y la potencia que el circuito original es capaz de entregar a una carga. También ayuda a elegir el mejor valor de esta resistencia de carga. En un amplificador de potencia de transistores, por ejemplo, el equivalente de Thévenin o Norton permite determinar la potencia máxima que se toma del amplificador y se entrega a los altavoces.

EJEMPLO 5.6

Considerar el circuito de la figura 5.25*a*. Determinar el equivalente de Thévenin para la red A y calcular la potencia entregada a la resistencia de carga R_L.

Las regiones con líneas punteadas dividen el circuito en dos redes *A* y *B*; el principal interés está en la red *B*, la cual consta sólo de una resistencia de carga R_L. Quizá se simplifique la red *A* mediante transformaciones de fuente repetidas.

(Continúa en la siguiente página)

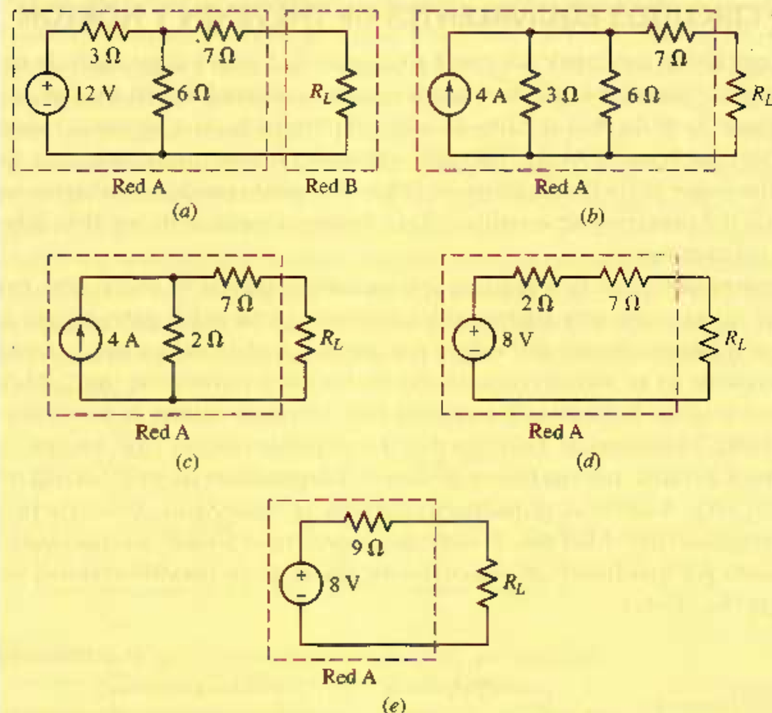


FIGURA 5.25 (*a*) Circuito dividido en dos redes. (*b*)–(*d*) Pasos intermedios para simplificar la red *A*. (*e*) Circuito equivalente de Thévenin.

Considerar primero la fuente de 12 V y la resistencia de 3 Ω como una fuente de tensión práctica que se sustituye por una fuente de corriente práctica compuesta por una fuente de 4 A en paralelo con 3 Ω (fig. 5.25*b*). Las resistencias en paralelo se combinan luego en 2 Ω (fig. 5.25*c*), y la fuente de corriente práctica que resulta se transforma de nuevo en una fuente de tensión práctica (fig. 5.25*d*). El resultado final se presenta en la figura 5.25*e*.

Vista desde la resistencia de carga R_L, esta red *A* (el equivalente de Thévenin) es equivalente al circuito original; desde nuestro punto de vista, el circuito es mucho más simple, y ahora se calcula con facilidad la potencia que se entrega a la carga:

$$P_L = \left(\frac{8}{9 + R_L}\right)^2 R_L$$

Además, gracias al circuito equivalente, podemos ver que la tensión máxima que se obtiene en los extremos de R_L es igual a 8 V y que corresponde a $R_L = \infty$. Una rápida transformación de la red *A* en una fuente de corriente práctica (el equivalente de Norton) indica que la corriente máxima que se entrega a la carga es igual a 8/9 A, lo cual ocurre cuando $R_L = 0$. Ninguno de estos hechos se aprecia con claridad y facilidad a partir del circuito original.

PRÁCTICA

5.5 Mediante transformaciones repetidas de fuente, determinar el equivalente de Norton de la red destacada en el circuito de la figura 5.26.

Respuesta: 1 A, 5 Ω.

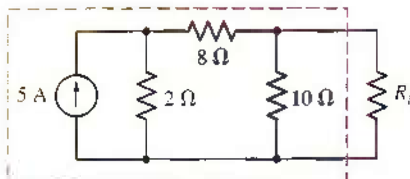


FIGURA 5.26

Teorema de Thévenin

El empleo de la técnica de transformación de la fuente para encontrar una red equivalente de Thévenin y Norton dio buenos resultados en el ejemplo 5.6, pero puede ser poco práctica en situaciones donde se encuentren presentes fuentes dependientes o el circuito esté compuesto por un gran número de elementos. Una opción es emplear el teorema de Thevenin (o el teorema de Norton). Se enuncia el teorema como un procedimiento de alguna manera formal y, después, se procede a considerar diferentes formas para hacer que el método sea más práctico de acuerdo con la situación específica que se presente.

Enunciado del Teorema de Thévenin[3]

1. **Dado cualquier circuito lineal, arreglarlo nuevamente en la forma de dos redes *A* y *B* conectadas por dos alambres.** *A* es la red que se simplificará; *B* se dejará intacta.
2. **Desconectar la red *B*.** Definir una tensión v_{oc} como la tensión que ahora aparece en las terminales de la red *A*.
3. **Apagar o "asignar cero a" toda fuente independiente de la red *A* para formar una red inactiva.** Dejar las fuentes dependientes intactas.
4. **Conectar una fuente de tensión independiente con un valor de v_{oc} en serie con la red inactiva.** No terminar el circuito; dejar desconectadas las dos terminales.
5. **Conectar la red *B* a las terminales de la nueva red *A*.** Todas las corrientes y tensiones de *B* permanecerán intactas.

Observar que si cualquier red contiene una fuente dependiente, *su variable de control debe estar en la misma red.*

Se verá si se puede aplicar con éxito el teorema de Thévenin al circuito que se considera en la figura 5.25. Ya se encontró el equivalente de Thévenin del circuito a la izquierda de R_L en el ejemplo 5.6, pero se quiere ver si existe una manera más fácil de obtener el mismo resultado.

EJEMPLO 5.7

Aplicar el teorema de Thévenin a fin de determinar el equivalente de Thévenin para esa parte del circuito de la figura 5.25*a* a la izquierda de R_L.

Para empezar, se debe desconectar R_L, con lo cual se observa que no fluye corriente por la resistencia de 7 Ω en el circuito parcial resultante de la figura 5.27*a*. De tal modo, V_{oc} aparece en los extremos de la resistencia de 6 Ω (sin corriente a través de la resistencia de 7 Ω no hay caída de tensión en él), y la división de la tensión permite determinar que:

$$V_{oc} = 12\left(\frac{6}{3+6}\right) = 8 \text{ V}$$

(Continúa en la siguiente página)

(3) Una prueba del teorema de Thévenin en la forma que se estableció es bastante larga, por lo tanto se incorporó en el apéndice 3, donde los interesados pueden examinarla a fondo.

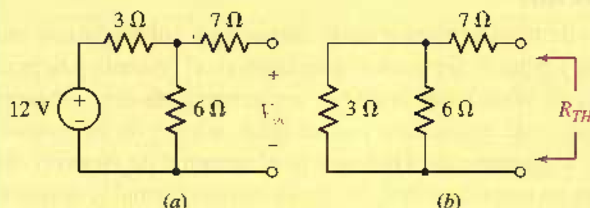


FIGURA 5.27 (*a*) Circuito de la figura 5.25*a* con la red *B* (la resistencia R_L) desconectada y la tensión entre las terminales de conexión marcada como V_{oc}. (*b*) La fuente independiente de la figura 5.25*a* se suprimió y se observan las terminales donde la red *B* se conectó para determinar la resistencia efectiva de la red *A*.

Al suprimir la red *A* (es decir, al sustituir la fuente de 12 V por un cortocircuito) se ve, al observar de nuevo la red muerta (desconectada), una resistencia de 7 Ω conectada en serie con la combinación en paralelo de 6 y 3 Ω (fig. 5.27*b*).

De tal modo, la red muerta puede representarse aquí mediante una resistencia de 9 Ω conocida como ***resistencia equivalente de Thévenin*** de la red *A*. Entonces, el equivalente de Thévenin es V_{oc} en serie con una resistencia de 9 Ω lo cual concuerda con el resultado anterior.

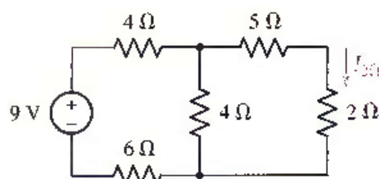


FIGURA 5.28

PRÁCTICA

5.6 Aplicar el teorema de Thévenin para determinar la corriente que pasa por la resistencia de 2 Ω del circuito de la figura 5.28. (Sugerencia: designar a la resistencia de 2 Ω como *B*.)

Respuesta: $V_{TH} = 2.571$ V, $R_{TH} = 7.857\ \Omega$, $I_{2\Omega} = 260.8$ mA.

Unos cuantos puntos clave

El circuito equivalente que se obtuvo resulta del todo independiente de la red *B*, debido a que se ha indicado eliminar primero la red *B* y luego medir la tensión en circuito abierto producida por la red *A*, una operación que en verdad no depende de la red *B* de ninguna manera. La red *B* se menciona en el enunciado del teorema sólo para indicar que tal vez se obtenga un equivalente de *A* sin que importe cuál sea el arreglo de elementos que esté conectado a la red *A*; la red *B* representa esta red general.

Son varios los aspectos del teorema que merecen subrayarse.

- La única restricción que debe imponerse sobre *A* o *B* es que todas las fuentes *dependientes* en *A* tengan sus variables de control en *A*, y de forma similar para *B*.
- No se impusieron restricciones sobre la complejidad de *A* o *B*; pueden contener cualquier combinación de fuentes de tensión o corriente independientes, fuentes de tensión o corriente lineales dependientes, resistencias o cualesquiera otros elementos de circuito que sean lineales.
- Se representa una red muerta (desconectada) *A* mediante una resistencia equivalente R_{TH}, a la que se denominará resistencia equivalente de

Thévenin. Lo anterior sigue siendo válido si existen o no fuentes dependientes en la red A, una idea que se analizará más adelante.

- Un equivalente de Thévenin tiene dos componentes: una fuente de tensión en serie con una resistencia. Cualquiera puede ser cero, aunque no suele ser el caso.

Teorema de Norton

El teorema de Norton guarda una cercana semejanza con el teorema de Thévenin y se pudiera establecer como sigue:

Enunciado del teorema de Norton

1. **Dado cualquier circuito lineal, volver a ordenar en la forma de dos redes A y B conectadas por dos alambres**. La red que se va a simplificar es A; B se dejará intacta. Como se hizo antes, si cualquiera de las redes contiene una fuente dependiente, *su variable de control debe estar en la misma red.*
2. **Desconectar la red B, y poner en cortocircuito las terminales de A.** Definir una corriente i_{sc} como la corriente que circula ahora a través de las terminales cortocircuitadas de la red A.
3. **Apagar o "asignar cero a" todas las fuentes independientes de la red A para formar una red inactiva.** Dejar las fuentes dependientes intactas.
4. **Conectar una fuente de corriente independiente de valor i_{sc} en paralelo con la red inactiva.** Dejar el circuito sin terminar; dejar desconectadas las dos terminales.
5. **Conectar la red B a las terminales de la nueva red A.** Todas las corrientes y tensiones en B permanecen intactas.

El equivalente de Norton de una red lineal es la fuente de corriente de Norton i_{sc} en paralelo con la resistencia de Thévenin R_{TH}. En consecuencia, se puede observar que, en realidad, se obtiene el equivalente de Norton de una red mediante una transformación de fuente sobre la equivalente de Thévenin. Lo anterior produce una relación directa entre v_{oc}, i_{sc} y R_{TH}:

$$\boxed{v_{oc} = R_{TH} i_{sc}} \qquad [18]$$

En circuitos que contienen fuentes dependientes, a menudo se verá que es más conveniente determinar el equivalente de Thévenin o el de Norton al calcular la tensión en circuito abierto y la corriente en cortocircuito y al determinar luego el valor de R_{TH} como su cociente. Por lo tanto, resulta aconsejable volverse adepto a determinar tanto tensiones en circuito abierto como corrientes en cortocircuito, incluso en los problemas simples que siguen. Si los equivalentes de Thévenin y de Norton se determinan de manera independiente, la ecuación [18] sirve como una comprobación útil.

Considerar tres ejemplos diferentes para determinar el circuito equivalente de Thévenin o Norton.

EJEMPLO 5.8

Encontrar los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton de la red que se encuentra frente a la resistencia de 1 kΩ en la figura 5.29*a*.

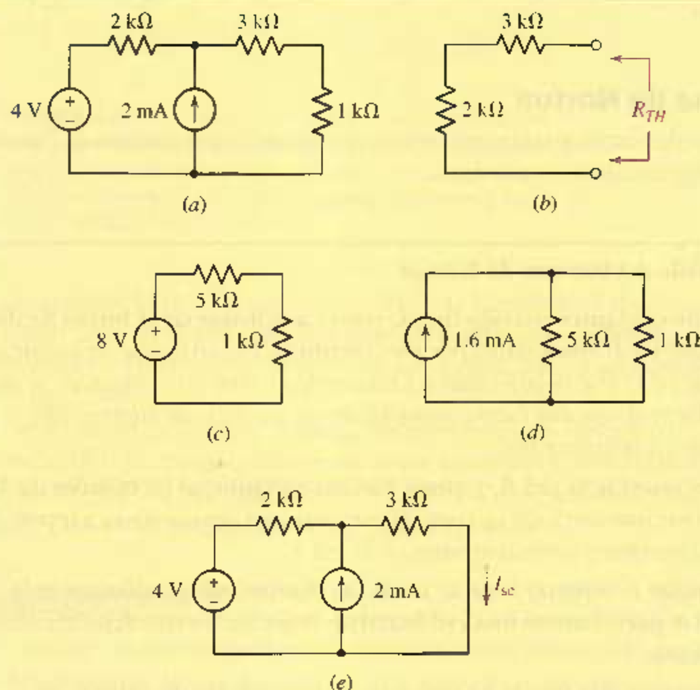


FIGURA 5.29 (*a*) Circuito en el que se identifica la resistencia de 1 kΩ como la red *B*. (*b*) Red *A* con todas las fuentes independientes suprimidas. (*c*) Equivalente de Thévenin de la red *A*. (*d*) Equivalente de Norton de la red *A*. (*e*) Circuito para determinar I_{sc}.

De acuerdo con la forma en la que se plantea el enunciado del problema, se sabe que la red *B* es la resistencia de 1 kΩ y que la red *A* corresponde al resto del circuito. El circuito no contiene fuentes dependientes, así que la forma más sencilla de obtener el equivalente de Thévenin consiste en determinar de manera directa R_{TH} para la red muerta (desconectada), a lo que seguirá un cálculo de V_{oc} o I_{sc}.

En primer lugar se debe determinar la tensión en circuito abierto; en este caso resulta fácil encontrarlo por superposición. Al funcionar sólo la fuente de 4 V, la tensión en circuito abierto es igual a 4 V; cuando sólo está activada la fuente de 2 mA, la tensión en circuito abierto es 2 mA × 2 kΩ = 4 V (no fluye corriente por la resistencia de 3 kΩ si la resistencia de 1 kΩ está desconectada). En el caso de que las dos fuentes independientes estén activadas, vemos que $V_{oc} = 4 + 4 = 8$ V.

Enseguida se deben suprimir ambas fuentes independientes para determinar el tipo de la red *A* muerta (inactiva). Con la fuente de 4 V en cortocircuito y la de 2 mA en circuito abierto, como en la figura 5.29*b*, el resultado consiste en la combinación en serie de una resistencia de 2 kΩ y una de 3 kΩ o la resistencia equivalente de 5 kΩ.

Lo anterior determina el equivalente de Thévenin, que se muestra en la figura 5.29*c*, y a partir de él se obtiene con facilidad el equivalente de Norton de la figura 5.29*d*. Como comprobación, se debe determinar I_{sc} del

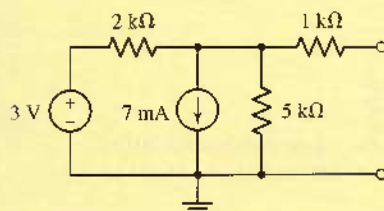
circuito dado (fig. 5.29*e*). En este caso se utiliza la superposición y una pequeña división de corriente:

$$I_{sc} = I_{sc}|_{4\text{ V}} + I_{sc}|_{2\text{ mA}} = \frac{4}{2+3} + (2)\frac{2}{2+3}$$
$$= 0.8 + 0.8 = 1.6 \text{ mA}$$

lo que completa la comprobación.[4]

PRÁCTICA

5.7 Determinar los equivalentes de Thévenin y de Norton del circuito de la figura 5.30.



■ **FIGURA 5.30**

Respuesta: −7.857 V, −3.235 mA, 2.429 kΩ.

Cuando existen fuentes dependientes

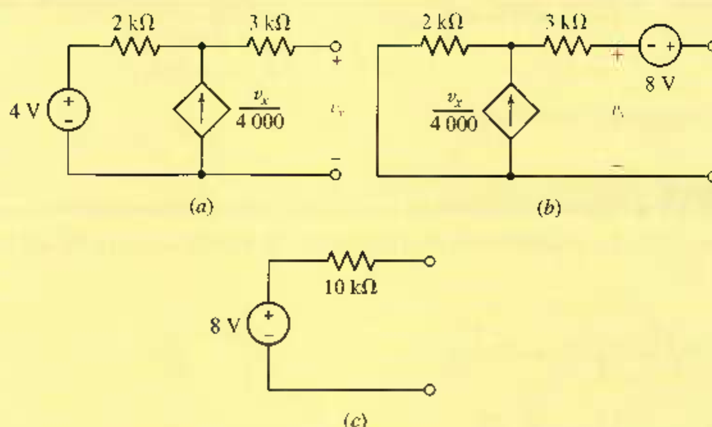
Técnicamente, no siempre debe haber una "red *B*" para que se pueda invocar el teorema de Thévenin o el de Norton; en lugar de eso, se puede pedir encontrar el equivalente de una red con dos terminales que no estén conectadas todavía con otra red. Sin embargo, si *existe* una red *B* que no se quisiera que estuviera involucrada en este procedimiento de simplificación, se debe ser precavido si ésta contiene fuentes dependientes. En tales situaciones, la variable de control y el (los) elemento(s) asociados deben incluirse en la red *B* y ser excluidos de la red *A*. De otra forma, no habrá otra manera de analizar el circuito final ya que la cantidad controladora se perderá.

Si la red *A* contiene una fuente dependiente, entonces de nuevo es necesario asegurarse de que la variable de control y su(s) elementos asociado(s) no pueden estar en la red *B*. Hasta el momento, sólo se han considerado circuitos con resistencias y fuentes independientes. Aunque desde el punto de vista técnico es válido dejar intacta una fuente dependiente en la red "muerta" o "inactiva" cuando se realice un equivalente Thévenin o Norton, en la práctica esto no genera ningún tipo de simplificación. Lo que en realidad se desea es una fuente de tensión independiente en serie con una sola resistencia o una fuente de corriente independiente en paralelo con una sola resistencia, en otras palabras, el equivalente de dos componentes. En los ejemplos siguientes, se consideran varias formas para simplificar redes con fuentes dependientes y resistencias en una sola resistencia.

(4) Nota: Si se utiliza una resistencia en kΩ a lo largo de la ecuación, y la tensión se expresa en volts, entonces la corriente estará siempre de manera automática en mA.

EJEMPLO 5.9

Determinar el equivalente de Thévenin del circuito de la figura 5.31*a*.



■ **FIGURA 5.31** (*a*) Red de la que se desea obtener el equivalente de Thévenin. (*b*) Una forma posible, aunque bastante inútil, del equivalente de Thévenin. (*c*) La mejor forma del equivalente de Thévenin de esta red resistiva lineal.

Para obtener V_{oc} se nota que $v_x = V_{oc}$ y que la corriente de la fuente dependiente debe pasar por la resistencia de 2 kΩ puesto que no fluye corriente por la resistencia de 3 kΩ. Mediante la aplicación de la LVK alrededor del lazo exterior se tiene:

$$-4 + 2 \times 10^3 \left(-\frac{v_x}{4\,000}\right) + 3 \times 10^3(0) + v_x = 0$$

y

$$v_x = 8 \text{ V} = V_{oc}$$

Así, aplicando el teorema de Thévenin, el circuito equivalente podría formarse con la red *A* muerta (inactiva) en serie con la fuente de 8 V, como se ve en la figura 5.31*b*. Ello es correcto, pero no muy simple ni muy útil; en el caso de redes resistivas lineales, se debe mostrar en realidad un equivalente mucho más simple para la red *A* inactiva, a saber, R_{TH}.

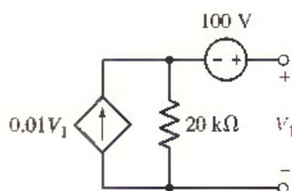
La presencia de la fuente dependiente evita determinar de manera directa R_{TH} de la red inactiva, por medio de la combinación de resistencias; en consecuencia se busca I_{sc}. Luego de poner en cortocircuito las terminales de salida en la figura 5.31*a*, es claro que $V_x = 0$ y que la fuente de corriente dependiente está muerta (desconectada). Por consiguiente, $I_{sc} = 4/(5 \times 10^3) = 0.8$ mA. De tal modo:

$$R_{TH} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{8}{(0.8 \times 10^{-3})} = 10 \text{ k}\Omega$$

y se obtiene el equivalente de Thévenin aceptable de la figura 5.31*c*.

PRÁCTICA

5.8 Determinar el equivalente de Thévenin de la red de la figura 5.32. (Sugerencia: podría ser de ayuda efectuar una rápida transformación de fuente sobre la fuente dependiente.)



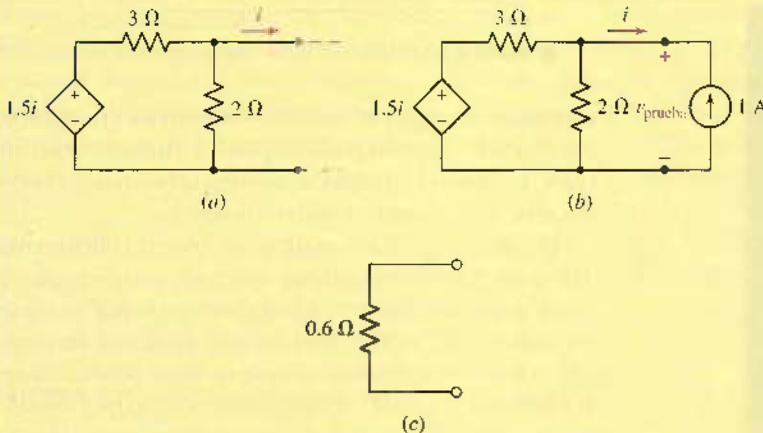
■ **FIGURA 5.32**

Respuesta: −502.5 mV, −100.5 Ω.

Como ejemplo final, se examinará una red que tenga una fuente dependiente pero no una independiente.

EJEMPLO 5.10

Determinar el equivalente de Thévenin del circuito de la figura 5.33*a*.



■ **FIGURA 5.33** (*a*) Red sin fuentes independientes. (*b*) Medición hipotética para obtener R_{TH}. (*c*) Equivalente de Thévenin del circuito original.

En razón de que las terminales ubicadas más a la derecha ya están en circuito abierto, entonces, $i = 0$. En consecuencia, la fuente dependiente está muerta, por lo que $v_{oc} = 0$.

En seguida se determina el valor de R_{TH} representado por esta red de dos terminales. Sin embargo, no se puede obtener v_{oc} e i_{sc} ni determinar su cociente, pues no hay fuente independiente en la red; así que tanto v_{oc} como i_{sc} valen cero. Por lo tanto, se debe recurrir a un pequeño truco.

Se aplica de manera externa una fuente de 1 A, se mide la tensión v_{prueba} que resulta y se hace $R_{TH} = v_{\text{prueba}}/1$. Observando la figura 5.33*b*, se ve que $i = -1$ A. Aplicando el análisis nodal:

$$\frac{v_{\text{prueba}} - 1.5(-1)}{3} + \frac{v_{\text{prueba}}}{2} = 1$$

por lo que:

$$v_{\text{prueba}} = 0.6 \text{ V}$$

así que:

$$R_{TH} = 0.6\ \Omega$$

El equivalente de Thévenin se muestra en la figura 5.33*c*.

Una recapitulación rápida de procedimientos

Hasta ahora se han estudiado tres ejemplos en los que se determinó un circuito equivalente de Thévenin o de Norton. El primer ejemplo (fig. 5.29) sólo contenía fuentes independientes y resistencias; además, se podían aplicar varios métodos diferentes. Uno implicaría calcular R_{TH} de la red muerta y luego V_{oc} de la red viva. También se podía haber calculado R_{TH} e I_{sc}, o V_{oc} e I_{sc}.

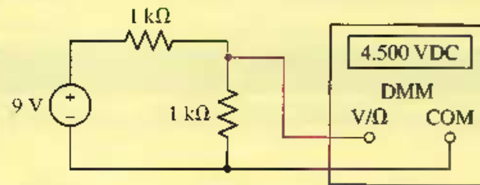
APLICACIÓN PRÁCTICA

El multímetro digital

Uno de los aparatos más comunes que forma parte del equipo de prueba eléctrico es el multímetro digital, o MD (fig. 5.34), que se diseñó para medir valores de tensión, corriente y resistencia.



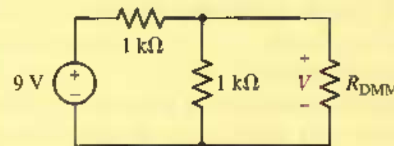
■ **FIGURA 5.34** Multímetro digital de mano.



■ **FIGURA 5.35** Multímetro digital conectado para medir tensión.

Para medir tensiones, dos hilos de conducción del multímetro se conectan en los extremos del elemento de circuito apropiado (fig. 5.35). Una terminal de referencia positiva del multímetro suele marcarse "V/Ω" y la terminal de referencia negativa —a menudo se le conoce como *terminal común*— se designa típicamente por "COM". La convención típica es utilizar el hilo en color rojo para la terminal de referencia positiva y el hilo en color negro para la terminal común.

De acuerdo con el análisis de los equivalentes de Thévenin y de Norton, quizás ahora sea evidente para el lector que el multímetro digital tiene su propia resistencia equivalente de Thévenin, la cual aparecerá en paralelo con nuestro circuito, así que su valor puede afectar la medición (fig. 5.36). El multímetro digital no suministra ninguna alimentación al circuito para medir la tensión, por lo que su equivalente de Thévenin consiste sólo en una resistencia, que se llamará R_{DMM}.



■ **FIGURA 5.36** Multímetro de la figura 5.35 que muestra R_{DMM} como su resistencia equivalente de Thévenin.

La resistencia de entrada de un buen multímetro digital es por lo común de 10 MΩ o más. La tensión medida V se localiza a nivel del equivalente de 1 kΩ||10 MΩ = 999.9 Ω. Mediante la división de tensión, sabemos

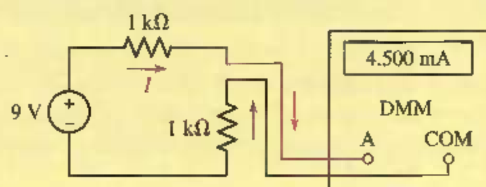
En el segundo ejemplo (fig. 5.31) estaban presentes fuentes independientes y dependientes, y el método utilizado requirió determinar V_{oc} e I_{sc}. No se podía encontrar con facilidad R_{TH} para la red muerta (inactiva), debido a que no se podía hacer inactiva la fuente dependiente.

El último ejemplo no contiene ninguna fuente independiente, y por lo tanto los equivalentes de Thévenin y de Norton no incluyen una fuente independiente. Se determina R_{TH} aplicando 1 A y encontrando $v_{\text{prueba}} = 1 \times R_{TH}$. También se hubiese podido aplicar 1 V y determinar $i = 1/R_{TH}$. Estas dos técnicas relacionadas se aplican a cualquier circuito con fuentes dependientes, *siempre y cuando todas las fuentes independientes se igualen primero a cero.*

Existen otros dos métodos que tienen cierto encanto debido a que se emplean para cualquiera de los tres tipos de redes considerados. En el primero, se sustituye simplemente la red B por una fuente de tensión v_s, se define la corriente que sale de su terminal positiva como i, se analiza después la red A para obtener i y se expresa la ecuación en la forma $v_s = ai + b$. Así, $a = R_{TH}$ y $b = v_{oc}$.

que $V = 4.4998$ volts, que es un valor un poco menor que el esperado de 4.5 volts. En consecuencia, la resistencia de entrada finita del voltímetro introduce un pequeño error en el valor medido.

Para medir corrientes, el multímetro digital debe ponerse en serie con un elemento de circuito, que por lo general requiere que se corte un alambre (fig. 5.37). Un hilo de conexión del multímetro se conecta a la terminal a tierra del medidor y el otro se pone en un conector que casi siempre se marca como "A" para indicar la medición de corriente. En este caso, también el multímetro digital no proporciona potencia al circuito para este tipo de medición.



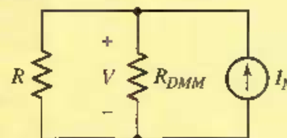
■ **FIGURA 5.37** Multímetro digital conectado para efectuar una medición de corriente.

Se puede observar a partir de esta figura que la resistencia equivalente de Thévenin (R_{DMM}) del multímetro digital está en serie con el circuito, por lo que su valor afecta la medición. Al escribir una ecuación de la LVK simple alrededor del lazo:

$$-9 + 1\,000I + R_{\mathrm{DMM}}I + 1\,000I = 0$$

Observar que como se ha reconfigurado el medidor para efectuar una medición de corriente, la resistencia equivalente de Thévenin no es la misma que en el caso en el cual el medidor se configura para medir tensiones. En realidad, sería ideal que R_{DMM} fuera 0 Ω idealmente en mediciones de corriente, e ∞ en mediciones de tensión. Si R_{DMM} corresponde a 0.1 Ω, vemos que la corriente medida I vale 4.4998 mA, lo que es sólo un poco diferente del valor esperado de 4.5 mA. En función del número de dígitos que el medidor pueda exhibir, tal vez ni siquiera se advirtiera en la medición el efecto de una resistencia diferente de cero del multímetro digital.

Es posible utilizar el mismo medidor para determinar la resistencia, siempre y cuando no haya fuentes independientes activas durante la medición. De manera interna, se hace pasar una corriente conocida a través de la resistencia que se mide, utilizándose la circuitería del voltímetro para medir la tensión resultante. Al sustituir el multímetro digital por su equivalente de Norton (que incluye ahora una fuente de corriente independiente activa para generar la corriente predeterminada), se observa que R_{DMM} aparece en paralelo con nuestra resistencia desconocida R (fig. 5.38).



■ **FIGURA 5.38** MD en la configuración de medición de resistencia sustituido por su equivalente de Norton, donde se muestra R_{DMM} en paralelo con la resistencia desconocida R que se va a medir.

Como resultado, el multímetro digital mide en realidad $R \| R_{\mathrm{DMM}}$. Si $R_{\mathrm{DMM}} = 10\ \mathrm{M}\Omega$ y $R = 10\ \Omega$, $R_{\mathrm{medida}} = 9.99999\ \Omega$, la cual resulta bastante precisa para la mayoría de los fines. Sin embargo, si $R = 10\,\mathrm{M}\Omega$, $R_{\mathrm{medida}} = 5\,\mathrm{M}\Omega$. La resistencia de entrada de un multímetro digital impone en consecuencia un límite superior práctico en los valores de resistencia que mide, así que se requiere utilizar técnicas especiales para medir resistencias más grandes. Se debe observar que si un multímetro digital se *programa* de tal forma que se conoce R_{DMM}, se pueden compensar y medir resistencias más grandes.

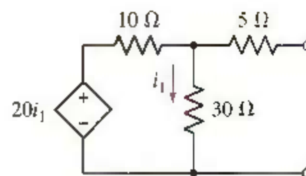
También se podría aplicar una fuente de corriente i_s, designar a su tensión como v, y determinar entonces $i_s = cv - d$, donde $c = 1/R_{TH}$ y $d = i_{sc}$ (el signo menos se presenta al suponer que las flechas de ambas fuentes de corriente se dirigen hacia el mismo nodo). Los dos últimos procedimientos se aplican de manera universal, pero con frecuencia algún otro método resulta más fácil y más rápido.

Si bien se está enfocando la atención casi por completo en el análisis de circuitos lineales, resulta bueno saber que los teoremas de Thévenin y de Norton son válidos aun si la red B es no lineal; solamente la red A debe ser lineal.

PRÁCTICA

5.9 Encontrar el equivalente de Thévenin de la red de la figura 5.39. (Sugerencia: inténtelo con una fuente de prueba de 1 V.)

Respuesta: $I_{\mathrm{prueba}} = 50$ mA por lo que $R_{TH} = 20\ \Omega$.



■ **FIGURA 5.39** Véase el problema de práctica 5.9.

5.4 TRANSFERENCIA DE POTENCIA MÁXIMA

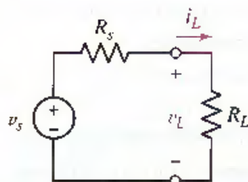


FIGURA 5.40 Una fuente de tensión práctica conectada a una resistencia de carga R_L.

Un teorema de potencia muy útil puede formularse con referencia a una fuente de corriente o de tensión práctica. En el caso de la fuente de tensión práctica (fig. 5.40), la potencia que se entrega a la carga R_L es

$$p_L = i_L^2 R_L = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2} \qquad [19]$$

Para determinar el valor de R_L que absorbe una potencia máxima de la fuente práctica dada, se diferencia con respecto a R_L:

$$\frac{d\,p_L}{d\,R_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 v_s^2 - v_s^2 R_L(2)(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4}$$

e igualando la derivada a cero, se obtiene:

$$2R_L(R_s + R_L) = (R_s + R_L)^2$$

o

$$R_s = R_L$$

En razón de que los valores $R_L = 0$ y $R_L = \infty$ producen un mínimo ($p_L = 0$), y debido a que ya se desarrolló la equivalencia entre fuentes de tensión y de corriente prácticas, se puede demostrar el siguiente teorema de ***transferencia de potencia máxima***:

> Una fuente de tensión independiente en serie con una resistencia R_s, o una fuente de corriente independiente en paralelo con una resistencia R_s, suministra una potencia máxima a esa resistencia de carga R_L para la cual $R_L = R_s$.

Tal vez el lector haya visto una forma alterna de considerar el teorema de potencia máxima en términos de la resistencia equivalente de Thévenin de una red:

> Una red suministra la potencia máxima a una resistencia de carga R_L cuando R_L es igual a la resistencia equivalente de Thévenin de la red.

Así, el teorema de transferencia de potencia máxima indica que una resistencia de 2 Ω extrae la potencia más grande (4.5 W) de cualquier fuente práctica de la figura 5.16, en tanto que una resistencia de 0.01 Ω recibe la potencia máxima (3.6 kW) en la figura 5.11.

Existe una diferencia entre *tomar* la potencia máxima de una *fuente* y *entregar* la potencia máxima a una *carga*. Si la carga se diseña de tal forma que la resistencia de Thévenin sea igual a la resistencia de Thévenin de la red a la que está conectada, recibirá la potencia máxima de la red. *Cualquier cambio de la resistencia de carga reducirá la potencia entregada a la carga.* Sin embargo, considere el equivalente de Thévenin de la red en sí. Se toma la potencia máxima posible de la fuente de tensión tomando la corriente máxima posible, la cual se logra ¡poniendo en cortocircuito las terminales de la red! Sin embargo, en este ejemplo extremo *se entrega cero potencia* a la "carga" —un cortocircuito en este caso— ya que $p = i^2 R$, y se fija $R = 0$ haciendo un cortocircuito con las terminales de la red.

Si se aplica un poco de álgebra a la ecuación [19] junto con el requisito de transferencia de potencia máxima que proporcionará la ecuación $R_L = R_s = R_{TH}$

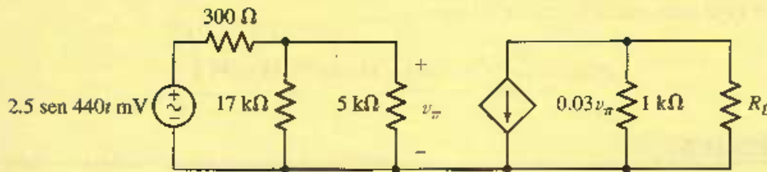
$$p_{máx}\Big|_{\text{entregado a la carga}} = \frac{v_s^2}{4R_s} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}}$$

donde v_{TH} y R_{TH} recuerda que la fuente práctica de tensión de la figura 5.40 puede también verse como un equivalente de Thévenin de alguna fuente específica.

Asimismo es muy común que el teorema de potencia máxima se malinterprete. Está diseñado para ayudar a seleccionar una carga óptima a fin de maximizar la absorción de potencia. Sin embargo, si la resistencia de carga ya se especificó, el teorema de potencia máxima no será de ninguna ayuda. Si por alguna razón se puede afectar el tamaño de la resistencia equivalente de Thévenin de la red conectada a la carga, fijarla a un valor igual a la carga no garantizará la máxima transferencia de potencia a la carga predeterminada. Una consideración rápida de la potencia perdida en la resistencia de Thévenin aclarará este punto.

EJEMPLO 5.11

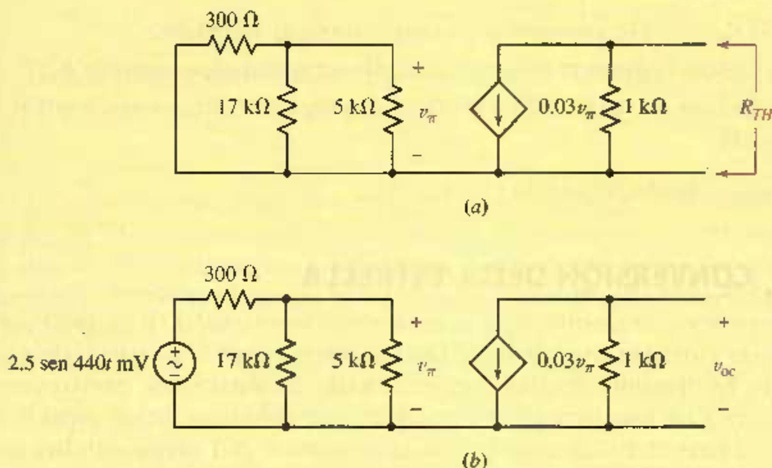
El circuito que se muestra en la figura 5.41 es un modelo del amplificador transistorizado de unión bipolar emisor común. Seleccionar una resistencia de carga de tal forma que la potencia máxima se transfiera a él desde el amplificador y calcular la potencia real absorbida.



■ **FIGURA 5.41** Modelo de pequeña señal del amplificador emisor común con la resistencia de carga no especificada.

Puesto que se solicita determinar la resistencia de carga, es factible aplicar el teorema de máxima potencia. El primer paso es encontrar el equivalente de Thévenin del resto del circuito.

Primero se determina la resistencia equivalente de Thévenin, lo cual requiere que se quite R_L y que se ponga en cortocircuito la fuente independiente de la forma en que se muestra en la figura 5.42*a*.



■ **FIGURA 5.42** (*a*) Circuito con R_L quitada y fuente independiente puesta en cortocircuito. (*b*) Circuito para determinar v_{TH}.

(Continúa en la siguiente página)

Debido a que $v_\pi = 0$, la fuente de corriente dependiente es un circuito abierto, por lo que $R_{TH} = 1$ kΩ. Esto puede verificarse conectando una fuente de corriente independiente de 1 A a través de la resistencia de 1 kΩ; v_π será igual a cero, por lo que la fuente dependiente permanece inactiva y de aquí que no contribuya en nada con R_{TH}.

Con la finalidad de obtener la potencia máxima entregada a la carga, R_L debe fijarse a un valor $\boxed{R_{TH} = 1 \text{ k}\Omega.}$

Para encontrar v_{TH} considerar el circuito que se muestra en la figura 5.42*b*, que es la figura 5.41 con la resistencia R_L removida. Se puede escribir

$$v_{oc} = -0.03v_\pi(1\,000) = -30v_\pi$$

donde la tensión v_π puede encontrarse a partir de una simple división de tensión:

$$v_\pi = (2.5 \times 10^{-3} \operatorname{sen} 440t)\left(\frac{3\,864}{300 + 3\,864}\right)$$

por lo que el equivalente de Thévenin es una tensión -69.6 sen $440t$ mV en serie con 1 kΩ.

La potencia máxima está dada por

$$p_{\text{máx}} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}} = \boxed{1.211 \operatorname{sen}^2 440t \ \mu\text{W}}$$

PRÁCTICA

5.10 Considere el circuito de la figura 5.43.

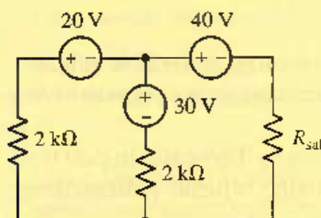


FIGURA 5.43

(*a*) Si $R_{sal} = 3$ kΩ, encontrar la potencia entregada al circuito.

(*b*) ¿Cuál es la potencia máxima que puede ser entregada a cualquier R_{sal}?

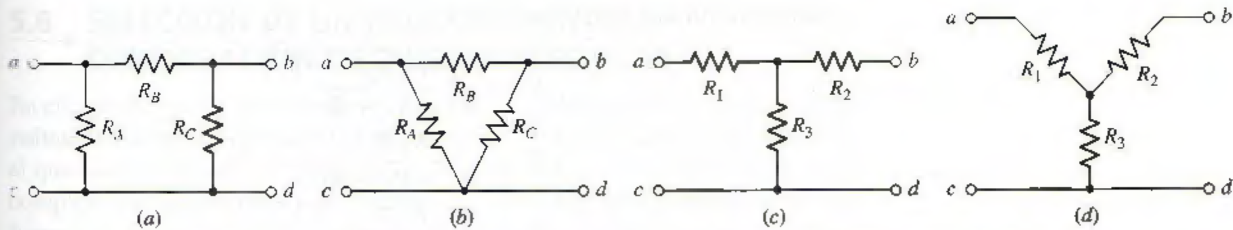
(*c*) ¿Qué par de valores diferentes de R_{sal} entregarán exactamente 20 mW a ellos?

Respuesta: 230 mW; 306 mW; 59.2 kΩ y 16.88 Ω.

5.5 CONVERSIÓN DELTA-ESTRELLA

Como ya se vio, la identificación de combinaciones en paralelo y en serie de resistencias a menudo propicia una reducción importante de la complejidad de un circuito. En situaciones en las que no existen tales combinaciones, muchas veces se recurre a las transformaciones de fuente para posibilitar dichas simplificaciones. Existe otra técnica útil, llamada conversión **Δ-*Y* (*delta-estrella*)** que surge de la teoría de redes.

Considerar los circuitos de la figura 5.44. No hay combinaciones en serie o en paralelo que se puedan hacer para simplificar más alguno de los circuitos (note que 5.44*a* y 5.44*b* son idénticos, como lo son 5.44*c* y 5.44*d*), así que sin ninguna



■ **FIGURA 5.44** (*a*) Red Π con tres resistencias y tres conexiones únicas. (*b*) Misma red dibujada como una red Δ. (*c*) Red T de tres resistencias. (*d*) Misma red dibujada como una red Y.

fuente presente, no se pueden realizar transformaciones de fuente. Sin embargo, es viable efectuar una conversión entre estos dos tipos de redes.

Primero se definen dos tensiones v_{ab} y v_{cd}, y tres corrientes i_1, i_2 e i_3 como se muestra en la figura 5.45. Si las dos redes son equivalentes, entonces las tensiones y las corrientes en las terminales deben ser iguales (no hay corriente i_2 en la red conectada en T). Un conjunto de relaciones entre R_A, R_B, R_C y R_1, R_2 y R_3 puede ahora definirse simplemente realizando el análisis de malla. Por ejemplo, para la red de la figura 5.45*a* se puede escribir

$$R_A i_1 - R_A i_2 = v_{ac} \quad [20]$$

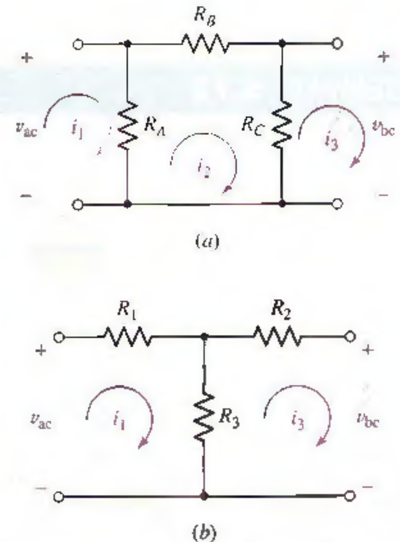
$$-R_A i_1 + (R_A + R_B + R_C) i_2 - R_C i_3 = 0 \quad [21]$$

$$-R_C i_2 + R_C i_3 = -v_{bc} \quad [22]$$

y para la red de la figura 5.45*b* se tiene

$$(R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_3 = v_{ac} \quad [23]$$

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_3 = -v_{bc} \quad [24]$$



■ **FIGURA 5.45** (*a*) Red Π marcada; (*b*) red T marcada.

A continuación se quita i_2 de las ecuaciones [20] y [22] utilizando la ecuación [21], lo que produce

$$\left(R_A - \frac{R_A^2}{R_A + R_B + R_C}\right) i_1 - \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} i_3 = v_{ac} \quad [25]$$

y

$$-\frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} i_1 + \left(R_C - \frac{R_C^2}{R_A + R_B + R_C}\right) i_3 = -v_{bc} \quad [26]$$

Comparando términos entre las ecuaciones [25] y [23], se puede observar que,

$$R_3 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

De manera similar, se pueden encontrar expresiones de R_1 y R_2 en términos de R_A, R_B y R_C, así como expresiones de R_A, R_B y R_C en términos de R_1, R_2 y R_3; se deja el resto de las deducciones como ejercicio para el lector. Por lo tanto, para convertir una red Y en una Δ, los nuevos valores de los resistencias se calculan utilizando

$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

y para convertir una red Δ a una red Y:

$$R_1 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$
$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$
$$R_3 = \frac{R_C R_A}{R_A + R_B + R_C}$$

La aplicación de las ecuaciones es directa, aunque la identificación de las redes reales en ocasiones requiere un poco de concentración.

EJEMPLO 5.12

Utilizar la técnica de la conversión Δ-Y para determinar la resistencia equivalente de Thévenin del circuito de la figura 5.46*a*.

Se puede observar que la red de la figura 5.46*a* está compuesta por dos redes conectadas en Δ que comparten la resistencia de 3 Ω. Se debe tener cuidado en este punto y no ser demasiado ambiciosos al convertir ambas redes conectadas en Δ en dos redes conectadas en Y. La razón quizá sea más evidente después de que se convierta la red superior, consistente en las resistencias de 1, 4 y 3 Ω en una red conectada en Y (fig. 5.46*b*).

Observar que al convertir la red superior en una red conectada en Y, se elimina la resistencia de 3 Ω. En consecuencia, no hay manera de convertir la red original conectada en Δ compuesta por las resistencias de 2, 5 y 3 Ω en una red conectada en Y.

Se procede a combinar las resistencias de $\frac{3}{8}$ Ω y 2 Ω así como los de $\frac{3}{2}$ Ω y 5 Ω (fig. 5.46*c*). Se tiene ahora una resistencia de $\frac{19}{8}$ Ω en paralelo con uno de $\frac{13}{2}$ Ω; además de esta combinación en paralelo está en serie con la resistencia de $\frac{1}{2}$ Ω. De tal modo, se sustituye la red original de la figura 5.46*a* por una resistencia de $\frac{159}{71}$ Ω (fig. 5.46*d*).

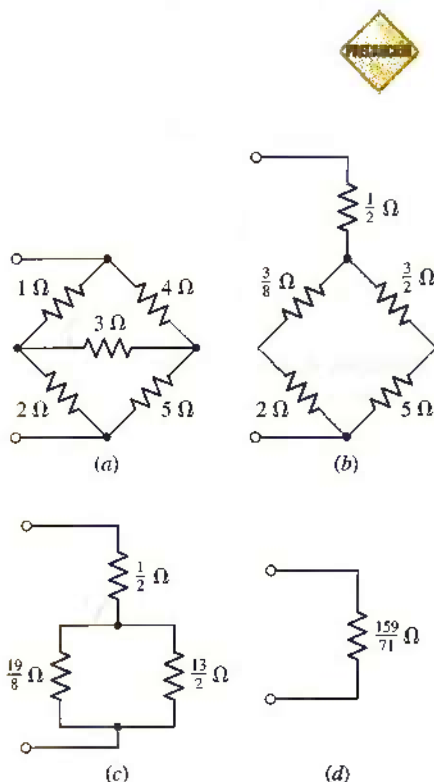


FIGURA 5.46 (*a*) Red resistiva dada cuya resistencia de entrada se desea. (*b*) La red Δ superior se sustituye por una red Y equivalente. (*c*, *d*) Las combinaciones en serie y en paralelo producen un único valor de resistencia.

PRÁCTICA

5.11 Utilizar la técnica de conversión Y-Δ para determinar la resistencia equivalente de Thévenin del circuito de la figura 5.47.

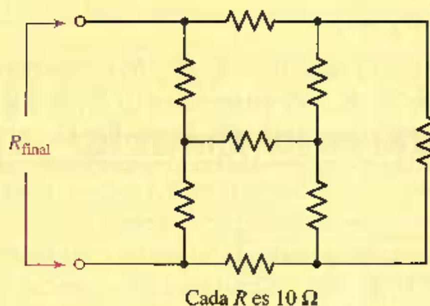


FIGURA 5.47

Respuesta: 11.43 Ω.

5.6 SELECCIÓN DE UN PROCEDIMIENTO: COMPARACIÓN DE DIVERSAS TÉCNICAS

En el capítulo 3 se presentaron la ley de corriente de Kirchhoff (LCK) y la ley de voltaje (tensión) de Kirchhoff (LVK). Ambas se aplican a cualquier circuito con el que uno se encuentre, siempre que se tenga cuidado en considerar el sistema completo que los circuitos representan. La razón radica en que ambas leyes refuerzan la conservación de la carga y de la energía, respectivamente, y ambas son principios muy importantes. Con base en la LCK se formuló el poderoso método del análisis nodal. Una técnica similar basada en la LVK (sólo aplicable desafortunadamente a circuitos planos) se conoce como análisis de malla y también se usa como un método útil para analizar circuitos.

Este texto, en su mayor parte, se interesa en el desarrollo de habilidades analíticas que se puedan aplicar a circuitos *lineales*. Si se sabe que un circuito está construido sólo por componentes lineales (en otras palabras, todas las tensiones y corrientes se relacionan mediante funciones lineales), entonces a menudo se simplifican los circuitos, antes de emplear el análisis de malla o el nodal. Quizás el resultado más importante que surge al saber que se trabaja con un sistema por completo lineal es que se aplica el principio de superposición. Dado un determinado número de fuentes independientes que actúa en un circuito, se suma la contribución de cada fuente, de manera independiente de las otras fuentes. La técnica está muy arraigada en todo el campo de la ingeniería, así que se encuentra muy a menudo. En muchas situaciones reales, se puede observar que aunque varias "fuentes" actúan de manera simultánea sobre el "sistema", por lo común una de ellas domina la respuesta de éste. La superposición permite identificar con rapidez dicha fuente, siempre que se tenga un modelo lineal razonablemente preciso del sistema.

Sin embargo, desde el punto de vista del análisis de circuitos, a menos que se desee encontrar la fuente independiente que contribuye más a una respuesta particular, se demostrará que arremangarse la camisa y proceder de inmediato al análisis nodal o de malla resulta muchas veces una táctica más directa. Esto se debe a que al aplicar la superposición a un circuito con 12 fuentes independientes es necesario volver a dibujar el circuito original 12 veces y, de cualquier modo, con frecuencia se tendrá que aplicar el análisis nodal o de malla a cada uno de los circuitos.

No obstante, la técnica de las transformaciones de fuente casi siempre es una herramienta muy útil para el análisis de circuitos. Efectuar las transformaciones de fuente permite consolidar resistencias o fuentes que no están en serie o en paralelo en el circuito original. Las transformaciones de fuente quizá también permitan convertir todas o al menos la mayor parte de las fuentes del circuito original al mismo tipo (que todas sean fuentes de tensión o todas fuentes de corriente), por lo que el análisis nodal o de malla es más directo.

El teorema de Thévenin es extremadamente importante por varias razones. Al trabajar con circuitos electrónicos, siempre se conoce la resistencia equivalente de Thévenin de diferentes partes del circuito, en especial la resistencia de entrada y de salida de las etapas del amplificador. La razón consiste en que igualar las resistencias con frecuencia resulta la mejor forma de optimizar el desempeño de un circuito determinado. Un pequeño anticipo de lo anterior se presentó en el análisis de la transferencia de potencia máxima, donde debe elegirse la resistencia de carga para que iguale la resistencia equivalente de Thévenin de la red a la cual se conecta la carga. Sin embargo, en términos del análisis de circuitos cotidiano, se encontrará que la conversión de parte de un circuito en su equivalente de Thévenin o de Norton implica casi tanto trabajo como analizar el circuito completo. Por lo tanto, al igual que en el caso de la superposición, los

teoremas de Thévenin y Norton se aplican por lo común sólo cuando se necesita información especializada relativa a una parte del circuito.

RESUMEN Y REPASO

- El principio de superposición establece que la *respuesta* en un sistema lineal se obtiene sumando las respuestas individuales causadas por las fuentes *independientes* separadas *que actúan solas*.
- La superposición se emplea con mayor frecuencia cuando se necesita determinar la contribución individual de cada fuente a una respuesta particular.
- Un modelo práctico de una fuente de tensión real es una resistencia en serie con una fuente de tensión independiente. Un modelo práctico de una fuente de corriente real es una resistencia en paralelo con una fuente de corriente independiente.
- Las transformaciones de fuente convierten una fuente de tensión práctica en una fuente de corriente práctica y viceversa.
- Las transformaciones de fuente repetidas simplifican en gran medida el análisis de un circuito pues ofrecen los medios para combinar resistencias y fuentes.
- El equivalente de Thévenin de una red es una resistencia en serie con una fuente de tensión independiente. El equivalente de Norton es la misma resistencia en paralelo con una fuente de corriente independiente.
- Hay varias formas de obtener la resistencia equivalente de Thévenin, en función de que existan o no fuentes dependientes en la red.
- La transferencia de potencia máxima ocurre cuando la resistencia de carga iguala la resistencia equivalente de Thévenin de la red a la que se conecta.
- Cuando se analiza una red resistiva conectada en Δ su conversión en Y es un procedimiento directo. Esto puede ser de utilidad para simplificar la red antes de efectuar el análisis. De manera contraria, una red resistiva conectada en Y puede convertirse en una red conectada en Δ como ayuda de la simplificación de la red.

LECTURAS ADICIONALES

Un libro que trata acerca de la tecnología de baterías, y que incluye las características de la resistencia integrada es:

D. Linden, *Handbook of Batteries*, 2a ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1995.

Un excelente análisis de casos patológicos y teoremas sobre análisis de circuitos se puede encontrar en:

R. A. DeCarlo y P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2a ed. Nueva York: Oxford University Press, 2001.

EJERCICIOS

5.1 Linealidad y superposición

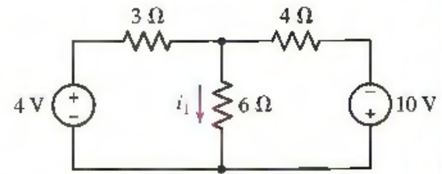
1. El concepto de linealidad es muy importante, pues los sistemas lineales se analizan con mucha mayor facilidad que los no lineales. Desafortunadamente, la mayor parte de los sistemas prácticos que se encuentran son de naturaleza no lineal. Sin embargo, es posible crear un modelo lineal de un sistema no lineal, que es válido en un pequeño intervalo de la variable de control. Como un ejemplo de ello, considerar la simple fun-

ción exponencial e^x. La representación en serie de Taylor de esta función es:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

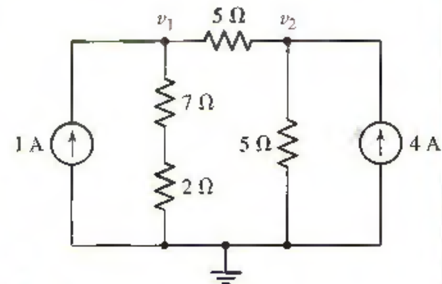
Construir un modelo lineal de esta función truncándola después del término lineal (x^1). Evaluar su nueva función en $x = 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.10, 0.5, 1.0$ y 5.0. ¿Para qué valores de x el modelo lineal ofrece una aproximación "razonable" a e^x?

2. En el circuito de la figura 5.48, (*a*) determinar la contribución de la fuente de 4 V a la corriente marcada i_1; (*b*) determinar la contribución de la fuente de 10 V i_1; y (*c*) determinar i_1.



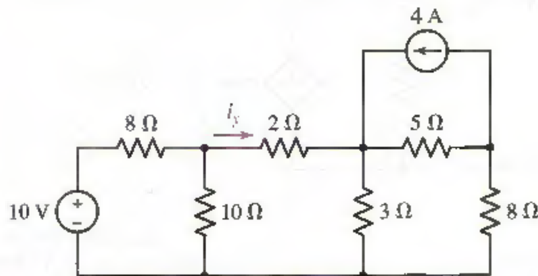
■ **FIGURA 5.48**

3. Con referencia al circuito de las dos fuentes que se muestra en la figura 5.49, determinar la contribución de la fuente de 1 A a v_1, y calcular la corriente total que circula a través de la resistencia de 7Ω.

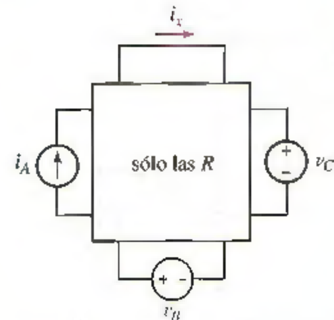


■ **FIGURA 5.49**

4. Con la ayuda del principio de superposición, determinar la corriente marcada i_y en el circuito de la figura 5.50 considerando cada fuente de forma individual.



■ **FIGURA 5.50**

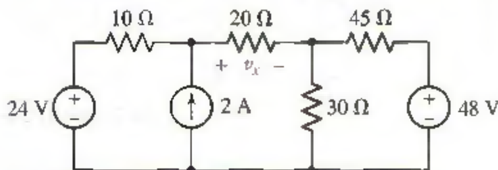


■ **FIGURA 5.51**

5. En el circuito que se muestra en la figura 5.48, modificar sólo el valor de las fuentes para obtener un incremento en un factor de 10 en la corriente i_1; *ambos* valores de fuente deben modificarse y *ninguno* debe ser igual a cero.

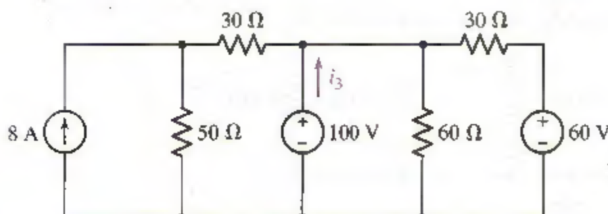
6. Las fuentes i_A y v_B están activadas en el circuito de la figura 5.51; $v_C = 0$, $i_x = 20$ A; con i_A y v_C están activadas y $v_B = 0$, $i_x = -5$ A; además, finalmente, con las tres fuentes activadas, $i_x = 12$ A. Dado lo anterior determinar i_x si la única fuente que funciona es (*a*) i_A; (*b*) v_B; (*c*) v_C. (*d*) Encontrar i_x si i_A y v_C se duplican en amplitud y v_B se invierte.

7. Utilizar la superposición para calcular el valor de v_x del circuito de la figura 5.52.



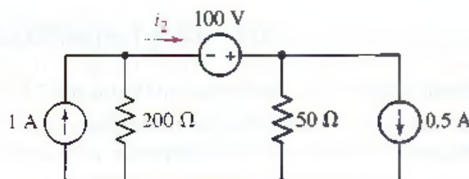
■ **FIGURA 5.52**

8. Aplicar la superposición al circuito de la figura 5.53 para determinar i_3.



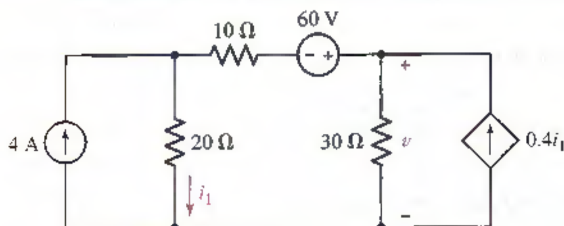
■ **FIGURA 5.53**

9. (*a*) Utilizar el teorema de superposición para obtener i_2 en el circuito de la figura 5.54. (*b*) Calcular la potencia absorbida por cada uno de los cinco elementos del circuito.

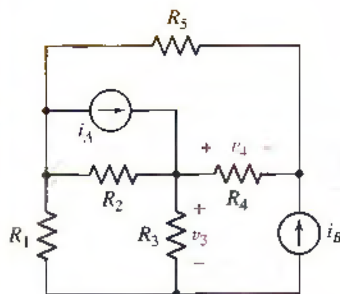


■ **FIGURA 5.54**

10. Aplicar la superposición en el circuito de la figura 5.55 para determinar la tensión v. Observar que hay una fuente dependiente.



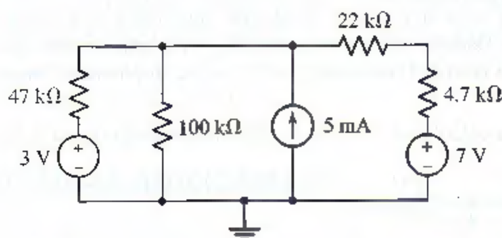
■ **FIGURA 5.55**



■ **FIGURA 5.56**

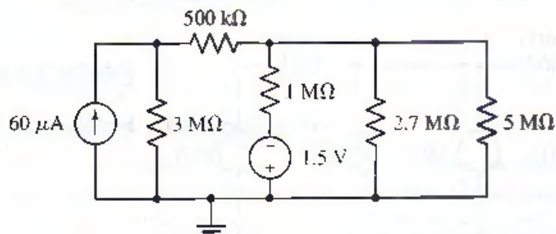
11. En el circuito de la figura 5.56: (*a*) si $i_A = 10$ A e $i_B = 0$, entonces $v_3 = 80$ V; determinar v_3 si $i_A = 25$ A e $i_B = 0$. (*b*) Si $i_A = 10$ A e $i_B = 25$ A, entonces $v_4 = 100$ V, mientras que $v_4 = -50$ V si $i_A = 25$ A e $i_B = 10$ A; determinar v_4 si $i_A = 20$ A e $i_B = -10$ A.

12. Utilizar la superposición para calcular la tensión en la fuente de corriente de la figura 5.57.



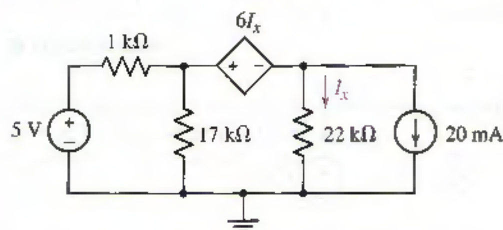
■ **FIGURA 5.57**

13. Recurrir a la superposición para encontrar la potencia que disipa la resistencia de 500 kΩ en la figura 5.58.



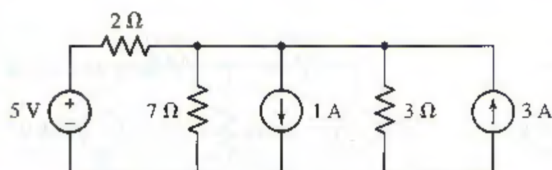
■ **FIGURA 5.58**

14. Aplicar la superposición para calcular la tensión en la resistencia de 17 kΩ de la figura 5.59. Si el valor nominal de potencia máxima de la resistencia es de 250 mW, ¿cuál es la tensión positiva máxima hasta la que puede incrementarse la fuente de 5 V, antes de que la resistencia se sobrecaliente?



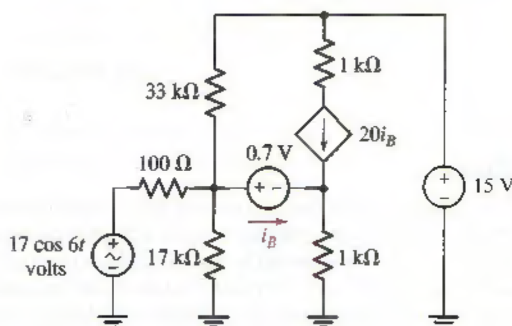
■ **FIGURA 5.59**

15. ¿Cuál de las fuentes de la figura 5.60 contribuye más a la potencia disipada en la resistencia de 2 Ω. ¿La que contribuye menos? ¿Cuál *es* la potencia que se disipa en la resistencia de 2 Ω?



■ **FIGURA 5.60**

16. Aplicar la superposición para determinar i_B en el circuito de la figura 5.61, que es un circuito modelo que suele utilizarse para un amplificador transistorizado de unión bipolar.

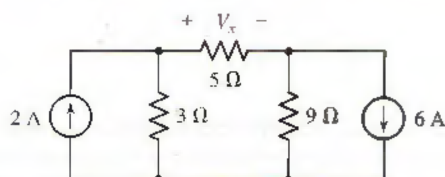


■ **FIGURA 5.61**


17. Para el circuito de la figura 5.62,

(*a*) Utilizar la superposición para calcular V_x.

(*b*) Verificar la contribución de cada fuente a V_x mediante un análisis PSpice de barrido de cd. Proponer un diagrama marcado, una salida de prueba importante y un breve resumen de los resultados.



■ **FIGURA 5.62**


18. Para el circuito que se muestra en la figura 5.63,
   (*a*) Utilizar la superposición para calcular V_x.
   (*b*) Verificar la contribución de cada fuente a V_x con un análisis PSpice de barrido de cd. Proponer un esquema marcado, una salida de prueba importante y un resumen breve de los resultados.

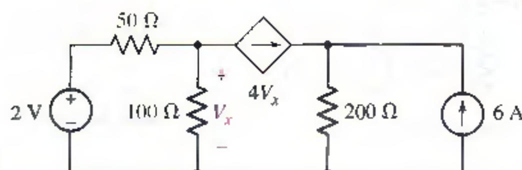


FIGURA 5.63

19. Considerar los tres circuitos de la figura 5.64. Analice cada uno y demuestre que $V_x = V_x' + V_x''$ (es decir, *la superposición es más útil cuando las fuentes se igualan a cero, aunque el principio es, en realidad, mucho más general).*

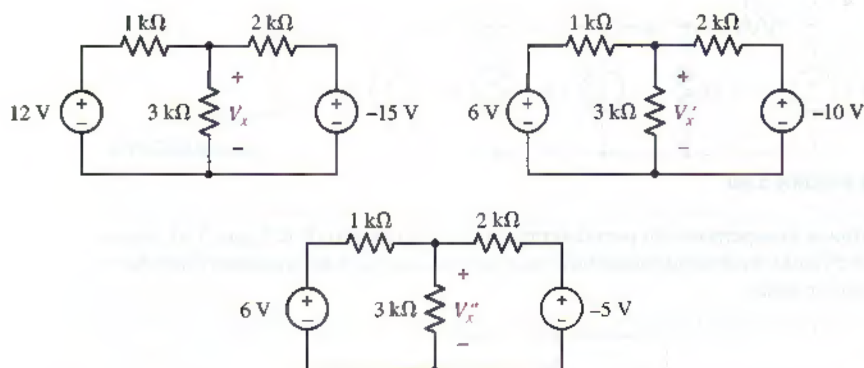


FIGURA 5.64

5.2 Transformaciones de fuente

20. Con la ayuda del método de transformación de fuente, (*a*) convertir al circuito de la figura 5.65*a* en una sola fuente de tensión independiente en serie con una resistencia diseñada adecuadamente; y (*b*) convertir al circuito de la figura 5.65*b* en una sola fuente de corriente independiente en paralelo con una resistencia diseñada de manera apropiada. Tanto en (*a*) como en (*b*), dejar las terminales del lado derecho en el circuito final.

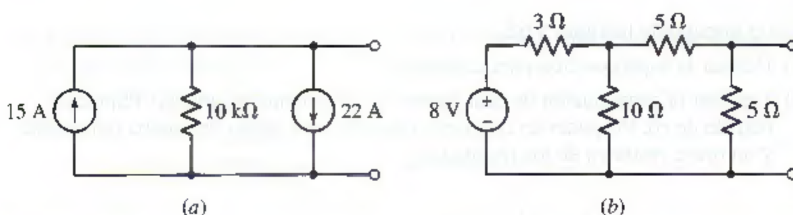
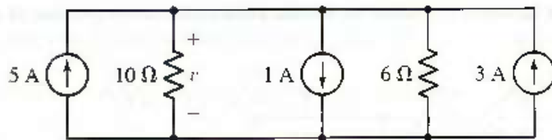


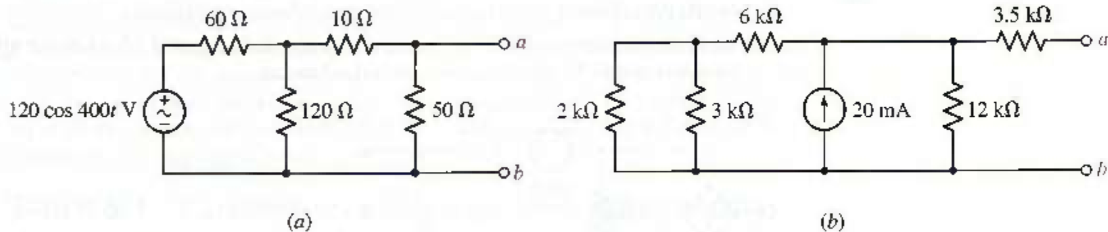
FIGURA 5.65

21. (*a*) Utilizar el método de las transformaciones de fuente para simplificar el circuito de la figura 5.66 a una fuente de tensión práctica en serie con la resistencia de 10 Ω. (*b*) Calcular v. (*c*) Explicar por qué la resistencia de 10 Ω no debe incluirse en una transformación de fuente.



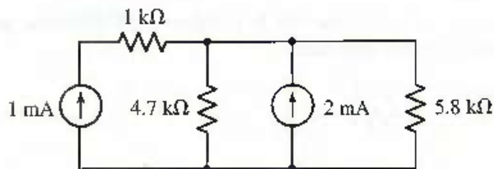
■ **FIGURA 5.66**

22. Utilizar las transformaciones de fuente y las combinaciones de resistencia para simplificar ambas redes de la figura 5.67, hasta que sólo queden dos elementos a la izquierda de las terminales *a* y *b*.



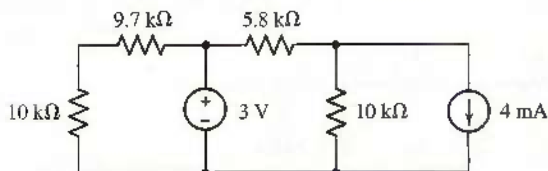
■ **FIGURA 5.67**

23. Mediante la transformación de fuente, determinar la potencia disipada por la resistencia de 5.8 kΩ en la figura 5.68.



■ **FIGURA 5.68**

24. Mediante la transformación de fuente, determinar la potencia disipada por la resistencia de 5.8 kΩ de la figura 5.69.



■ **FIGURA 5.69**

25. Determinar la potencia que disipa la resistencia de 1 MΩ utilizando la transformación de fuente para simplificar primero el circuito que se ilustra en la figura 5.70.

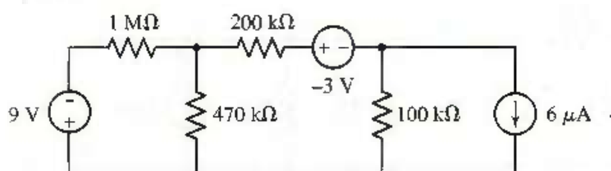
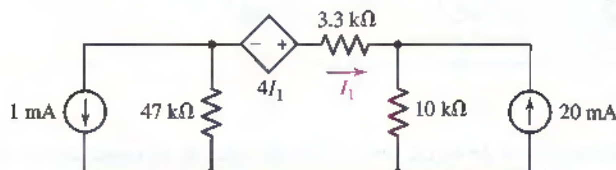


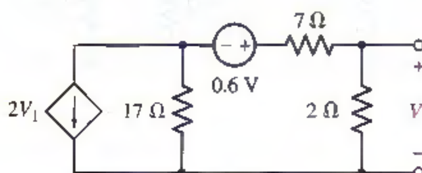
FIGURA 5.70

26. Determinar I_1 mediante la transformación de fuente para primero simplificar el circuito de la figura 5.71.



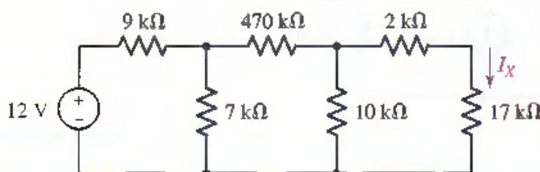
■ **FIGURA 5.71**

27. (*a*) Encontrar V_1 en el circuito de la figura 5.72 por medio de la transformación de fuente para obtener primero un circuito equivalente simplificado.
(*b*) Verificar mediante un análisis PSpice el circuito de la figura 5.72. Elaborar un esquema donde V_1 esté marcada con toda claridad.



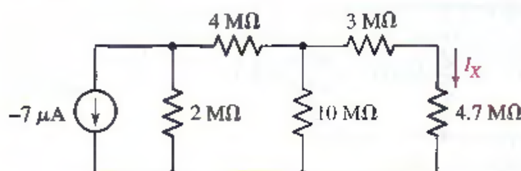
■ **FIGURA 5.72**

28. (*a*) Utilizar la transformación de fuente repetida para determinar la corriente I_x como se indica en la figura 5.73.
(*b*) Verificar mediante un análisis PSpice el circuito de la figura 5.73. Elaborar un esquema donde I_X esté indicado con claridad.



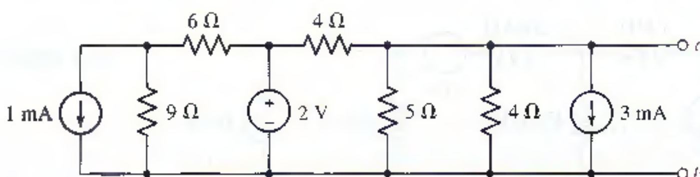
■ **FIGURA 5.73**

29. Utilizar la transformación de fuente repetida para determinar la corriente I_X en el circuito de la figura 5.74.



■ **FIGURA 5.74**

30. Convertir al circuito de la figura 5.75 en una fuente de corriente en paralelo con una sola resistencia.



■ **FIGURA 5.75**

31. Recurrir a la transformación de fuente para convertir el circuito de la figura 5.76 en una sola fuente de corriente en paralelo con una resistencia.

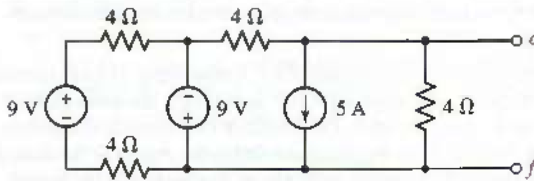


FIGURA 5.76

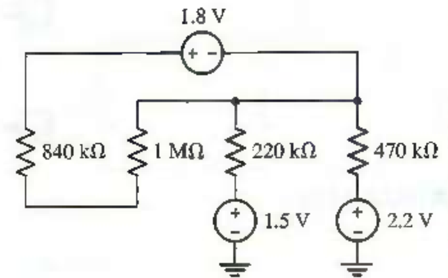


FIGURA 5.77

32. Determinar la potencia disipada por la resistencia de 1 MΩ en el circuito de la figura 5.77.

33. Las siguientes mediciones de la tabla 5.1 fueron efectadas a una batería alcalina de 1.5 V. Utilizar la información para construir un modelo simple de una fuente de tensión práctica de dos componentes para la batería, que sea relativamente preciso para corrientes en el intervalo de 1 a 20 mA. Observar que además del error experimental evidente, la "resistencia interna" de la batería es muy diferente a lo largo del intervalo de corriente que se midió en el experimento.

TABLA **5.1** Características de corriente-tensión medidas de una batería alcalina de 1.5 V conectada a una resistencia de carga variable.

Salida de corriente (mA)	Tensión de terminal (V)
0.0000589	1.584
0.3183	1.582
1.4398	1.567
7.010	1.563
12.58	1.558

34. Utililizar los datos de la tabla 5.1 para construir un modelo simple de fuente de corriente práctica de dos componentes para la batería, que sea relativamente preciso para corrientes en el intervalo de 1 a 20 mA. Observe que además del error experimental evidente, la "resistencia interna" de la batería es muy diferente en el intervalo de corriente que se midió en el experimento.

35. Reducir el circuito de la figura 5.78 a una sola fuente de tensión en serie con una sola resistencia.

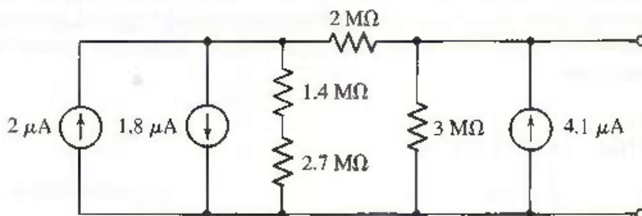


FIGURA 5.78

36. Calcular la potencia absorbida por la resistencia de 5 Ω en la figura 5.79.

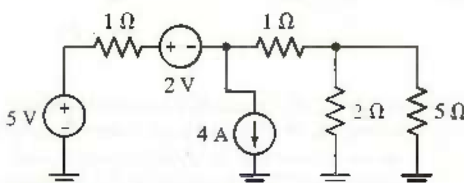
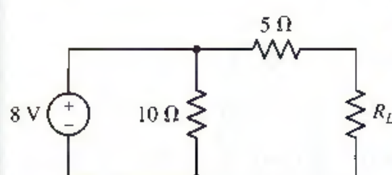


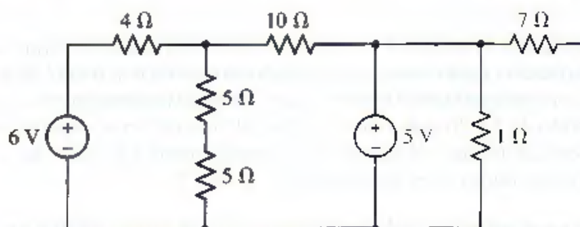
FIGURA 5.79



■ FIGURA 5.80

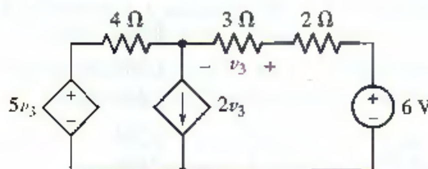

37. (*a*) Convertir el circuito de la figura 5.80 en una fuente práctica de corriente en paralelo con R_L. (*b*) Verificar su respuesta utilizando PSpice y un valor de 5 Ω para R_L. Elaborar esquemas debidamente marcados de cada circuito que identifiquen claramente la tensión en R_L.


38. (*a*) Reducir lo más posible el circuito de la figura 5.81, transformar las dos fuentes de tensión en fuentes de corriente y después calcular la potencia disipada en la resistencia de 5 Ω ubicado en la parte superior. (*b*) Verificar la respuesta simulando ambos circuitos en PSpice. Elaborar un esquema debidamente marcado de cada circuito, que identifique claramente la potencia disipada en la resistencia de interés. (*c*) ¿Afecta la respuesta de alguna forma el valor de 1 Ω o de 7 Ω de la resistencia? Explicar su respuesta.



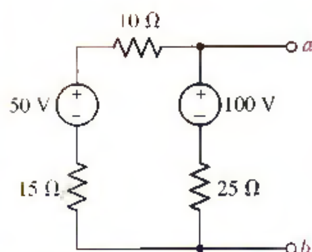
■ FIGURA 5.81

39. En el circuito de la figura 5.82, convertir todas las fuentes (tanto dependientes como independientes) en fuentes de corriente, combinar las fuentes dependientes y calcular la tensión v_3.



■ FIGURA 5.82

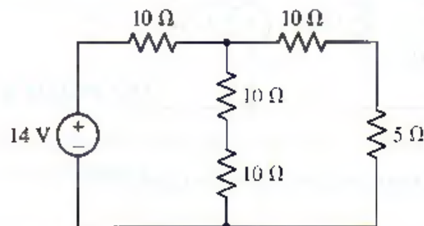
5.3 Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton



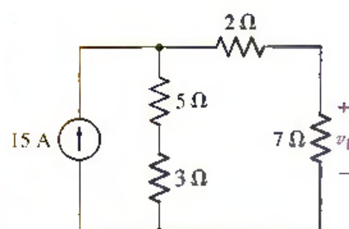
■ FIGURA 5.83

40. (*a*) Determinar el equivalente de Thévenin de las terminales *a* y *b* de la red de la figura 5.83. ¿Cuánta potencia se suministraría a una resistencia conectada entre *a* y *b* si R_{ab} es igual a: (*b*) 50 Ω; (*c*) 12.5 Ω?


41. (*a*) Utilizar el teorema de Thévenin para simplificar la red conectada a la resistencia de 5 Ω de la figura 5.84. (*b*) Calcular la potencia absorbida por la resistencia de 5 Ω utilizando su circuito simplificado. (*c*) Verificar la respuesta con PSpice. Elaborar un esquema debidamente marcado de cada circuito que indique claramente la cantidad de potencia solicitada.



■ FIGURA 5.84



■ FIGURA 5.85

42. (*a*) Encontrar el equivalente de Thévenin de la red conectada a la resistencia de 7 Ω de la figura 5.85. (*b*) Encontrar el equivalente de Norton de la red conectada a la resistencia de 7 Ω de la figura 5.85. (*c*) Calcular la tensión v_1 utilizando ambos circuitos equivalentes. (*d*) Sustituir la resistencia de 7 Ω con uno de 1 Ω y recalcular v_1 utilizando cualquier circuito.

43. (*a*) Un foco con filamento de tungsteno está conectado a una tensión de prueba de 10 mV midiéndose una corriente de 400 μA. ¿Cuál es el equivalente de Thévenin del foco? (*b*) El foco se conecta a una fuente de 110 V midiéndose una corriente de 363.3 mA. Determinar el equivalente de Thévenin con base en esta medición. (*c*) ¿Por qué el equivalente de Thévenin del foco depende aparentemente de las condiciones de la prueba y qué implicaciones tiene esto si se necesita analizar un circuito que contenga a este foco?

44. (*a*) Encontrar los equivalentes de Thévenin y de Norton de la red conectada a la resistencia de 1 Ω de la figura 5.86. (*b*) Calcular la potencia absorbida por la resistencia de 1 Ω utilizando ambos circuitos equivalentes. (*c*) Verificar utilizando PSpice. Presentar un esquema debidamente marcado de cada uno de los tres circuitos en los que se identifique debidamente la cantidad de potencia solicitada.

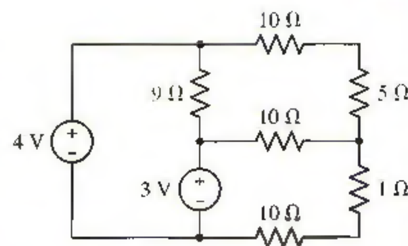


FIGURA 5.86

45. Para la red de la figura 5.87: (*a*) eliminar la terminal *c* y proporcionar el equivalente de Norton visto en las terminales *a* y *b*; (*b*) repetir para las terminales *b* y *c* si se elimina *a*.

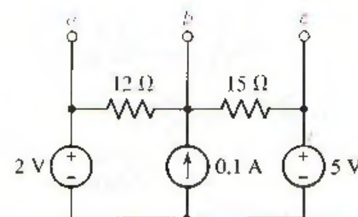


FIGURA 5.87

46. Determinar el equivalente de Thévenin de la red de la figura 5.88, según se observa desde las terminales: (*a*) *x* y *x'*; (*b*) *y* y *y'*.

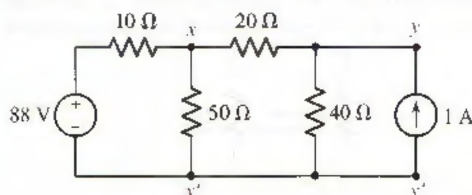


FIGURA 5.88

47. (*a*) Obtener el equivalente de Thévenin de la red que se exhibe en la figura 5.89. (*b*) ¿Qué potencia se proporcionaría a una carga de 100 Ω entre *a* y *b*?

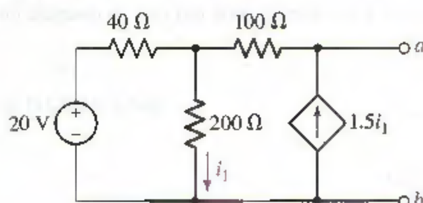


FIGURA 5.89

48. Determinar el equivalente de Norton de la red de la figura 5.90.

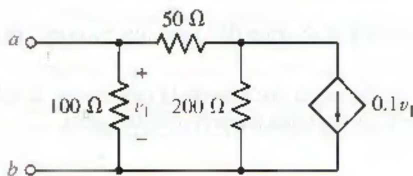


FIGURA 5.90

49. Determinar el equivalente de Thévenin de la red de dos terminales que se muestra en la figura 5.91.

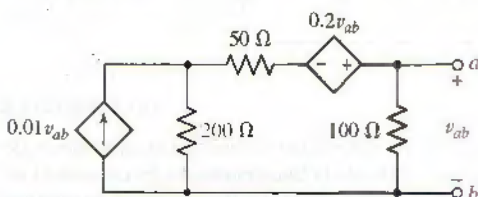
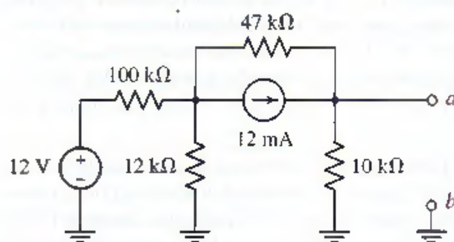
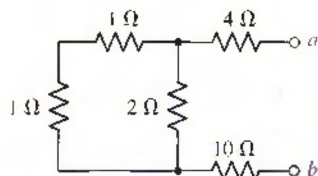


FIGURA 5.91

50. Proporcionar el equivalente de Thévenin del circuito de la figura 5.92.



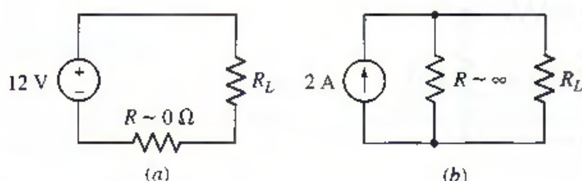
■ FIGURA 5.92



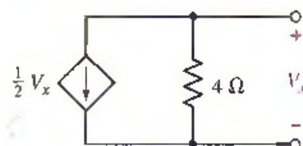
■ FIGURA 5.93

51. Para la red de la figura 5.93, determinar: (*a*) el equivalente de Thévenin; (*b*) el equivalente de Norton.

52. Para el circuito de la figura 5.94*a*, encontrar el equivalente de Norton de la red conectada a R_L. En el caso del circuito de la figura 5.94*b*, encontrar el equivalente de Thévenin de la red que se conecta a R_L.



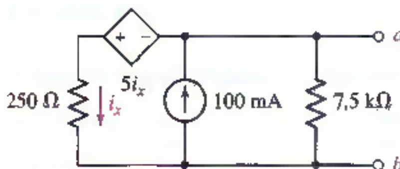
■ FIGURA 5.94



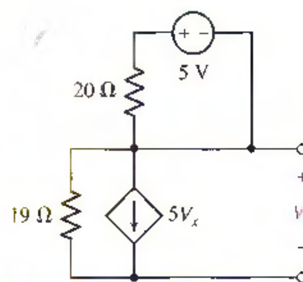
■ FIGURA 5.95

53. Obtener los equivalentes de Thévenin y de Norton de la red de la figura 5.95.

54. Determinar los equivalentes de Thévenin y de Norton de la red que se muestra en la figura 5.96.



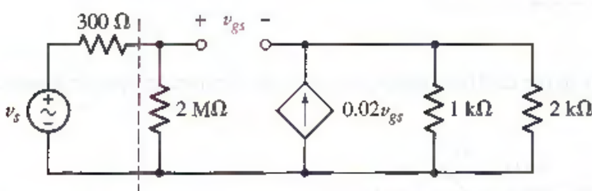
■ FIGURA 5.96



■ FIGURA 5.97

55. Proporcionar los equivalentes de Thévenin y de Norton de la red que se presenta en la figura 5.97.

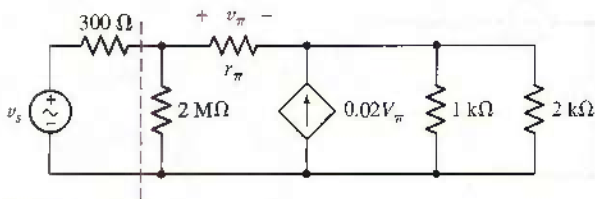
56. Determinar la resistencia equivalente de Thévenin vista desde la resistencia de 2 kΩ en el circuito de la figura 5.98. Pasar por alto la línea punteada de la figura.



■ FIGURA 5.98

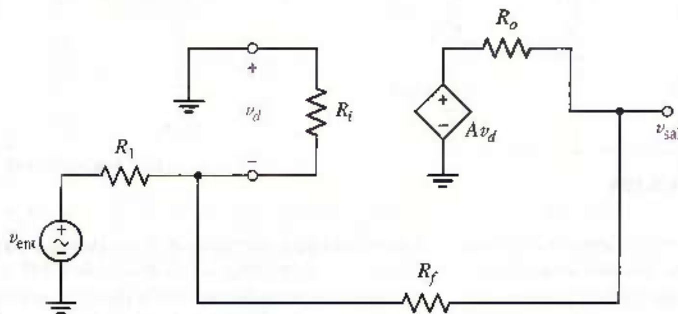
57. Con base en el circuito de la figura 5.98, determinar la resistencia equivalente de Thévenin del circuito que está a la derecha de la línea punteada. El circuito es un amplificador transistorizado de fuente común del que está calculando su resistencia de entrada.

58. En el circuito de la figura 5.99, obtener la resistencia equivalente de Thévenin del circuito que está a la derecha de la línea punteada; es un amplificador transistorizado de emisor común del cual está calculando la resistencia de entrada.



■ **FIGURA 5.99**

59. El circuito que se muestra en la figura 5.100 es un modelo razonablemente aproximado de un amplificador operacional. En casos donde R_i y A son muy grandes y $R_o \sim 0$, una carga resistiva (como por ejemplo una bocina) conectada entre tierra y la terminal marcada v_{sal} verán una tensión $-R_f/R_1$ veces más grande que la señal de entrada v_{ent}. Determinar el equivalente de Thévenin del circuito, recordando marcar v_{sal}.

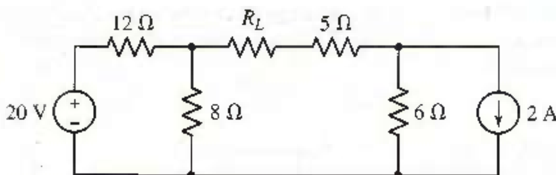


■ **FIGURA 5.100**

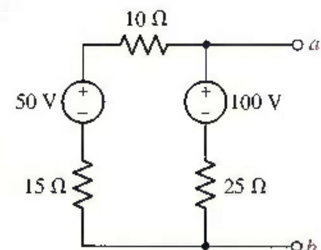
5.4 Transferencia de potencia máxima

60. Suponiendo que se puede determinar la resistencia equivalente de Thévenin del tomacorriente de pared, ¿por qué los fabricantes de tostadores, hornos de microondas y televisiones no igualan la resistencia equivalente de Thévenin de cada aparato con dicho valor? ¿Éste no permitiría transferencia de potencia máxima desde la compañía eléctrica hasta los aparatos domésticos?

61. Si cualquier valor arbitrario puede elegirse para R_L en el circuito de la figura 5.101, ¿cuál es la potencia máxima que podría disiparse en R_L?



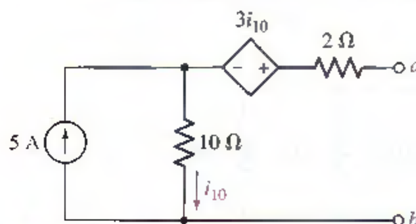
■ **FIGURA 5.101**



■ **FIGURA 5.102**

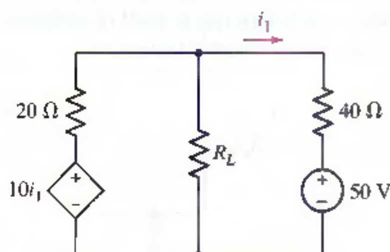
62. (*a*) Determinar el equivalente de Thévenin en las terminales a y b para la red que se presenta en la figura 5.102. ¿Qué cantidad de potencia se entregaría a una resisenciar conectada entre a y b si R_{ab} es igual a: (*b*) 10 Ω; (*c*) 75 Ω?

63. (*a*) Determinar el equivalente de Thévenin de la red que se muestra en la figura 5.103, y (*b*) encontrar la potencia máxima que puede extraerse de él.



■ **FIGURA 5.103**

64. Con base en el circuito de la figura 5.104: (*a*) calcular el valor de R_L para el cual puede entregarse una potencia máxima, y (*b*) obtener la tensión en R_L en ese caso (con la referencia + en la parte superior).



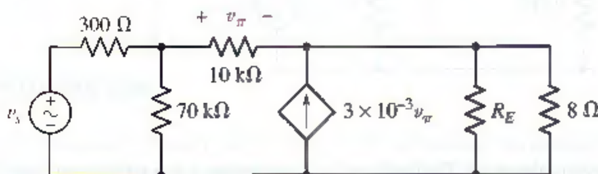
■ **FIGURA 5.104**

65. Cierta fuente de tensión cd práctica proporciona una corriente de 2.5 A cuando se encuentra (momentáneamente) en cortocircuito, y suministra una potencia de 80 W a una carga de 20 Ω. Calcular: (*a*) la tensión en circuito abierto; (*b*) la potencia máxima que podría entregar a una R_L bien elegida; (*c*) ¿cuál es el valor de dicha R_L?

66. Una fuente de corriente práctica proporciona 10 W a una carga de 250 Ω y 20 W a una carga de 80 Ω. Una resistencia R_L, con tensión v_L e i_L, se conecta a ella. Proporcionar los valores de R_L, v_L e i_L si (*a*) $v_L i_L$ es un máximo; (*b*) v_L es un máximo; (*c*) i_L es un máximo.

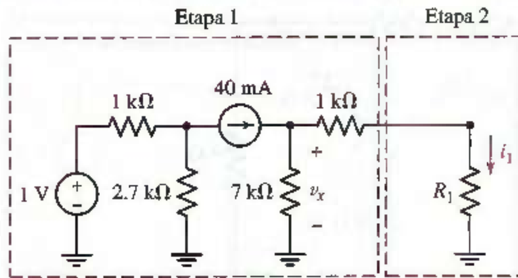
67. El modelo de cierta batería podría ser precisamente una fuente independiente de 9 V en serie con una resistencia de 1.2 Ω en el intervalo de corriente de interés. Ninguna corriente fluye si se conecta una carga de resistencia infinita a la batería. También se sabe que la potencia máxima se transferirá a una resistencia de 1.2 Ω, y que se transferirá menos potencia a cualquiera de las resistencias de 1.1 Ω o 1.3 Ω. Sin embargo, si sólo se ponen en corto las terminales de la batería en conjunto (¡no se recomienda!), se obtendrá *mucha más* corriente que en una carga resistiva de 1.2 Ω. ¿Lo anterior no entra en conflicto con lo que se acaba de deducir sobre la transferencia de potencia máxima? (*después de todo, ¿no es la potencia proporcional a* i^2)? Explicar su respuesta.

68. El circuito de la figura 5.105 forma parte de un amplificador de audio. Si se desea transferir una potencia máxima al altavoz de 8 Ω ¿qué valor de R_E se necesita? Verificar su solución con PSpice.



■ **FIGURA 5.105**

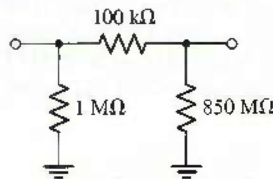
69. El circuito de la figura 5.106 describe un circuito separado en dos etapas. Elegir R_1 de manera que la potencia máxima se transfiera de la etapa 1 a la etapa 2.



■ **FIGURA 5.106**

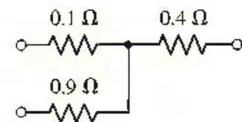
5.5 Conversión delta-estrella

70. Convertir la red de la figura 5.107 en una red conectada en Y.



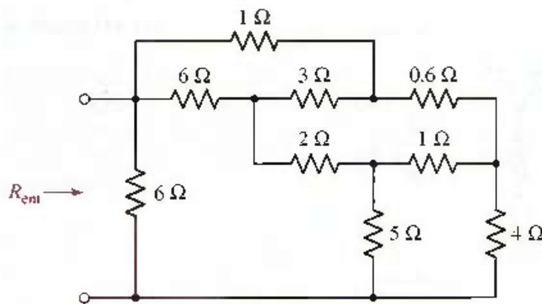
■ **FIGURA 5.107**

71. Convertir la red de la figura 5.108 en una red conectada en Δ.



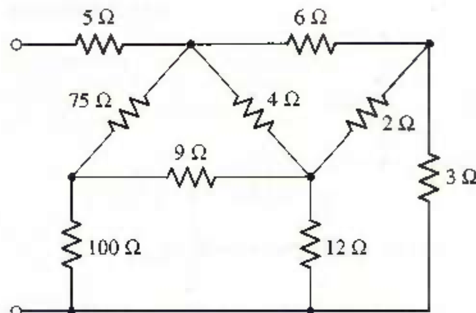
■ **FIGURA 5.108**

72. Determinar R_{ent} de la red de la figura 5.109.



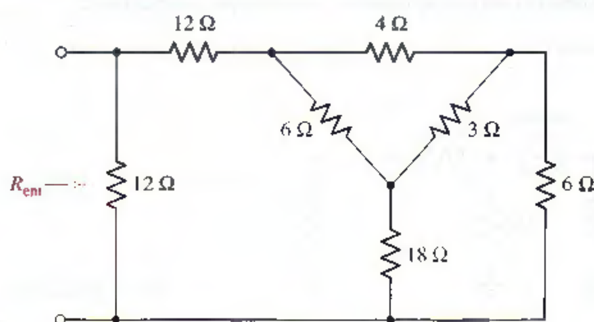
■ **FIGURA 5.109**

73. Utilizar transformaciones Y-Δ y Δ-Y para calcular la resistencia de entrada de la red que se muestra en la figura 5.110.



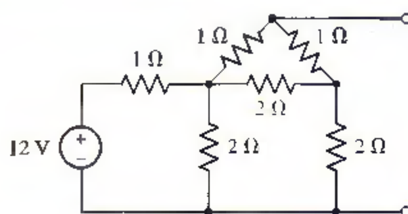
■ **FIGURA 5.110**

74. Determinar R_{ent} del circuito de la figura 5.111.

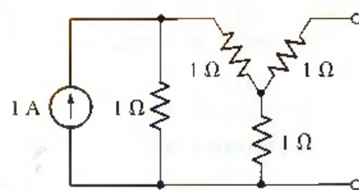


■ **FIGURA 5.111**

75. Obtener el equivalente de Thévenin del circuito de la figura 5.112.



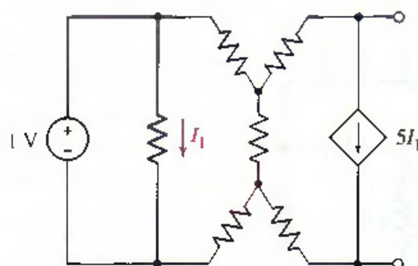
■ **FIGURA 5.112**



■ **FIGURA 5.113**

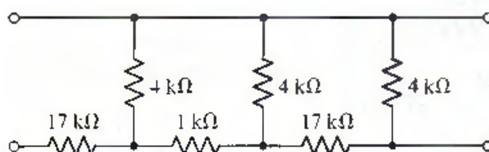
76. Proporcionar el equivalente de Norton del circuito de la figura 5.113.

77. Si todas las resistencias de la figura 5.114 son de 10 Ω, determinar el equivalente de Thévenin del circuito.

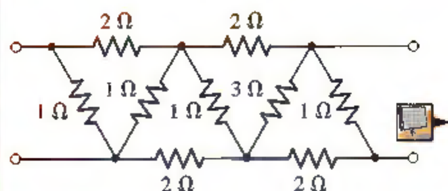


■ **FIGURA 5.114**

78. (*a*) Sustituir la red de la figura 5.115 por una red equivalente en Y de tres resistencias.
(*b*) Efectuar un análisis con PSpice para verificar que su respuesta es, en realidad, equivalente: (Sugerencia: tratar de agregar una resistencia de carga.)



■ **FIGURA 5.115**

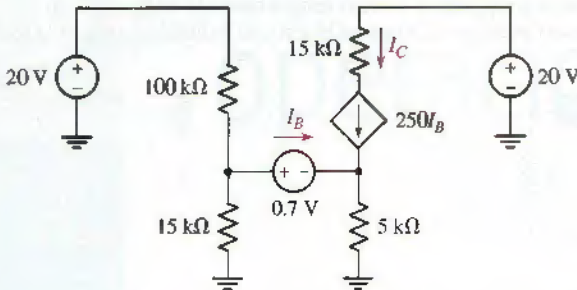


■ **FIGURA 5.116**

79. (*a*) Sustituir la red de la figura 5.116 por una red equivalente en Δ de tres resistencias.
(*b*) Efectuar un análisis con PSpice para verificar que su respuesta es, en realidad, equivalente: (Sugerencia: tratar de agregar una resistencia de carga.)

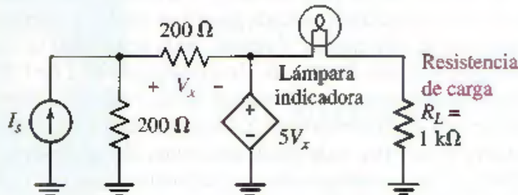
5.6 Selección de un método: resumen de varias técnicas

80. El circuito que se presenta en la figura 5.117 es un modelo razonablemente exacto de un transistor de unión bipolar que funciona en lo que se conoce como *región activa directa*. Determinar la corriente de colector I_C. Verificar su respuesta con PSpice.



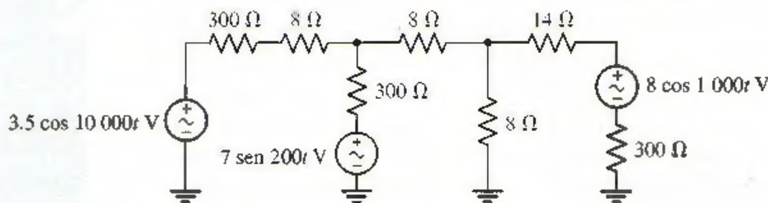
■ **FIGURA 5.117**

81. La resistencia de carga en la figura 5.118 disipa con seguridad hasta 1 W, antes de sobrecalentarse y explotar en llamas. Se puede considerar a la lámpara como una resistencia de 10.6 ohms, si menos de 1 A circula por ella, y como una resistencia de 15 ohms si la corriente que fluye es mayor de 1 A. ¿Cuál es el valor permisible máximo de I_S? Verificar su respuesta con PSpice.



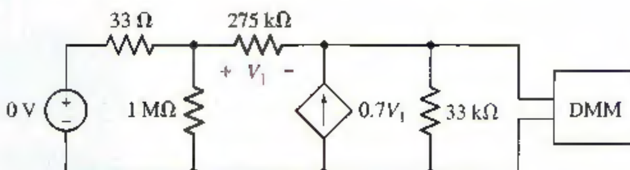
■ **FIGURA 5.118**

82. El oído humano detecta ondas sonoras en el intervalo de frecuencia de casi 20 Hz hasta 20 kHz. Si cada resistencia de la figura 5.119 es un altavoz de 8 Ω ¿cuál de los generadores de señal (cuyos modelos son fuentes de tensión prácticas) produce el mayor sonido? (Considere el "volumen" como proporcional a la potencia entregada a un altavoz.)



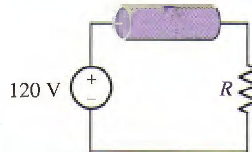
■ **FIGURA 5.119**

83. Un multímetro digital se conecta a un circuito de resistencias, como se ve en la figura 5.120. Si la resistencia de entrada del multímetro es de 1 MΩ, ¿qué valor se indicará si el multímetro digital mide la resistencia?



■ **FIGURA 5.120**

84. Una sustancia metálica se extrae de un meteorito descubierto en los campos de Indiana. Se descubre que la sustancia tiene una resistividad de 50 Ω · cm y de dentro de él se extrae un cilindro simple. Éste se conecta al circuito de la figura 5.121 y se observa que muestra una dependencia de temperatura de $T = 200P^{0.25}$ °C, donde P es la potencia que se proporciona al cilindro en watts. La resistividad de la sustancia no parece depender de la temperatura, lo cual resulta bastante interesante. Si $R = 10\ \Omega$ y absorbe una potencia máxima en el circuito exhibido, ¿cuál es la temperatura del cilindro?



■ **FIGURA 5.121**

85. Como parte de un sistema de seguridad, un alambre muy delgado de 100 Ω se adhiere a una ventana mediante pegamento epóxico no conductor. Si se cuenta sólo con una caja de 12 baterías AAA de 1.5 V recargables, con mil resistencias de 1 Ω y un piezo-zumbador de 2 900 Hz que requiere 15 mA, a 6 V, diseñar un circuito sin partes móviles que active el zumbador al romperse la ventana (y consecuentemente también se rompe el alambre delgado). Observar que para funcionar, el zumbador requiere una tensión de cd de al menos 6 V (28 V máximo).

86. Tres focos eléctricos de 45 W alambrados originalmente en una configuración de red en Y con una fuente de 120 V ca conectada en cada puerto se vuelve a alambrar como una red en Δ. No se usa la conexión neutra, o central. Si la intensidad de cada luz es proporcional a la potencia que toma, diseñar un circuito de potencia de 120 V ca, de manera que las tres luces tengan la misma intensidad en la configuración en Δ que tenían cuando estaban en una configuración en Y. Verificar su diseño con PSpice al comparar la potencia extraída por cada luz de su circuito (cuyo modelo es un valor de resistencia elegido de manera apropiada), con la potencia que cada uno extraería en el circuito original conectado en Y.

87. Cierto LED rojo tiene un valor nominal de corriente máxima de 35 mA; si se excede este valor, se producirá un sobrecalentamiento y una falla catastrófica. La resistencia del LED es una función no lineal de su corriente, pero el fabricante garantiza una resistencia mínima de 47 Ω y una máxima de 117 Ω. Sólo se cuenta con baterías de 9 V para activar al LED. Diseñar un circuito adecuado para suministrar la potencia máxima posible al LED sin dañarlo. Utilizar sólo combinaciones de los valores de resistencias estándar dados en la contratapa de la portada.

CAPÍTULO 6

El amplificador operacional

CONCEPTOS CLAVE

- Características ideales de los amp op.
- Amplificadores inversores y no inversores.
- Circuitos amplificadores sumadores y diferenciales.
- Etapas de los amp op en cascada.
- Utilización de amp op para construir fuentes de tensión y de corriente.
- Características no-ideales de los amp op.
- Ganancia de tensión y retroalimentación.
- Circuitos básicos de comparación y de amplificador de instrumentación.

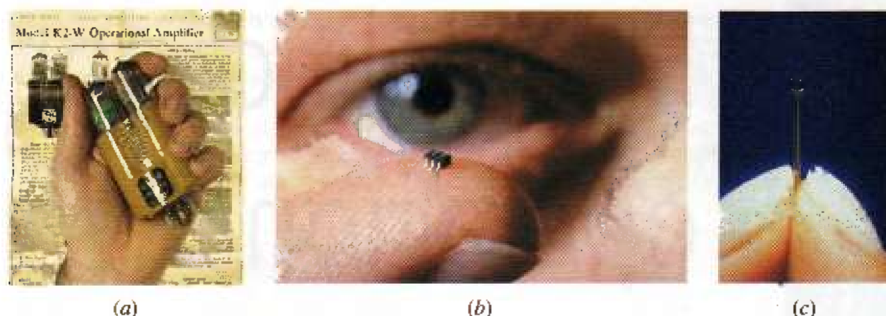
INTRODUCCIÓN

Ya se presentaron suficientes leyes básicas y técnicas analíticas que se pueden aplicar con buenos resultados en algunos circuitos prácticos interesantes. En este capítulo se analizará un dispositivo eléctrico muy útil que recibe el nombre de *amplificador operacional,* o ***amp op*** para abreviar.

6.1 ANTECEDENTES

Los orígenes del amplificador operacional se remontan a la cuarta década del siglo XX, cuando los circuitos básicos se construían utilizando bulbos de vacío para efectuar operaciones matemáticas tales como la suma, la resta, la multiplicación, la división, la derivación y la integración. Este avance permitió la construcción de computadoras analógicas (en contraste con las digitales) para resolver ecuaciones diferenciales complejas. Se considera que el primer *dispositivo* amplificador operacional comercialmente disponible fue el K2-W, fabricado por la compañía Philbrick Researches, Inc., de Boston desde 1952 hasta principios de los años de 1970 (figura 6.1*a*). Estos dispositivos de bulbo de vacío pesaban 3 onzas (85 g), medían $1^{33}/_{64}$" × $2^{9}/_{64}$" × $4^{7}/_{64}$" (3.8 cm × 5.4 cm × 10.4 cm), y costaban aproximadamente 22 dólares. En contraste, los modernos amplificadores operacionales en circuitos integrados (CI) como el Fairchild KA741 pesan menos de 500 mg, miden 5.7 mm × 4.9 mm × 1.8 mm, y se venden en aproximadamente 0.22 dólares.

Comparados con los amplificadores operacionales basados en bulbos de vacío, los circuitos integrados modernos de amp op están fabricados con alrededor de 25 o más transistores en la misma "pastilla" de silicio, junto con las resistencias y capacitores necesarios para obtener las características deseadas de desempeño. Como resultado, éstos trabajan a tensiones de alimentación de cd mucho menores (±18 V, por ejemplo, en contraste con ±300 V que utilizaban los K2-W), son más confiables y considerablemente más pequeños (fig. 6.1*b*, *c*). En algunos casos, un CI tal vez contenga varios amp op. Además de la patilla de salida y de las dos entradas, otras



(a) (b) (c)

FIGURA 6.1 (a) El amp op K2-W de Philbrick se basa en un par acoplado de bulbos al vacío 12AX7A. (b) Amplificador operacional LMV321, utilizado en una gran variedad de aplicaciones de teléfono y juegos. (c) Amplificador operacional LMC6035, que alberga 114 transistores en un encapsulamiento tan pequeño que cabe en la cabeza de un alfiler.
(Fotos cortesía de National Semiconductor Corporation.)

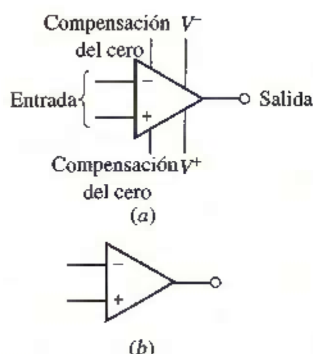


FIGURA 6.2 (a) Símbolo eléctrico del amp op. (b) Conexiones mínimas que se requieren en un amp op.

patillas permiten que se suministre potencia para operar los transistores y que haya ajustes externos a fin de balancear y compensar el amp op. El símbolo que más se usa para un amp op se muestra en la figura 6.2*a*. En este momento no interesa la circuitería interna del amp op o del CI, sino sólo las relaciones de tensión y de corriente que existen entre las terminales de entrada y salida. En consecuencia, por ahora se usará un símbolo eléctrico más simple, que se presenta en la figura 6.2*b*, en el que se exhiben dos terminales de entrada a la izquierda y una sola terminal de salida a la derecha. La terminal marcada "+" se conoce como la ***entrada no inversora***, y la terminal marcada "−" recibe el nombre de ***entrada inversora***.

6.2 EL AMP OP IDEAL: UNA INTRODUCCIÓN AMABLE

Cuando se diseña un amp op, el ingeniero de circuitos integrados trabaja muy duro para conseguir que el dispositivo tenga características casi ideales. En la práctica, se encuentra que la mayoría de los amp op se desempeñan tan bien que, muchas veces, es posible suponer que se trabaja con un dispositivo "ideal". Las características de un ***amp op ideal*** constituyen la base de dos reglas fundamentales que quizás parezcan un poco inusuales:

Reglas del amp op ideal

1. Nunca fluye corriente hacia ninguna terminal de entrada.
2. No existe diferencia de tensión entre las dos terminales de entrada.

En un amp op real, una pequeña corriente de fuga circulará hacia la entrada (algunas veces tan baja como 40 femtoamperes). Es posible obtener una tensión muy pequeña entre las dos terminales de entrada; sin embargo, en comparación con las tensiones y corrientes de la mayoría de los circuitos, tales valores son tan pequeños que si se incluyeran en el análisis difícilmente afectarían los cálculos.

Al analizar circuitos de amp op se debe tomar otro aspecto en cuenta. En oposición a los circuitos que se han estudiado hasta ahora, un circuito de amp op siempre tiene una salida que depende de algún tipo de entrada. Por lo tanto, se analizarán los circuitos de amp op con el objetivo de obtener la expresión de la salida en términos de las cantidades de *entrada*. *Se podrá ver que suele ser una buena idea empezar el análisis de un circuito de amp op en la entrada, y proceder a partir de ahí.*

El circuito que se muestra en la figura 6.3 se conoce como ***amplificador inversor***. Se opta por analizar este circuito mediante la LVK, empezando con la fuente de tensión de entrada. La corriente denominada i fluye sólo a través de las dos resistencias R_1 y R_f, la regla 1 del amp op ideal establece que no fluye ninguna corriente hacia la terminal de entrada inversora. En consecuencia, es posible escribir:

$$-v_{\text{ent}} + R_1 i + R_f i + v_{\text{sal}} = 0$$

que se ordena para obtener una ecuación que relaciona la salida con la entrada

$$-v_{\text{sal}} = v_{\text{ent}} - (R_1 + R_f)i \qquad [1]$$

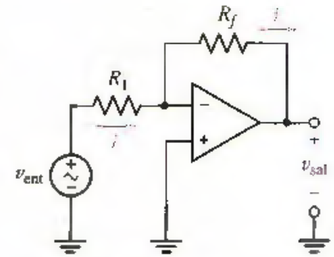


FIGURA 6.3 Amp op utilizado para construir un circuito amplificador inversor, donde $v_{\text{ent}} = 5$ sen $3t$ mV, $R_1 = 4.7$ kΩ, y $R_f = 47$ kΩ.

Sin embargo, se presenta ahora en una situación en la que se tiene una ecuación con dos incógnitas, puesto que sólo se nos da $v_{\text{ent}} = 5$ sen $3t$ mV, $R_1 = 4.7$ kΩ, y $R_f = 47$ kΩ. Por lo tanto, para calcular la tensión de salida, es necesario contar con una ecuación adicional que exprese i sólo en términos de v_{sal}, v_{ent}, R_1, y/o R_f.



Es un buen momento para mencionar que aún no se ha recurrido a la regla 2 del amp op ideal. Puesto que la entrada no inversora está conectada a tierra, corresponde a cero volts. Así, por la regla 2 del amp op ideal, la entrada inversora también vale cero volts. *Lo anterior no quiere decir que las dos entradas estén en conjunto puestas en cortocircuito, así que se debe tener mucho cuidado de no hacer una suposición de este tipo.* Más bien, las dos tensiones de entrada sólo se siguen entre sí: si se tratara de cambiar la tensión en una patilla (terminal de salida), la otra flotará en torno al mismo valor. Por lo tanto, se puede escribir una ecuación de la LVK adicional:

El hecho de que la propia terminal de entrada inversora se encuentre en cero volts en este tipo de configuración de circuito propicia lo que a menudo se conoce como una "tierra virtual". Ello no significa que la patilla (terminal) esté en realidad conectada a tierra, por lo que algunas veces resulta una fuente de confusión para los estudiantes. El amp op efectúa cualesquiera ajustes internos necesarios para evitar una diferencia de tensión entre las terminales de entrada, las cuales nunca están en corto al mismo tiempo.

$$-v_{\text{ent}} + R_1 i + 0 = 0$$

o

$$i = \frac{v_{\text{ent}}}{R_1} \qquad [2]$$

Al combinar la ecuación [2] con la [1], se obtiene una expresión de v_{sal} en términos de v_{ent}:

$$v_{\text{sal}} = -\frac{R_f}{R_1} v_{\text{ent}} \qquad [3]$$

Al sustituir $v_{\text{ent}} = 5\,\text{sen}\,3t$ mV, $R_1 = 4.7$ kΩ y $R_f = 47$ kΩ,

$$v_{\text{sal}} = -50\,\text{sen}\,3t \qquad \text{mV}$$

Puesto que se indica que $R_f > R_1$, el circuito amplifica la señal de tensión de entrada v_{ent}. Si se elige $R_f < R_1$, la señal más bien se atenuará. También se puede observar que la tensión de salida tiene el signo opuesto de la tensión de entrada,[1] de donde surge el nombre de "amplificador inversor". La salida se dibuja en la figura 6.4, junto con la forma de onda de entrada con fines comparativos.

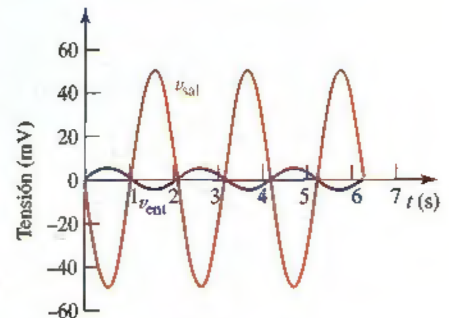
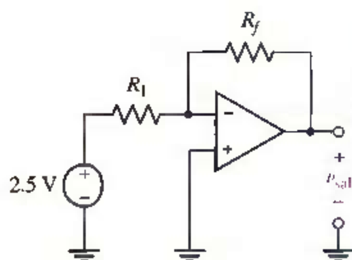


FIGURA 6.4 Formas de onda de entrada y de salida del circuito amplificador inversor.

En este punto, vale la pena mencionar que el amp op ideal parece violar la LCK. De manera específica, en el circuito anterior no fluye corriente hacia fuera de cualquier terminal de entrada, sino que algo de corriente ¡puede fluir a través de la patilla de salida!, lo cual implicaría que el amp op es de alguna manera capaz de crear electrones de la nada o de almacenarlos de modo indefinido (según sea la dirección del flujo de corriente). Resulta obvio que esto no es posible. El conflicto surge debido a que se trata al amp op de la misma manera que se hace con

(1) O, "*la salida está desfasada 180° con respecto a la entrada*", lo cual se oye más impresionante.



■ **FIGURA 6.5** Circuito amplificador inversor con una entrada de 2.5 V.

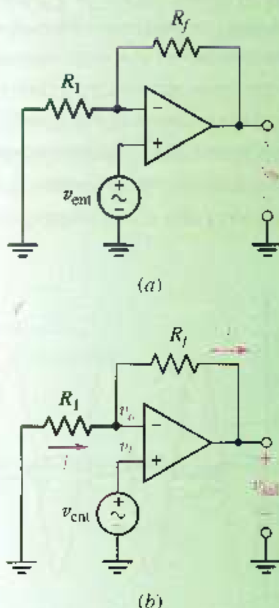
elementos pasivos como la resistencia. Sin embargo, en realidad el amp op no puede funcionar a menos que se conecte a fuentes de potencia externas. A través de esas fuentes de potencia se dirige el flujo de corriente hacia la terminal de salida.

A pesar de que se ha demostrado que el circuito amplificador no inversor de la figura 6.3 puede amplificar una señal de ca (una onda senoidal en este caso que tenga una frecuencia de 3 rad/s y una amplitud de 5 mV), también funciona adecuadamente con entradas de cd. Se consideran este tipo de situaciones en la figura 6.5, donde los valores de R_1 y R_f se seleccionarán a fin de obtener la tensión de salida de −10 V.

Éste es el mismo circuito que se muestra en la figura 6.3, pero con una entrada de cd de 2.5 V. Debido a que no se ha efectuado ningún otro cambio, la expresión que se presenta en la ecuación [3] también es válida en este circuito. Para obtener la salida deseada, se trata de encontrar una relación de R_f a R_1 de 10/2.5 o 4. Puesto que es la relación lo importante aquí, sólo es necesario escoger un valor adecuado para una resistencia, y se fijará el valor de la otra resistencia al mismo tiempo. Por ejemplo, se pudo haber seleccionado $R_1 = 100\ \Omega$ (por lo que $R_f = 400\ \Omega$), o aun $R_f = 8\ \text{M}\Omega$ (por lo que $R_1 = 2\ \text{M}\Omega$). En la práctica, otras restricciones (como la corriente de polarización) pueden limitar las alternativas.

Por lo tanto, esta configuración del circuito trabaja como un tipo de amplificador de tensión (o ***atenuador***, si la relación de R_f a R_1 es menor a 1), pero tiene a veces el inconveniente de invertir el signo de la entrada. Sin embargo, existe una alternativa que se analiza tan fácil como la anterior, ésta es, la del amplificador no inversor que se muestra en la figura 6.6. En el ejemplo siguiente se analiza dicho circuito.

EJEMPLO 6.1



■ **FIGURA 6.6** (*a*) Amp op que se emplea para construir un circuito amplificador no inversor. (*b*) Circuito con la corriente definida a través de R_1 y R_f así como con ambas tensiones de entrada marcadas.

Dibujar la forma de onda de salida del circuito amplificador no inversor de la figura 6.6*a*. Utilizar $v_{ent} = 5$ sen $3t$ mV, $R_1 = 4.7$ kΩ, y $R_f = 47$ kΩ.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

Se requiere una expresión para v_{sal} que sólo dependa de las cantidades conocidas v_{ent}, R_1 y R_f.

▶ ***Recopilar la información conocida.***

En razón de que se han especificado valores para las resistencias y la forma de onda de entrada, se comienza denominando la corriente i y las dos tensiones de entrada como en la figura 6.6*b*. Se supondrá que el amp op es ideal.

▶ ***Decidir la técnica disponible que se ajusta mejor al problema.***

Aunque el análisis de malla es la técnica favorita de los estudiantes, resulta más práctico aplicar el análisis nodal en la mayoría de los circuitos de amp op, ya que no hay una forma directa para determinar la corriente que fluye por su salida.

▶ ***Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.***

Observar que se utiliza de manera implícita la regla 1 del amp op ideal al definir la misma corriente a través de ambas resistencias: ninguna corriente fluye hacia la terminal de entrada inversora. Cuando se emplea el análisis nodal para obtener la expresión de v_{sal} en términos de v_{ent}, se tiene que

En el nodo a:

$$0 = \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_a - v_{sal}}{R_f} \qquad [4]$$

En el nodo b:

$$v_b = v_{ent} \qquad [5]$$

▶ ***Determinar si se requiere información adicional.***

El objetivo consiste en obtener una sola expresión que relacione las tensiones de entrada y salida, aunque ni la ecuación [4] ni la [5] parecen hacerlo. Sin embargo, aún no se ha empleado la regla 2 del amp op ideal, pero se verá que en casi todo circuito de amp op ambas reglas necesitan aprovecharse para obtener una expresión como la que se busca.

En consecuencia, se puede reconocer que $v_a = v_b = v_{ent}$, con lo cual la ecuación [4] se convierte en:

$$0 = \frac{v_{ent}}{R_1} + \frac{v_{ent} - v_{sal}}{R_f}$$

▶ ***Intentar encontrar la solución.***

Al reordenar la ecuación anterior, se obtiene una expresión de la tensión de salida en términos de la tensión de entrada v_{ent}:

$$v_{sal} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_{ent} = 11\, v_{ent} = 55 \operatorname{sen} 3t \quad \text{mV}$$

▶ ***Verificar la solución. ¿Es razonable o es esperada?***

Para fines comparativos, la forma de onda de salida se dibuja en la figura 6.7, junto con la forma de onda de entrada. En contraste con la forma de onda de salida del circuito amplificador inversor, observar que la entrada y la salida están en fase en el caso del amplificador no inversor. Este resultado no debe ser del todo inesperado: está implícito en el nombre "amplificador no inversor".

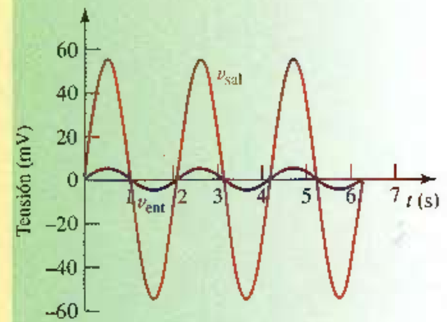


FIGURA 6.7 Formas de onda de entrada y salida del circuito amplificador no inversor.

PRÁCTICA

6.1 En el circuito de la figura 6.8, obtener la expresión de v_{sal} en términos de v_{ent}.

Respuesta: $v_{sal} = v_{ent}$. El circuito se conoce como un "*seguidor de tensión*", puesto que la tensión de salida rastrea o "*sigue*" a la tensión de entrada.

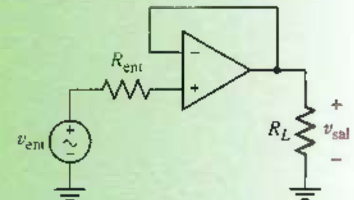


FIGURA 6.8

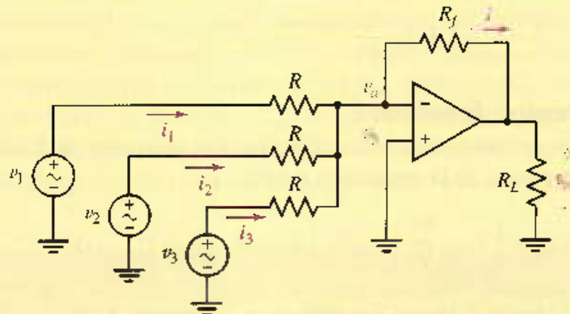
De la misma manera que el amplificador inversor, el no inversor trabaja con entradas de cd y de ca, pero tiene una ganancia de tensión de $v_{sal}/v_{ent} = 1 + (R_f/R_1)$. Por lo tanto, si se fija el valor de $R_f = 9\ \Omega$ y $R_1 = 1\ \Omega$, se obtiene una salida v_{sal} 10 veces mayor que la tensión de entrada v_{ent}. En contraste con el amplificador inversor, la entrada y la salida del amplificador no inversor posee siempre el mismo signo y la tensión de salida no puede ser menor que la de entrada; la ganancia mínima es 1. Amplificador que se seleccione dependerá de la aplicación que se esté considerando. En el caso especial del circuito seguidor de tensión que se muestra en la figura 6.8, el cual representa un amplificador no-inversor donde el valor de R_1 es ∞ y el de R_f es cero, la

salida es idéntica a la entrada tanto en signo *como* en magnitud. Puede que ello parezca no tener sentido como un tipo general de circuito, pero hay que tener en mente que *el seguidor de tensión no toma corriente de la entrada* (en el caso ideal) por lo cual éste puede actuar como un ***dispositivo de almacenamiento*** entre la tensión v_{ent} y alguna carga resistiva R_L conectada a la salida del amp op.

Se mencionó con anterioridad que el nombre "amplificador operacional" se origina a partir de su uso en operaciones aritméticas en señales analógicas (es decir, no digitalizadas y en tiempo real). Como se puede ver en los dos circuitos siguientes, sus tareas incluyen tanto la suma como la resta de señales de tensión de entrada.

EJEMPLO 6.2

Obtener la expresión de v_{sal} en términos de v_1, v_2 y v_3 del circuito de amp op de la figura 6.9, conocido también como "*amplificador sumador*".



■ **FIGURA 6.9** Circuito básico de amplificador sumador con tres entradas.

Observar primero que el circuito es similar al circuito de amplificador inversor de la figura 6.3. También aquí el objetivo es obtener una expresión para v_{sal} (que en este caso aparece a través de una resistencia de carga R_L) en términos de la entrada (en este caso v_1, v_2 y v_3).

En razón de que no puede circular ninguna corriente en la terminal de entrada inversora, se sabe que:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

Por lo tanto, se expresa la siguiente ecuación en el nodo marcado v_a:

$$0 = \frac{v_a - v_{\text{sal}}}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} + \frac{v_a - v_3}{R}$$

La ecuación contiene tanto a v_{sal} como a las tensiones de entrada, pero desafortunadamente también incluye la tensión nodal v_a. Para eliminar esta cantidad desconocida de nuestra expresión, es necesario escribir una ecuación adicional que relacione v_a con v_{sal}, las tensiones de entrada, R_f, y/o R. En este punto, hay que recordar que no se ha utilizado aún la regla 2 del amp op ideal, y que casi siempre se requieren ambas reglas para analizar un circuito de amp op. Por lo tanto, puesto que $v_a = v_b = 0$, se escribe lo siguiente:

$$0 = \frac{v_{\text{sal}}}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + \frac{v_3}{R}$$

Al reacomodar, se obtiene la siguiente expresión de v_{sal}.

$$v_{sal} = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3) \qquad [6]$$

En el caso especial en el que $v_2 = v_3 = 0$, se puede observar que el resultado concuerda con la ecuación [3], que se dedujo prácticamente para el mismo circuito.

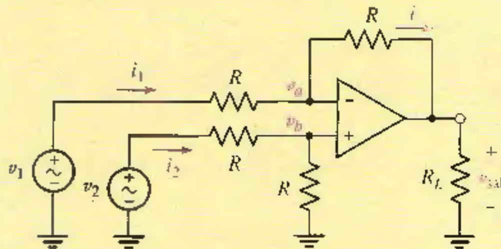
Se pueden observar varios aspectos interesantes acerca del resultado. Primero, si se elige R_f de tal forma que sea igual a R, entonces la salida es el (negativo) de la suma de v_1, v_2 y v_3. Además, se puede seleccionar el cociente de R_f y R para multiplicar esta suma por una constante determinada. Así que, por ejemplo, si las tres tensiones representaran señales de tres escalas diferentes calibradas de tal forma que -1 V = 1 lb, se podría fijar $R_f = R/2.205$ para obtener una señal de tensión que representara el peso combinado en kilogramos (con un porcentaje de exactitud de alrededor de 1% debido al factor de conversión).

Además, se puede observar que R_L no aparece en la expresión final. Siempre y cuando su valor no sea muy bajo, la operación del circuito no se verá afectada; hasta el momento, no se ha considerado un modelo lo suficientemente detallado de amp op que pueda predecir dicho evento. Esta resistencia representa el equivalente de Thévenin o cualquier elemento que se use para supervisar la salida del amplificador. Si el dispositivo de salida es un voltímetro simple, R_L representa la resistencia equivalente de Thévenin vista mirando hacia las terminales del voltímetro (por lo común 10 MΩ o más). O bien, el dispositivo de salida podría ser un altavoz (casi siempre de 8 Ω), en cuyo caso se escucha la suma de las tres fuentes sonoras independientes; v_1, v_2 y v_3 podrían representar los micrófonos en este caso.

Una advertencia: con frecuencia resulta tentador suponer que la corriente denominada i en la figura 6.9 no sólo fluye por R_f sino también a través de R_L. ¡No es cierto! Es muy posible que la corriente circule también por la terminal de salida del amp op, por lo que *las corrientes que circulan por las dos resistencias no son las mismas*. Por esta razón casi siempre se evita escribir ecuaciones de la LKC en la patilla de salida de un amp op, lo que lleva a que resulte preferible el análisis nodal sobre el de malla cuando se trabaja con la mayoría de los circuitos de amp op.

PRÁCTICA

6.2 Obtener la expresión de v_{sal} en términos de v_1 y v_2 para el circuito que se muestra en la figura 6.10, también conocido como ***amplificador de diferencia***.



■ **FIGURA 6.10**

Respuesta: $v_{sal} = v_2 - v_1$. Sugerencia: emplee la división de tensión para obtener v_b.

TABLA 6.1 Resumen de los circuitos básicos de amp op

Nombre	Esquema del circuito	Relación entrada-salida
Amplificador inversor		$v_{sal} = -\frac{R_f}{R_1} v_{ent}$
Amplificador no-inversor		$v_{sal} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_{ent}$
Seguidor de tensión (también conocido como amplificador de ganancia unitaria)		$v_{sal} = v_{ent}$
Amplificador sumador		$v_{sal} = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3)$
Amplificador de diferencia		$v_{sal} = v_2 - v_1$

APLICACIÓN PRÁCTICA

Sistema de intercomunicación de fibra óptica

Un sistema de intercomunicación de punto a punto se construye mediante varias técnicas diferentes, según el entorno de aplicación. Los sistemas de radiofrecuencia (RF) de baja potencia funcionan bastante bien, pero están sujetos a la interferencia de otras señales RF y también a menudo están bajo el asedio de escuchas furtivos. El uso de un alambre simple para conectar un micrófono a un altavoz (con circuitos de amplificador apropiados) elimina en gran parte la interferencia RF y también incrementa la privacidad. Sin embargo, los alambres sufren de corrosión y cortocircuitos cuando se desgasta el aislamiento plástico, y su peso resulta una complicación cuando se los emplea en aeronaves y similares (figura 6.11).



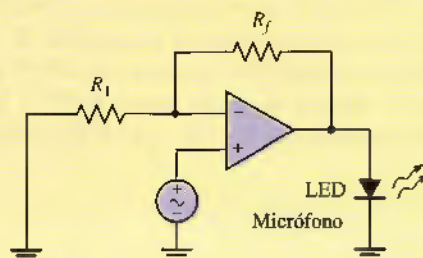
■ **FIGURA 6.11** El entorno donde se instalará la aplicación a menudo impone restricciones de diseño.
™ & © *Boeing. Usado bajo licencia.*

Una alternativa consiste en convertir la señal eléctrica del micrófono en una señal óptica, que se transmite a través de una fibra óptica delgada (~50 μm de diámetro). Luego se reconvierte en una señal eléctrica, la cual se amplifica y transfiere a un altavoz. En la figura 6.12 se presenta un esquema de un sistema de este tipo; se necesitan dos sistemas de éstos para realizar la comunicación de dos vías.



■ **FIGURA 6.12** Esquema con la mitad de un intercomunicador de fibra óptica simple.

Considerar la generación y la detección de la señal óptica por separado, puesto que los circuitos son en realidad eléctricamente independientes. La figura 6.13 muestra el circuito de generación de señales, que incluye un micrófono, un diodo emisor de luz (LED) y un circuito de amp op no inversor para accionar al LED; no se muestran en la figura las conexiones para la alimentación que se necesita para el amp op. La salida de luz del LED es casi proporcional a su corriente, aunque es menor para valores de corriente muy pequeños y muy grandes.



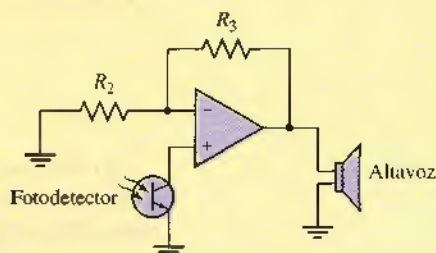
■ **FIGURA 6.13** Circuito que se utiliza para convertir la señal eléctrica del micrófono en una señal óptica.

Se sabe que la ganancia del amplificador está dada por

$$\frac{v_{\text{sal}}}{v_{\text{ent}}} = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

que es independiente de la resistencia equivalente del LED. Con la finalidad de seleccionar valores de R_f y R_1 es necesario saber la tensión de entrada del micrófono y la tensión de salida necesaria para activar el LED. Una medición simple indica que la salida de tensión máxima del micrófono es igual a 40 mV cuando alguien habla normalmente. El fabricante del LED recomienda operarlo a aproximadamente 1.6 V, por lo que se diseña para una ganancia de 1.6/0.04 = 40. Seleccionando de manera arbitraria $R_1 = 1$ kΩ lleva a un valor de 39 kΩ para R_f.

El circuito de la figura 6.14 es la parte de recepción del sistema de intercomunicación de una vía. Él convierte la señal óptica proveniente de la fibra en una señal eléctrica, amplificándola de tal forma que un sonido audible se emita por el altavoz.



■ **FIGURA 6.14** Circuito detector que se emplea para convertir la señal óptica en señal de audio.

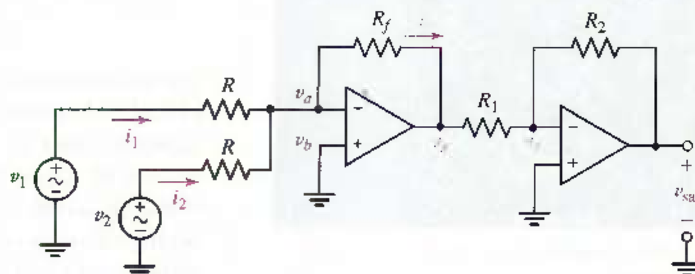
(Continúa en la siguiente página)

Después de acoplar la salida del LED con la fibra óptica, se mide una señal de casi 10 mV máximos en el fotodetector. El altavoz se especifica para un máximo de 100 mW, y tiene una resistencia equivalente de 8 Ω, lo que es igual a una tensión máxima de 894 mV, por lo que es necesario diseñar el amplificador de R_2 y R_3 para obtener una ganancia de $894/10 = 89.4$. Si se selecciona $R_2 = 10$ kΩ, se puede observar que un valor de 884 kΩ completa el diseño.

El circuito real funcionará en la práctica, aunque la salida sonará un poco distorsionada, puesto que el LED no es lineal. Los diseños mejorados son tema de textos más avanzados.

6.3 ETAPAS EN CASCADA

Si bien el amp op es un dispositivo en extremo flexible, hay numerosas aplicaciones en las que un amp op sencillo no basta. En tales casos, a menudo se cumple con los requisitos de la aplicación colocando en cascada varios amp op individuales al mismo tiempo en el mismo circuito. Un ejemplo de lo anterior se muestra en la figura 6.15, que consiste en el circuito amplificador sumador de la figura 6.9 con sólo dos fuentes de entrada y la salida alimentada en un amplificador inversor simple. El resultado es un circuito amp op de dos etapas.



■ **FIGURA 6.15** Circuito amp op de dos etapas compuesto por un amplificador sumador en cascada con un circuito de amplificador inversor.

Ya se analizó por separado cada uno de estos circuitos de amp op. Con base en la experiencia previa, si se desconectaran ambos circuitos amp op, se tendría:

$$v_x = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \qquad [7]$$

y

$$v_{sal} = -\frac{R_2}{R_1}v_x \qquad [8]$$

En realidad, puesto que los dos circuitos se encuentran conectados en un solo punto y la tensión v_x no depende de la conexión, se pueden combinar las ecuaciones [7] y [8] y obtener,

$$v_{sal} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \qquad [9]$$

la cual describe las características de entrada-salida del circuito que se muestra en la figura 6.15. Sin embargo, no siempre se podrá simplificar dicho circuito a etapas que sean familiares, por lo que vale la pena echar un vistazo a la forma en que el circuito de dos etapas de la figura 6.15 puede analizarse como un todo.

Cuando se analizan los circuitos en cascada, algunas veces resulta útil empezar con la última etapa y trabajar desde atrás hacia la etapa de entrada. Con referencia a la regla 1 del amp op ideal, la misma corriente fluye por R_1 y R_2. La forma de la ecuación nodal apropiada en el nodo marcado v_c es:

$$0 = \frac{v_c - v_x}{R_1} + \frac{v_c - v_{sal}}{R_2} \qquad [10]$$

Al aplicar la regla 2 del amp op ideal, se puede establecer $v_c = 0$ en la ecuación [10], lo que origina:

$$0 = \frac{v_x}{R_1} + \frac{v_{sal}}{R_2} \qquad [11]$$

Debido a que el objetivo es la expresión de v_{sal} en términos de v_1 y v_2, se procede hacia el primer amp op para obtener una expresión relativa de v_x en términos de las dos cantidades de entrada.

Al aplicar la regla 1 del amp op ideal en la entrada inversora del primer amp op, se tiene:

$$0 = \frac{v_a - v_x}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} \qquad [12]$$

La regla 2 del amp op ideal permite sustituir v_a en la ecuación [12] por cero, ya que $v_a = v_b = 0$. Por lo tanto, dicha ecuación se convierte en:

$$0 = \frac{v_x}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} \qquad [13]$$

Se tiene ahora una ecuación para v_{sal} en términos de v_x (ecuación [11]), y una ecuación para v_x en términos de v_1 y v_2 (ecuación [13]). Ambas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones [7] y [8], respectivamente, lo que quiere decir que la puesta en cascada de dos circuitos independientes, como el de la figura 6.15, no afecta la relación entrada-salida de cualquier etapa. Al combinar las ecuaciones [11] y [13] se puede observar que la relación entrada-salida del circuito amp op en cascada es:

$$v_{sal} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \qquad [14]$$

que es idéntica a la ecuación [9].

Por consiguiente, el circuito en cascada actúa como un amplificador sumador, pero sin una inversión de fase entre la entrada y la salida. Al elegir con cuidado los valores de la resistencia, se amplifica o atenúa la suma de las dos tensiones de entrada. Si se elige $R_2 = R_1$ y $R_f = R$, se obtiene también un circuito de amplificador donde $v_{sal} = v_1 + v_2$, si se desea.

EJEMPLO 6.3

Un sistema de combustible propelente gaseoso de múltiples tanques se instala en un pequeño vehículo orbital lunar. La cantidad de combustible de cualquiera de los tanques se supervisa a través de la medición de la presión en el tanque (en psia[2]). Los detalles técnicos sobre la capacidad del tanque así como de la presión y rango de tensión del sensor se proporcionan en la tabla 6.2. Diseñar un circuito que proporcione una señal de tensión de cd positiva que sea proporcional a la cantidad de combustible que quede, de modo que 1 V = 100.



© Corbis

TABLA 6.2 Información técnica del sistema de supervisión de la presión de tanques

Capacidad del tanque 1	10 000 psia
Capacidad del tanque 2	10 000 psia
Capacidad del tanque 3	2 000 psia
Intervalo de presión del sensor	0 a 12 500 psia
Tensión de salida del sensor	0 a 5 Vdc

A partir de la tabla 6.2 se puede observar que el sistema cuenta con tres tanques de gas independientes que requieren tres sensores diferentes. Cada sensor está diseñado para 12 500 psia, con una salida correspondiente de 5 V. Por ende, cuando el tanque 1 esté lleno, su sensor proporcionará una señal de tensión de5 $\times$ (10 000/12 500) = 4 V; lo mismo es válido para el sensor de supervisión del tanque 2. Sin embargo, el sensor conectado al tanque 3 sólo proporcionará una señal de tensión máxima de 5 $\times$ (2 000/12 500) = 800 mV.

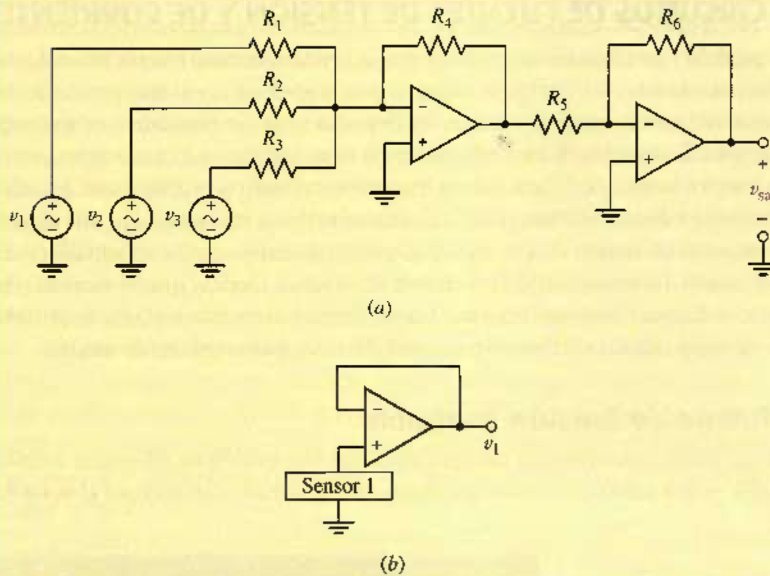
El circuito de la figura 6.16*a* muestra una posible solución, que emplea una etapa de amplificación de suma con v_1, v_2 y v_3 que representan las salidas de los sensores, seguida de un amplificador inversor para ajustar el signo y la magnitud de la tensión. En razón de que no se suministra la resistencia de salida del sensor, se emplea un dispositivo de almacenamiento para cada uno de ellos en la forma que se muestra en la figura 6.16*b*; el resultado es (en el caso ideal) que no existe flujo de corriente desde el sensor.

Para mantener el diseño lo más simple posible, se comienza fijando el valor de las resistencias R_1, R_2, R_3 y R_4 a 1 kΩ; cualquier valor funcionará siempre y cuando las cuatro resistencias sean iguales. Por lo tanto, la salida de la etapa sumadora es

$$v_x = -(v_1 + v_2 + v_3)$$

La etapa final del circuito invierte esta tensión y la transforma de tal manera que la tensión de salida es de 1 V cuando los tres tanques se encuentren llenos. Esta condición se presenta cuando $v_x = -(4 + 4 + 0.8) = -8.8$ V. Así, la etapa final necesita una relación de tensiones de $R_6/R_5 = 1/8.8$. Si se selecciona de manera arbitraria $R_6 = 1$ kΩ, se encuentra que un valor de 8.8 kΩ para R_5 satisface el diseño.

(2) Libras por pulgada cuadrada, absoluta. Ésta es una medición de presión diferencial relativa a una referencia que es el vacío.

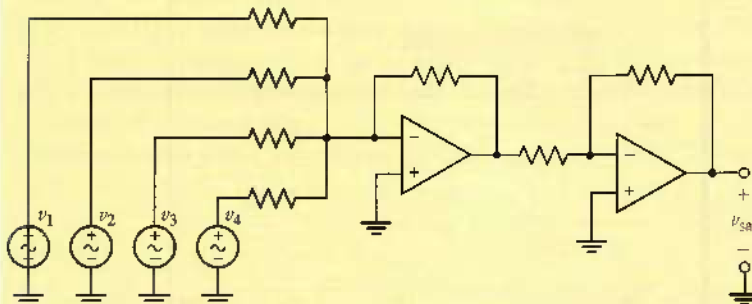


■ **FIGURA 6.16** (*a*) Circuito propuesto que ofrece una lectura del combustible restante total. (*b*) Diseño de un dispositivo de almacenamiento a fin de evitar errores asociados con la resistencia interna del sensor y las limitantes de su capacidad para proporcionar corriente. Uno de estos dispositivos de almacenamiento se utilizan en cada sensor, ofreciendo las salidas v_1, v_2 y v_3 a la etapa amplificadora de suma.

PRÁCTICA

6.3 Un puente con gran importancia histórica muestra signos de deterioro. Se ha decidido que, hasta que se pueda renovar, sólo podrán cruzarlo los vehículos que pesen menos de 1 600 kg. Para supervisar lo anterior, se diseña un sistema de pesado con cuatro capas de colchón. Hay cuatro señales de tensión independientes, una proveniente de cada colchón, donde1 mV = 1 kg. Diseñar un circuito que proporcione una señal de tensión positiva que se desplegará en un MD (multímetro digital) y que represente el peso total del vehículo, de tal forma que 1 mV = 1 kg. Se puede suponer que no es necesario almacenar las señales de tensión de los colchones.

Respuesta: Vea la figura 6.17.



■ **FIGURA 6.17** Una posible solución al problema de práctica 6.3: todas las resistencias son de 10 kΩ cada una (aunque cualquier valor estará bien siempre y cuando sean iguales). Las tensiones de entrada v_1, v_2, v_3 y v_4 representan las señales de tensión de los sensores de los colchones de las cuatro ruedas y v_{sal} es la señal de salida que se conectará a la terminal positiva de entrada del MD. Las cinco tensiones están referidas a tierra y la terminal común del MD deberá conectarse a tierra también.

6.4 CIRCUITOS DE FUENTES DE TENSIÓN Y DE CORRIENTE

En este capítulo y en capítulos anteriores se han utilizado a menudo fuentes de corriente y de tensión ideales, las cuales se supone que proporcionan el mismo valor de corriente o de tensión, respectivamente, sin importar cómo se encuentren conectadas en un circuito. El supuesto de esta independencia tiene sus límites, por supuesto, como se mencionó en la sección 5.2 cuando se estudiaron las fuentes prácticas que incluían una resistencia inherente o "integrada". El efecto de dicha resistencia era una reducción de la salida de tensión de una fuente de tensión a medida que se demandaba más corriente o una disminución de la corriente de salida a medida que se requería de más tensión de una fuente de corriente. Como se analizó en esta sección, es posible diseñar circuitos con características más confiables por medio del uso de amp op.

Una fuente de tensión confiable

Una de las formas más comunes para proporcionar una tensión de referencia estable y confiable es por medio del uso de un dispositivo no lineal conocido con el nombre

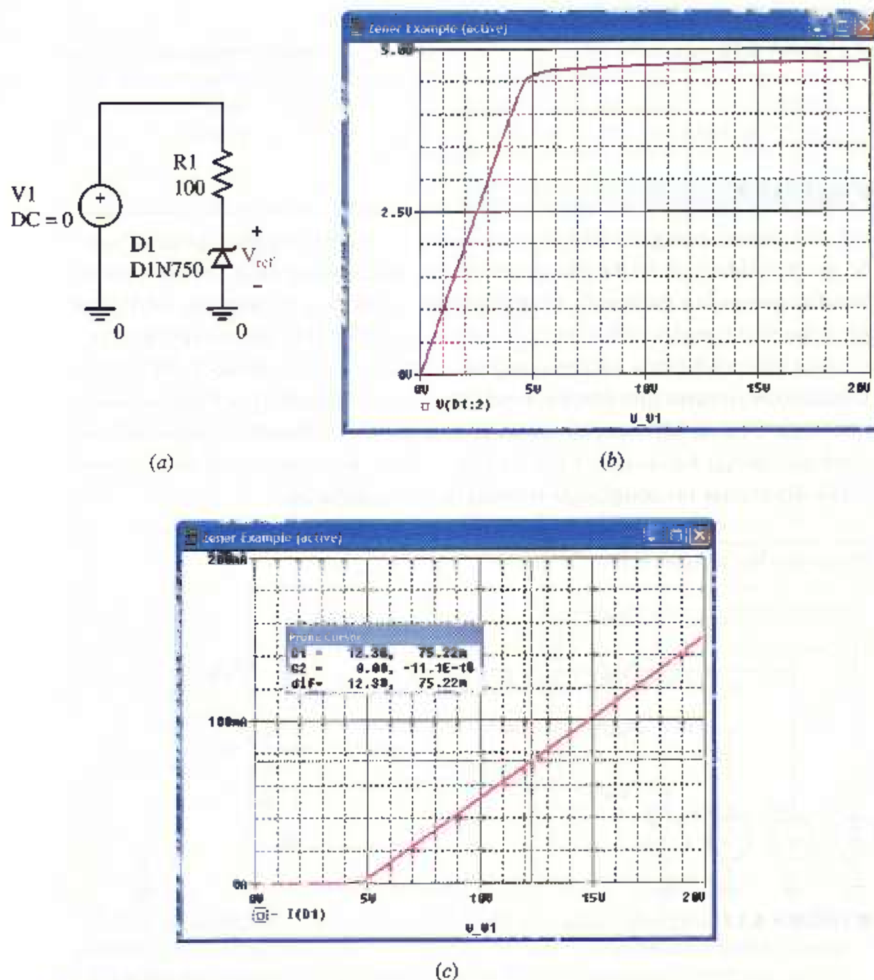


FIGURA 6.18 *a*) Esquema en PSpice de un circuito simple de tensión de referencia que se basa en el diodo Zener 1N750. *b*) Simulación del circuito que muestra la tensión del diodo V_{ref} en función de la tensión de control V1. *c*) Simulación de la corriente de un diodo, donde se muestra que su valor máximo se excede cuando el valor de V1 es más grande que 12.3 V. (Observar que el cálculo de este valor suponiendo un diodo Zener *ideal* da 12.2 V.)

de ***diodo Zener***. Su símbolo es un triángulo con una línea en forma de Z en la parte superior, como se muestra en el diodo 1N750 del circuito de la figura 6.18*a*.

A pesar de ser un elemento de dos terminales, el diodo Zener se comporta de manera muy diferente que una resistencia simple (lineal). En particular, mientras que una resistencia es un dispositivo simétrico, un diodo no lo es. Sus dos terminales están marcadas como ***ánodo*** (la parte plana del triángulo) y ***cátodo*** (el vertice del triángulo), y se logra un comportamiento muy diferente en función de la forma en que el diodo se inserta en el circuito. Un diodo *Zener* es un tipo especial de diodo que se diseñó para utilizarse con una tensión positiva en el cátodo con respecto al ánodo; cuando se conecta de esta forma, se dice que el diodo está *polarizado en inversa*. Con bajas tensiones, el diodo actúa como una resistencia con un pequeño incremento lineal en el flujo de corriente a medida que aumenta la tensión. Sin embargo, una vez que se alcanza una cierta tensión (V_{BR}), —conocida como *tensión de ruptura inversa* o ***tensión Zener*** del diodo— la tensión no aumenta en forma significativa, pero, en esencia, cualquier corriente puede circular hasta el valor máximo del diodo (75 mA en el caso del 1N750, cuya tensión Zener es de 4.7 V).

Considerar el resultado de la simulación de la figura 6.18*b*, el cual muestra la tensión V_{ref} en el diodo a medida que la fuente de tensión V1 se barre desde 0 hasta 20 V. Siempre y cuando V1 se mantenga arriba de 5 V, *la tensión en el diodo será constante*. Por ende, se podría sustituir V1 por una batería de 9 V, sin que importen los cambios en la tensión de referencia ya que la de la batería comenzará a disminuir a medida que se descargue. La función de R1 en este circuito es simplemente proporcionar la caída de tensión necesario entre la batería y el diodo; su valor debe seleccionarse para asegurar que el diodo se encuentra funcionando a su tensión Zener pero por debajo de su corriente máxima de diseño. Por ejemplo, la figura 6.18*c* muestra que el valor de 75 mA es excesivo en el circuito si la tensión V1 de la fuente es mucho mayor a 12 V. Por lo tanto, el valor de la resistencia R1 debe diseñarse para que corresponda con la tensión de fuente disponible, como se analizará en el ejemplo 6.4.

EJEMPLO 6.4

Diseñar un circuito con base en un diodo Zener 1N750 que funcione con una sola batería de 9 V y proporcionar una tensión de referencia de 4.7 V.

El diodo 1N750 tiene un valor de corriente máxima de 75 mA y una tensión Zener de 4.7 V. La tensión de una batería de 9 V puede variar ligeramente en función de su estado de carga, valor que se despreciará en este diseño.

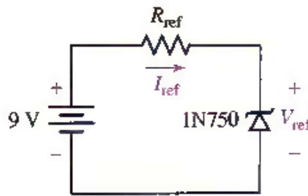
Un circuito simple como el que se muestra en la figura 6.19*a* es apropiado para el propósito de este ejemplo; el único problema es determinar el valor adecuado de la resistor R_{ref}.

Si en el diodo se cae una tensión de 4.7 V, entonces $9 - 4.7 = 4.3$ V deberán caerse en R_{ref}. Por ende,

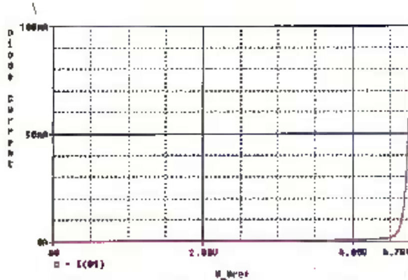
$$R_{ref} = \frac{9 - V_{ref}}{I_{ref}} = \frac{4.3}{I_{ref}}$$

Se determina el valor de R_{ref} especificando un valor de corriente. Se sabe que no se permite que el valor de I_{ref} exceda de 75 mA en este diodo y que corrientes más grandes descargarán la batería más rápido. Sin embargo, como se puede observar en la figura 6.19*b*, no se puede seleccionar simplemente I_{ref} de manera arbitraria; valores de corriente muy bajos no permitirán

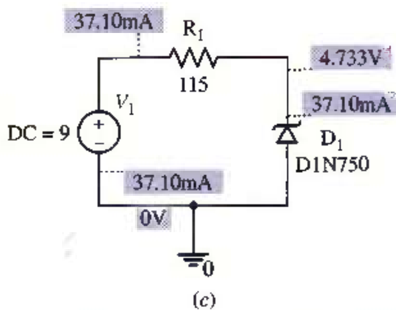
(Continúa en la siguiente página)



(*a*)



(*b*)



(*c*)

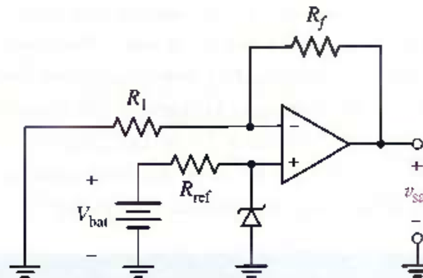
■ **FIGURA 6.19** (*a*) Circuito de referencia de tensión basado en el diodo Zener 1N750. (*b*) Relación *I-V* del diodo, (*c*) Simulación PSpice del diseño final.

que el diodo funcione en la región de ruptura del diodo Zener. En ausencia de una ecuación detallada que muestre la relación tensión-corriente del diodo (la cual es claramente no lineal), como regla general, se diseña para 50% de la corriente máxima. Por lo tanto,

$$R_{ref} = \frac{4.3}{0.0375} = 115\ \Omega$$

Se pueden obtener algunos "ajustes" llevando a cabo una simulación del circuito final con PSpice, aunque se puede observar en la figura 6.19*c* que en la primera corrida se logra un valor razonablemente cercano (dentro de 1%) al valor al que se intenta llegar.

El circuito básico para referencia de tensión con diodo Zener de la figura 6.18*a* funciona muy bien en muchas situaciones, pero limita de alguna manera el valor de la tensión dependiendo de qué diodos Zener se encuentren disponibles. Asimismo, a menudo se observa que el circuito que se muestra no es el más adecuado para aplicaciones que requieren más de unos cuantos miliamperios de corriente. En dichos casos, se puede utilizar el circuito de referencia Zener en conjunto con una simple etapa de amplificación, como se muestra en la figura 6.20. El resultado es una tensión estable que puede controlarse ajustando el valor de R_1 o R_f, sin tener que cambiar a un diodo Zener diferente.



■ **FIGURA 6.20** Fuente de tensión basada en amp op diseñada con una referencia de tensión Zener.

PRÁCTICA

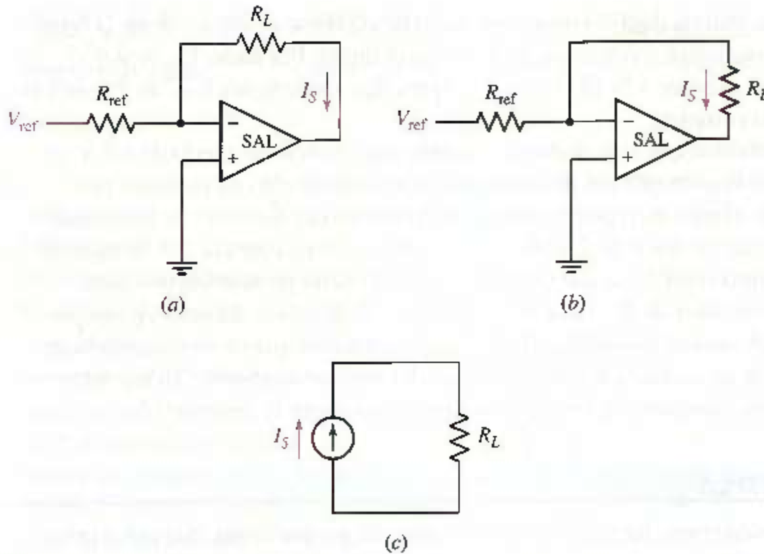
6.4 Diseñar un circuito que proporcione una tensión de referencia de 6 V utilizando un diodo Zener 1N750 y un amplificador no inversor.

Respuesta: Utilizando la topología de circuito que se muestra en la figura 6.20, seleccionar $V_{bat} = 9$ V, $R_{ref} = 115\ \Omega$, $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$, y $R_f = 268\ \Omega$.

Una fuente de corriente confiable

Considerar el circuito que se muestra en la figura 6.21*a*, donde V_{ref} lo proporciona una fuente de tensión regulada como la que se muestra en la figura 6.19*a*. El lector deberá reconocer este circuito como una simple configuración de amplificador inversor, suponiendo que se bloquea la pata de salida del amp op. Sin embargo, también es posible utilizar este circuito como fuente de corriente, donde R_L representa una carga resistiva.

La tensión de salida V_{ref} aparece en la resistencia de referencia R_{ref}, puesto que la entrada no inversora del amp op está conectada a tierra. Como no circula



■ **FIGURA 6.21** (*a*) Fuente de corriente basada en amp op, controlada por la tensión de referencia V_{ref}. (*b*) Circuito redibujado para resaltar la carga. (*c*) Modelo del circuito. La resistencia R_L representa el equivalente de Norton de un circuito con una carga pasiva desconocida.
Jung, Walter G.: IC OP-AMP COOKBOOK, 3a. edición, © 1986. Reimpreso con permiso de Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

corriente a través de la entrada inversora, la corriente que circula a través de la resistencia de carga R_L es, simplemente,

$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

En otras palabras, la corriente suministrada a R_L no depende de su resistencia, el atributo principal de una fuente ideal de corriente. También vale la pena mencionar que no se bloquea la tensión de salida del amp op como una cantidad de interés, sino que se puede ver a la resistencia de carga R_L como el equivalente de Norton (o de Thévenin) de algún circuito con una carga pasiva desconocida, que recibe potencia del circuito amp op. Si se redibuja el circuito ligeramente como se muestra en la figura 6.21*b*, se observa que tiene mucho en común con el circuito de la figura 6.21*c*. En otras palabras, se puede utilizar este circuito amp op como

EJEMPLO 6.5

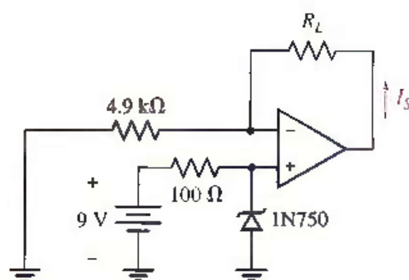
Diseñar una fuente de corriente que entregue 1 mA a una carga resistiva arbitraria.

Con base en el diseño de los circuitos de las figuras 6.20 y 6.21*a*, se sabe que la corriente a través de la carga R_L está dada por

$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

donde deben seleccionarse los valores de V_{ref} y R_{ref} y también diseñarse un circuito que proporcione V_{ref}. Si se utiliza el diodo Zener 1N750 en serie

(Continúa en la siguiente página)



■ **FIGURA 6.22** Posible diseño de la fuente de corriente que se desea. Observar el cambio en la dirección de la corriente en relación con la figura 6.21*b*.

con una batería de 9 V y una resistencia de 100 Ω se sabe a partir de la figura 6.18*b* que habrá una tensión de 4.9 V en el diodo. Por ende, $V_{ref} = 4.9$ V, dicta un valor de $4.9/10^{-3} = 4.9$ kΩ para R_{ref}. En la figura 6.22 se muestra el circuito completo.

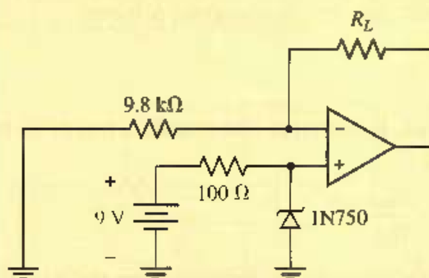
Obsérvese que si se hubiera supuesto una tensión del diodo de 4.7 V, el error en la corriente del diseño pudo haber sido de sólo un pequeño porcentaje, el cual bien podría haber estado dentro del intervalo de porcentaje de tolerancia típico de 5 a 10% de los valores de resistencia que se esperan.

El único problema que queda es si 1 mA puede proporcionarse para cualquier valor de R_L. Para el caso de $R_L = 0$, la salida del amp op será de 4.9 V, el cual es razonable. Sin embargo, a medida que se incrementa la resistencia de carga, la tensión de salida del amp op aumenta. Tarde o temprano se alcanzará algún límite, como se estudia en la sección 6.5.

PRÁCTICA

6.5 Diseñar una fuente de corriente capaz de proporcionar 500 μA a una carga resistiva

Respuesta: Vea la figura 6.23 donde se muestra una posible solución.

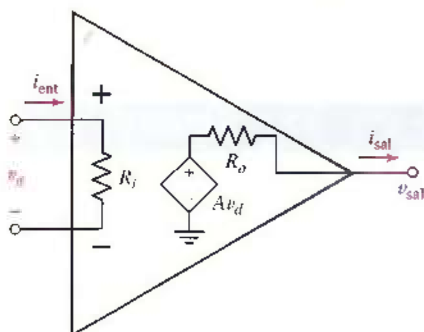


■ **FIGURA 6.23** Posible solución al problema de práctica 6.5.

una fuente de corriente independiente con características esencialmente ideales, hasta alcanzar la corriente de salida máxima del amp op que se seleccionó.

6.5 CONSIDERACIONES PRÁCTICAS

Un modelo más detallado del amp op



■ **FIGURA 6.24** Modelo más detallado del amp op.

Reducido a sus aspectos esenciales, el amp op se considera como una fuente de tensión dependiente controlada por tensión. La fuente de tensión dependiente proporciona la salida del amp op y la tensión de la cual depende se aplica a las terminales de entrada. Un esquema de un modelo razonable de un amp op práctico se muestra en la figura 6.24, en donde se incluye una fuente de tensión dependiente con ganancia de tensión A, una resistencia de salida R_s, y una resistencia de entrada R_e. La tabla 6.3 proporciona valores usuales de tales parámetros respecto de varios tipos de amp op disponibles comercialmente.

El parámetro *A* se conoce como la ***ganancia de tensión en lazo abierto*** del amp op, y por lo común se ubica en el intervalo de 10^5 a 10^6. Se puede observar que todos los amp op que se presentan en la tabla 6.3 tienen una ganancia de tensión en lazo abierto muy alta, en especial si se la compara con la ganancia de tensión de 11

TABLA 6.3 Valores de parámetros característicos de varios amp op diferentes

Número de parte	μA741	LM324	LF411	AD549K	OPA690
Descripción	Uso general	Quad (cuatro dispositivos de baja potencia)	Entrada JFET de bajo arrastre, compensación baja	Corriente de polarización de entrada ultrabaja	amp op de frecuencia de video de banda ancha
Ganancia en lazo abierto A	2×10^5 V/V	10^5 V/V	2×10^5 V/V	10^6 V/V	2800 V/V
Resistencia de entrada	2 MΩ	*	1 TΩ	10 TΩ	190 kΩ
Resistencia de salida	75 Ω	*	~1 Ω	~15 Ω	*
Corriente de polarización de entrada	80 nA	45 nA	50 pA	75 fA	3 μA
Tensión de compensación de entrada	1.0 mV	2.0 mV	0.8 mV	0.150 mV	±1.0 mV
Razón de rechazo en modo común (CMRR)	90 dB	85 dB	100 dB	100 dB	65 dB
Velocidad de término	0.5 V/μs	*	15 V/μs	3 V/μs	1800 V/μs
Modelo PSpice	✓	✓	✓		

* No proporcionado por el fabricante.

✓ Indica que un modelo PSpice se incluye en la versión 10.0 de Orcad Capture CIS.

que caracterizó al circuito amplificador no inversor del ejemplo 6.1. Resulta importante recordar la distinción entre ganancia de tensión en lazo abierto del amp op mismo y la ***ganancia de tensión en lazo cerrado*** que caracteriza a un circuito de amp op particular. En este caso, el "lazo" se refiere a una trayectoria *externa* entre la patilla (terminal) de salida y la patilla (terminal) de entrada inversora; puede ser un alambre, una resistencia u otro tipo de elemento, dependiendo de la aplicación.

El μA741 es un amp op muy común, producido originalmente por Fairchild Corporation en 1968. Se caracteriza por una ganancia de tensión en lazo abierto de 200 000, una resistencia de entrada de 2 MΩ y una de salida de 75 Ω. Para evaluar en qué medida se aproxima el modelo del amp op ideal al comportamiento de este dispositivo particular, se volverá a revisar el circuito amplificador inversor de la figura 6.3.

EJEMPLO 6.6

Utilizar los valores apropiados del amp op μA741 del modelo de la figura 6.24 y analizar nuevamente el circuito amplificador inversor de la figura 6.3.

Se comienza sustituyendo el símbolo del amp op ideal de la figura 6.3 por el modelo detallado, lo que da lugar al circuito de la figura 6.25.

Observar que ya no se puede recurrir a las reglas del amp op ideal, puesto que no se está utilizando el modelo de amp op ideal. Por lo tanto, se pueden escribir dos ecuaciones nodales:



$$0 = \frac{-v_d - v_{\text{ent}}}{R_1} + \frac{-v_d - v_{\text{sal}}}{R_f} + \frac{-v_d}{R_i}$$

$$0 = \frac{v_{\text{sal}} + v_d}{R_f} + \frac{v_{\text{sal}} - Av_d}{R_o}$$

Al efectuar operaciones algebraicas directas pero largas, se elimina v_d y se combinan las ecuaciones para obtener la siguiente expresión correspondiente

(Continúa en la siguiente página)

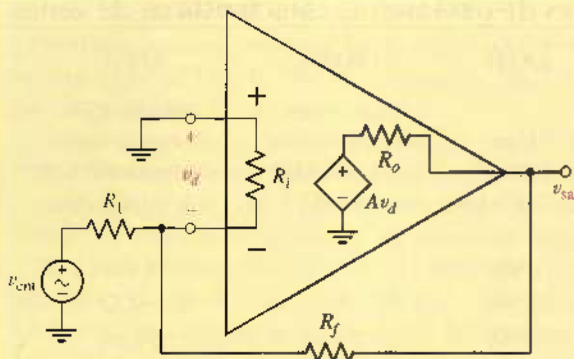


FIGURA 6.25 Circuito de amplificador inversor dibujado con el modelo de amp op detallado.

a v_{sal} en términos de v_{ent}:

$$v_{sal} = \left[\frac{(R_o + R_f)}{R_o - AR_f}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_i}\right) - \frac{1}{R_f}\right]^{-1} \frac{v_{ent}}{R_1} \qquad [15]$$

Al sustituir $v_{ent} = 5\,\text{sen}3t$ mV, $R_1 = 4.7$ kΩ, $R_f = 47$ kΩ, $R_o = 75$ Ω, $R_i = 2$ MΩ, y $A = 2 \times 10^5$, se obtiene:

$$v_{sal} = -9.999448 v_{ent} = -49.99724\,\text{sen}3t \quad \text{mV}$$

Luego de comparar ésta con la expresión que se encontró suponiendo un amp op ideal ($v_{sal} = - +10v_{ent} = -$ 50 sen 3t mV), se observa que éste resulta en realidad un modelo razonablemente preciso. Además, el supuesto de un amp op ideal disminuye de manera considerable el nivel de álgebra requerido para efectuar el análisis de circuito. Observar que si se deja que $A \to \infty$, $R_o \to 0$, y $R_i \to \infty$, la ecuación [15] se reduce a

$$v_{sal} = -\frac{R_f}{R_1} v_{ent}$$

que es la ecuación que se obtuvo antes del amplificador inversor cuando se supuso un amp op ideal.

PRÁCTICA

6.6 Suponiendo una ganancia finita (A), en lazo abierto, una resistencia de entrada finita (R_i) y una resistencia de salida cero (R_o), obtenga una expresión de v_{sal} en términos de v_{ent} del circuito de amp op de la figura 6.3.

Respuesta: $v_{sal}/v_{ent} = -AR_fR_i/[(1 + A)R_1R_i + R_1R_f + R_fR_i]$.

Deducción de las reglas del amp op ideal

Se ha visto que el amp op ideal es un modelo muy exacto del comportamiento de dispositivos prácticos. Sin embargo, si se utiliza el modelo más detallado que incluye una ganancia finita en lazo abierto, una resistencia de entrada finita y una resistencia de salida distinta de cero, en realidad se obtienen de manera directa las dos reglas de amp op ideal.

Con referencia a la figura 6.24, se puede observar que la tensión de salida del circuito abierto de un amp op práctico se expresa como:

$$v_{sal} = A\,vd \qquad [16]$$

Al reordenar la ecuación, se puede ver que v_d, denominada algunas veces como ***tensión de entrada diferencial***, se escribe como:

$$v_d = \frac{v_{sal}}{A} \qquad [17]$$

Como se podría esperar, hay límites prácticos para la tensión de salida v_{sal} que se obtiene de un amp op real. Según se describe en la sección siguiente, es necesario conectar el amp op a suministros de tensión cd externos para alimentar potencia a la circuitería interna. Tales alimentaciones de tensión externas representan el valor máximo de v_{sal} y se ubican por lo común en el intervalo de 5 a 24 V. Si dividimos 24 V por la ganancia en lazo abierto del μA741 (2×10^5), se obtiene $v_d = 120\ \mu$V. Aunque no es igual a cero volts, un valor tan pequeño comparado con la tensión de salida de 24 V es *prácticamente* cero. Un amp op ideal tendría ganancia infinita en lazo abierto, lo que originaría $v_d = 0$ independientemente de v_{sal}; lo anterior remite a la regla 2 del amp op ideal.

La regla 1 del amp op ideal establece que "*ninguna corriente fluye hacia cualquier terminal de entrada*". De acuerdo con la figura 6.23, la corriente de entrada de un amp op es simplemente:

$$i_{ent} = \frac{v_d}{R_i}$$

Se acaba de ver que v_d suele ser una tensión muy pequeña. Como se observa en la tabla 6.3, la resistencia de entrada de un amp op característico es muy grande, ¡pues varía de los megaohms a los teraohms! Mediante el valor de $v_d = 120\ \mu$V anterior y $R_i = 2$ MΩ, se calcula una corriente de entrada de 60 pA es una corriente en extremo pequeña y para medirla se requeriría de un amperímetro especializado (conocido como picoamperímetro). En la tabla 6.3, la corriente de entrada característica (denominada con mayor precisión ***corriente de polarización de entrada***) de un μA741 es sólo de 80 nA. Comparada con las otras corrientes que fluyen en un circuito de amp op común, el valor es esencialmente cero. Los amp op más modernos (como el AD549) tienen incluso corrientes de polarización de entrada inferiores. Por lo tanto, se concluye que la regla 1 del amp op ideal es un supuesto bastante razonable.

Con esta explicación, queda claro que un amp op ideal tiene una ganancia de tensión en lazo abierto infinita y una resistencia de entrada infinita. Sin embargo, no se ha considerado aún la resistencia de salida del amp op y sus posibles efectos en nuestro circuito. Con referencia a la figura 6.24, se ve que:

$$v_{sal} = Av_d - R_o i_{sal}$$

donde i_{sal} circula desde la pata de entrada del amp op. De tal modo, un valor de R_o distinto de cero actúa para reducir la tensión de salida, un efecto que se vuelve más pronunciado cuando aumenta la corriente de salida. Por esta razón, un amp op *ideal* tiene una resistencia de salida de cero ohms. El μA741 tiene una resistencia de salida máxima de 75 Ω, y los dispositivos más modernos, como el AD549 y el AD515A, tienen incluso una resistencia de salida inferior.

Rechazo en modo común

El amp op a veces se conoce como *amplificador diferencial*, debido a que la salida es proporcional a la diferencia de tensión entre las dos terminales de entrada. Ello significa que si se aplican tensiones idénticas en ambas terminales de en-

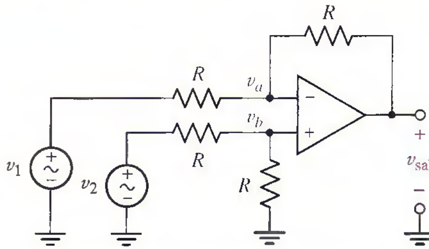


FIGURA 6.26 Amp op conectado con un amplificador diferencial.

trada, se puede esperar que la tensión de salida sea cero. Esta capacidad de un amp op es una de sus cualidades más atractivas y se conoce como ***rechazo en modo común***. El circuito de la figura 6.26 se conecta para proporcionar una tensión de salida

$$v_{sal} = v_2 - v_1$$

Si $v_1 = 2 + 3\,\text{sen}\,3t$ volts y $v_2 = 2$ volts, se debe esperar que la salida fuera -3 sen $3t$ volts; la componente de 2 V común a v_1 y v_2 no se amplificaría ni aparecería en la salida.

En amp op prácticos, se encuentra que, en realidad, una pequeña contribución a la salida es respuesta a las señales en modo común. Con el fin de comparar un tipo de amp op con otro, a menudo es útil expresar la capacidad de un amp op para rechazar señales en modo común a través de un parámetro conocido como razón de rechazo en modo común, o **CMRR**. Cuando se define $v_{o_{CM}}$ como la salida que se obtiene cuando ambas entradas son iguales ($v_1 = v_2 = v_{CM}$), se puede determinar A_{CM}, la ganancia en modo común del amp op,

$$A_{CM} = \left| \frac{v_{o_{CM}}}{v_{CM}} \right|$$

A continuación se define el CMRR en términos del cociente de la ganancia en modo diferencial A y la ganancia en modo común A_{CM}, o

$$\text{CMRR} \equiv \left| \frac{A}{A_{CM}} \right| \qquad [18]$$

aunque a menudo se expresa en decibeles (dB), que es una escala logarítmica:

$$\text{CMRR}_{(\text{dB})} \equiv 20 \log_{10} \left| \frac{A}{A_{CM}} \right| \text{dB} \qquad [19]$$

En la tabla 6.3 se proporcionan valores típicos de algunos amp op; un valor de 100 dB corresponde a una relación absoluta de 10^5 de A y A_{CM}.

Retroalimentación negativa

Se ha visto que la ganancia en lazo abierto de un amp op es muy grande e idealmente infinita. Sin embargo, en situaciones prácticas su valor exacto varía respecto del valor que el fabricante especifica como característico. Es posible, por ejemplo, que la temperatura tenga varios efectos importantes en el desempeño de un amp op, de modo que el comportamiento de operación a $-20°$C quizá sea muy diferente del observado en un caluroso día soleado. Además, hay pequeñas variaciones características entre dispositivos fabricados en diferentes momentos. Si se diseña un circuito en el que la tensión de salida sea la ganancia en lazo abierto multiplicada por la tensión en una de las terminales de entrada, la tensión de salida sería difícil de predecir con un razonable grado de precisión, por lo que podría esperarse que cambiara en función de la temperatura ambiente.

Una solución a tales problemas potenciales consiste en emplear la técnica de ***retroalimentación negativa***, que es el proceso de sustraer una pequeña fracción de la salida y añadirla a la entrada. Si algún suceso cambia las características del circuito de modo que la salida intente aumentar, simultáneamente la entrada se reduce. Una gran cantidad de retroalimentación negativa evitará toda amplificación útil, aunque una cantidad pequeña proporciona estabilidad. Un ejemplo de retroalimentación negativa es la desagradable sensación que se experimenta cuando se pone una mano cerca de una flama. Mientras más se la acerque, más

grande es la señal negativa que se envía desde la mano. Sin embargo, si se exagera la proporción de retroalimentación negativa, se ocasionaría el rechazo del calor y, a la larga, la muerte por congelamiento. La ***retroalimentación positiva*** es el proceso donde determinada fracción de la señal de salida se suma de nuevo a la entrada. Un ejemplo común es cuando un micrófono se dirige hacia un altoparlante: rápidamente, un sonido muy suave se amplifica cada vez más, hasta que el sistema "chilla". Por lo general, la retroalimentación positiva conduce a un sistema inestable.

Todos los circuitos que se estudian en este capítulo incorporan una retroalimentación negativa a través de la presencia de una resistencia entre la patilla (terminal) de salida y la entrada inversora. El lazo resultante entre la salida y la entrada reduce la dependencia de la tensión de salida respecto del valor real de la ganancia en lazo abierto (como en el ejemplo 6.6). Ello elimina la necesidad de medir la ganancia precisa en lazo abierto de cada amp op que se usa, pues pequeñas variaciones de A no afectarán de manera significativa la operación del circuito. Además, la retroalimentación negativa proporciona una mayor estabilidad en situaciones donde A es sensible en los alrededores de los amp op. Por ejemplo, si A aumenta en forma repentina como respuesta a un cambio en la temperatura del ambiente, se agrega una tensión de retroalimentación mayor a la entrada inversora, lo cual reduce la tensión de entrada diferencial v_d; por lo tanto, el cambio en la tensión de salida Av_d es más pequeño. Se debe notar que la ganancia de circuito en lazo cerrado siempre es menor que la ganancia del dispositivo en lazo abierto. Es el precio que se paga por la estabilidad y la reducción de la sensibilidad ante los cambios en los parámetros.

Saturación

Hasta ahora, se ha considerado el amp op como un dispositivo puramente lineal, bajo el supuesto de que sus características son independientes de la manera en la que se conecta en un circuito. En realidad, se requiere suministrar potencia a un amp op para accionar la circuitería interna, como se muestra en la figura 6.27. Un suministro positivo, por lo común en el intervalo de 5 a 24 V cd, se conecta a la terminal marcada como V^+, a la vez que un suministro negativo de igual magnitud se conecta a la terminal señalada como V^-. En un número limitado de aplicaciones resulta aceptable un suministro de tensión sencillo, así como situaciones en las que las dos magnitudes de tensión tal vez sean desiguales. El fabricante de amp op casi siempre especificará una tensión del suministro máximo de potencia, más allá del cual ocurrirán daños en los transistores internos.

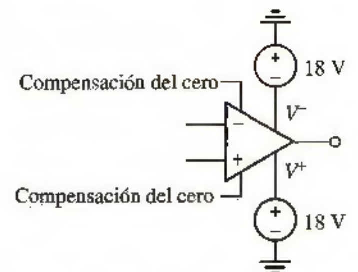


FIGURA 6.27 Amp op con suministros conectados de tensión positiva y negativa. Se utilizan como ejemplo dos suministros de 18 V; observar la polaridad de cada fuente.

Las tensiones del suministro de potencia son una elección crítica cuando se diseña un circuito de amp op, debido a que representan la tensión de salida máxima posible del mismo amp.[3] Por ejemplo, considerar el circuito de amp op que se muestra en la figura 6.26, ahora conectado como un amplificador no inversor con una ganancia de tensión de 10. Como se muestra en la simulación con PSpice de la figura 6.28, se observa un comportamiento lineal en el amp op, pero sólo en el rango de ±1.71 V de la tensión de entrada. Fuera de este rango, la tensión de salida ya no es proporcional a la entrada, y alcanza su magnitud pico de 17.6 V. Este efecto no lineal se conoce con el nombre de ***saturación***, el cual se refiere al hecho de que cualquier incremento adicional en la tensión de entrada no proporciona un cambio en la tensión de salida. Este fenómeno se refiere al hecho de que la salida de un amp op real no puede exceder sus tensiones de suministro. Por ejemplo, si se opta por que el amp op funcione con un

(3) En la práctica, se encuentra una tensión de salida máxima un poco menor que la tensión de suministro de un volt, más o menos.

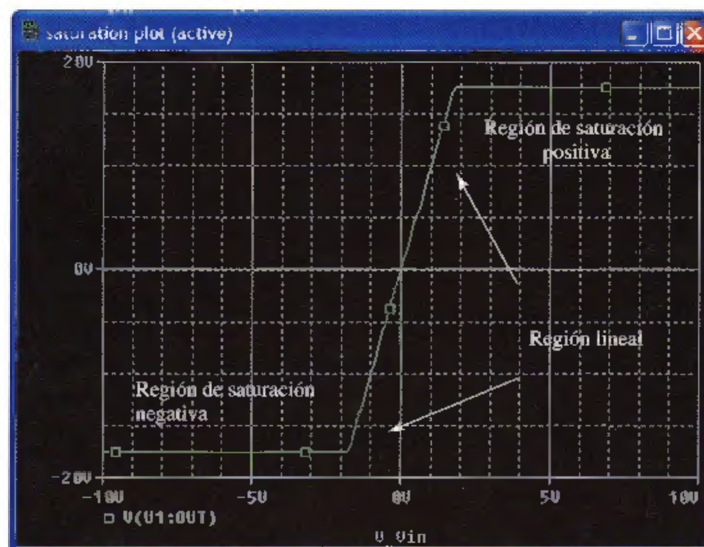


FIGURA 6.28 Características de entrada-salida de un μA741 conectado como amplificador no inversor con una ganancia de 10 y alimentado por fuentes de ±18 V.

suministro de +9 V y con uno de −5 V entonces la tensión de salida estará limitada al intervalo de −5 a +9 V. La salida de un amp op es una respuesta lineal limitada acotada por las regiones de saturación positiva y negativa, por lo que, como regla general, los circuitos de amp op se diseñan de manera que no entren en forma accidental en la región de saturación. Ello requiere elegir con cuidado la tensión de operación, con base en la ganancia en lazo cerrado y la tensión de entrada esperada máxima.

Tensión de compensación de entrada

Según ha comenzado a descubrirse, hay varios aspectos prácticos que se debe considerar cuando se trabaja con los amp op. Una situación no ideal particular que vale la pena mencionar es la tendencia de los amp op reales a tener una salida distinta de cero, incluso cuando las dos terminales de entrada se ponen simultáneamente en corto. El valor de la salida bajo tales condiciones se conoce como tensión de compensación, mientras que la tensión de entrada requerida para reducir la salida hasta cero recibe el nombre de ***tensión de compensación de entrada***. En la tabla 6.3 se puede observar que los valores característicos de la tensión de compensación de entrada son del orden de unos cuantos milivolts o menos.

La mayoría de los amp op incluyen dos patillas marcadas como "compensación del cero" o "balance", las cuales se utilizan para ajustar la tensión de salida conectándolas a una resistencia variable, que es un dispositivo de tres terminales empleado con frecuencia en aplicaciones como los controles de volumen de las radios. El dispositivo incluye una perilla que se gira para seleccionar el valor real de resistencia y tiene tres terminales. Si la resistencia variable se conecta utilizando sólo las dos terminales de los extremos, su resistencia se fija sin que importe la posición de la perilla. El uso de la terminal media y de una de las terminales de los extremos lo convierten en una resistencia cuyo valor depende de la posición de la perilla. La figura 6.29 muestra el circuito característico mediante el cual se ajusta la tensión de salida de un amp op; la hoja de datos del fabricante quizá sugiera una circuitería alternativa para un dispositivo particular.

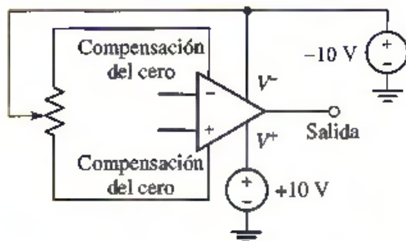
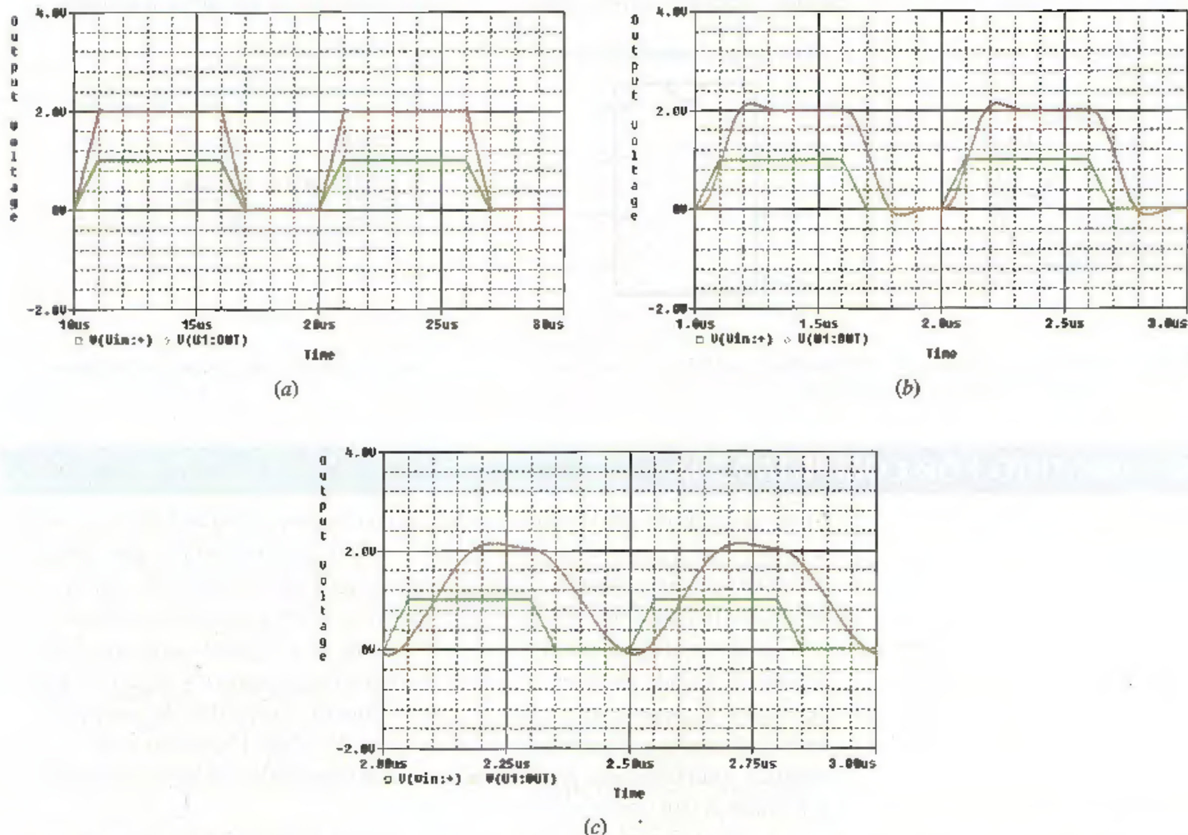


FIGURA 6.29 Circuitería externa sugerida para obtener una tensión de salida cero. Los suministros de ±10 V V se dan como un ejemplo; las tensiones de suministro reales utilizadas en el circuito final se deben elegir en la práctica.

Velocidad de decaimiento

Hasta el momento, se ha supuesto tácitamente que el amp op responderá de la misma forma a las señales de cualquier frecuencia, aunque quizás no sería sorpresivo saber que en la práctica existe una limitación a este respecto. Puesto que se conoce que los circuitos con amp op funcionan bien en cd, lo cual es, en esencia, una frecuencia igual a cero, lo que se debe considerar es el desempeño a medida que la frecuencia de la señal *aumenta*. Una medida del desempeño en frecuencia de un amp op es su ***velocidad de decaimiento***, la cual es la velocidad a la que la tensión de salida puede responder a los cambios de la entrada; a menudo se expresa como V/μs. La especificación de la velocidad de decaimiento típico de algunos dispositivos disponibles en el mercado se proporciona en la tabla 6.3, la cual muestra los valores del orden de algunos volts por microsegundo. Una excepción importante es el OPA690, que está diseñado como un amp op de alta velocidad para aplicaciones de video que requieren operar a varios cientos de MHz. Como puede observarse, una respetable velocidad de decaimiento de 1 800 V/μs no es nada raro en este dispositivo, aunque sus demás parámetros se ven afectados como consecuencia de esta característica, especialmente la corriente de polarización de entrada y el CMRR.

Las simulaciones con PSpice que se muestran en la figura 6.30 ilustran la degradación del desempeño de una amp op debido a las limitaciones de la velocidad de decaimiento. El circuito simulado es un LF411 configurado como amplificador no inversor con una ganancia de 2 y alimentado por fuentes de $\pm$15 V.



■ **FIGURA 6.30** Simulación del desempeño de un amp op LF411 conectado como amplificador no inversor con una ganancia de 2, alimentación de $\pm$15 V y forma de onda pulsada de entrada. (*a*) Tiempos de subida y bajada = 1 μs, ancho de pulso = 5 μs; (*b*) tiempos de subida y bajada = 100 ns, ancho de pulso = 500 ns; (*c*) tiempos de subida y bajada = 50 ns, ancho de pulso = 250 ns.

La forma de onda de entrada, que se muestra en verde, tiene una tensión pico de 1 V; la tensión de salida se muestra con rojo. La simulación de la figura 6.30*a* corresponde a un tiempo de subida y de bajada de 1 μs, el cual a pesar de que es un tiempo muy corto para los seres humanos, es fácilmente alcanzable por el **LF411**. A medida que los tiempos de subida y bajada disminuyen por un factor de 10 a 100 ns (figura 6.30*b*), se comienza a ver que el LF411 experimenta algunas dificultades para seguir la entrada. En el caso de un tiempo de subida y bajada de 50 ns (figura 6.30*c*), se puede observar que no sólo existe un retraso significativo entre la salida y la entrada, sino que la forma de onda se distorsiona de manera considerable, lo cual no es una buena característica en un amplificador. Este comportamiento observado es congruente con la típica velocidad de decaimiento de 15 V/μs que se especifica en la tabla 6.3, la cual muestra que es posible que se espere que la salida requiera de 130 ns aproximadamente para cambiar de 0 a 2 V (o 2 V a 0 V).

Encapsulamiento

Los amp op modernos se presentan en varios tipos diferentes de encapsulamientos. Algunos estilos son más apropiados para altas temperaturas, por lo que hay una variedad de formas diferentes para montar los CI en los tableros de circuito impreso. La figura 6.31 muestra varios tipos diferentes del LM741 fabricados por National Semiconductor. El término "NC" junto a una patilla significa "no connection". Los estilos de encapsulamiento exhibidos en la figura son configuraciones estándar que se utilizan en un gran número de circuitos integrados diferentes; en ocasiones hay más patillas (terminales) disponibles en un encapsulamiento de las que se requieren.



■ **FIGURA 6.31** Varios estilos de encapsulamiento diferente del amp op LM741. (*a*) Envase metálico; (*b*) encapsulamiento doble en línea; (*c*) empaque plano cerámico. (*© 2000 National Semiconductor Corporation/www.national.com*).

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

Como se acaba de ver, PSpice puede ser de una enorme ayuda en la predicción de la salida de un circuito amp op, especialmente en el caso de entradas que varían con el tiempo. Sin embargo, se podrá observar que el modelo ideal de amp op concuerda bastante bien con las simulaciones con PSpice como regla general.

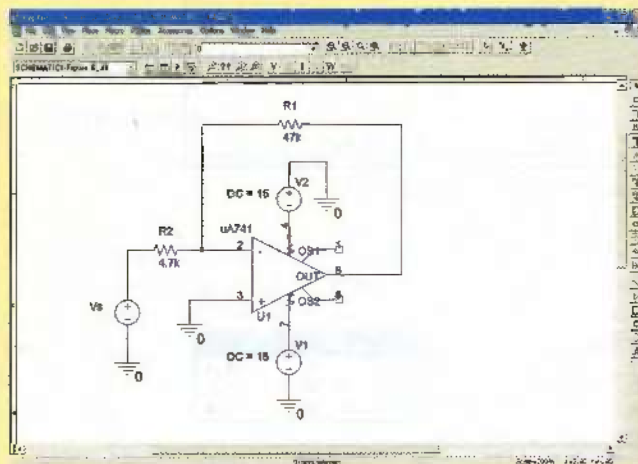
Cuando se efectúa una simulación PSpice de un circuito de amp ops, debe tenerse el cuidado de recordar que los suministros cd positivo y negativo deben conectarse al dispositivo. Si bien el modelo muestra las patillas de compensación utilizadas para poner en cero la tensión de salida, PSpice no hace ninguna compensación, por lo que las patillas (terminales) se dejan casi siempre flotando (sin conectar).

La tabla 6.3 presenta los diferentes números de serie de los amp op disponibles en la versión de evaluación de PSpice; otros modelos se obtienen en la versión comercial del programa y de otros fabricantes.

EJEMPLO 6.7

Simular el circuito de la figura 6.3 mediante PSpice. Determinar el o los puntos en los que empieza la saturación si se utilizan suministros de ±15 V cd para alimentar el dispositivo. Comparar la ganancia calculada por PSpice con la que se pronosticó con el modelo de amp op ideal.

Para empezar, es necesario dibujar el circuito de amplificador inversor de la figura 6.3 mediante la herramienta de captura de diagramas, que se muestra en la figura 6.32. Observar que se requieren dos suministros separados de 15 V de cd para accionar el amp op.



■ **FIGURA 6.32** El amplificador inversor de la figura 6.3 se dibujó utilizando un amp op μA741.

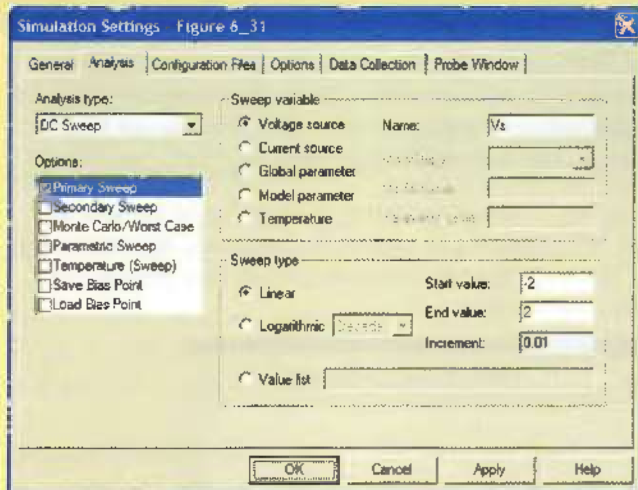
En el análisis previo, un modelo de amp op ideal predijo una ganancia de −10. Con una entrada de 5 sen 3*t* mV, lo cual provoca una tensión de salida de −50 sen 3*t* mV. Sin embargo, hubo un supuesto implícito en el análisis respecto de que *cualquier* entrada de tensión se amplificaría por un factor de −10. Con base en consideraciones prácticas, se espera que sea cierto para tensiones de entrada *pequeñas* aunque, a la larga, la salida se saturará hasta un valor comparable a la correspondiente tensión del suministro de potencia.

Se llevó a cabo un barrido de cd de −2 a +2 volts, como se muestra en la figura 6.33; éste es un rango ligeramente mayor que la tensión de alimentación dividida entre la ganancia, por lo que se espera que los resultados incluyan las regiones de saturación positivas y negativas.

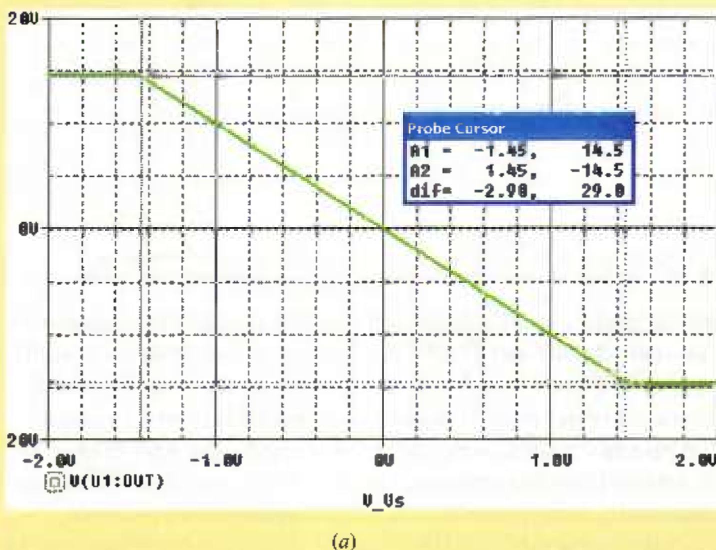
Como se puede observar, si se utiliza el cursor en los resultados de la simulación que se muestran en la figura 6.34*a* (ampliados en la figura 6.34*b* para mayor claridad), la característica de entrada-salida de un amplificador es en realidad lineal a lo largo de un intervalo amplio de entrada, que corresponde aproximadamente a −1.45 < Vs < +1.45 V. Este intervalo es un poco menor que el que se define al dividir las tensiones positiva y negativa de suministro entre la ganancia. Fuera de dicho intervalo, la salida del amp op se satura, con sólo una ligera dependencia de la tensión de la entrada. De esta forma, en las dos regiones de saturación, el circuito no se comporta como un amplificador lineal.

Al aumentar el número de dígitos del cursor (**Tools, Options, Number of Cursor Digits**) hasta 10, encontramos que la tensión de entrada es de

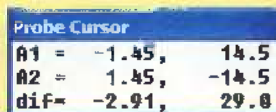
(Continúa en la siguiente página)



■ **FIGURA 6.33** Ventana de configuración del barrido de DC.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 6.34** (*a*) Tensión de salida del circuito amplificador no inversor, con el comienzo de la saturación señalado con el cursor. (*b*) Acercamiento de la ventana del cursor.

Vs = 1.0V, la tensión de salida es −9.99548340, ligeramente menor que el valor de −10 predicho a partir del modelo del amp op ideal, y un poco diferente del valor −9.999448 que se obtuvo en el ejemplo 6.6 mediante el modelo analítico. No obstante, los resultados predichos por el modelo μA741 de PSpice están dentro de unos cuantos centésimos de porcentaje de cualquier modelo analítico, lo que demuestra que el modelo de amp op ideal

es en realidad una aproximación muy precisa para los modernos circuitos integrados de amplificador operacional.

PRÁCTICA

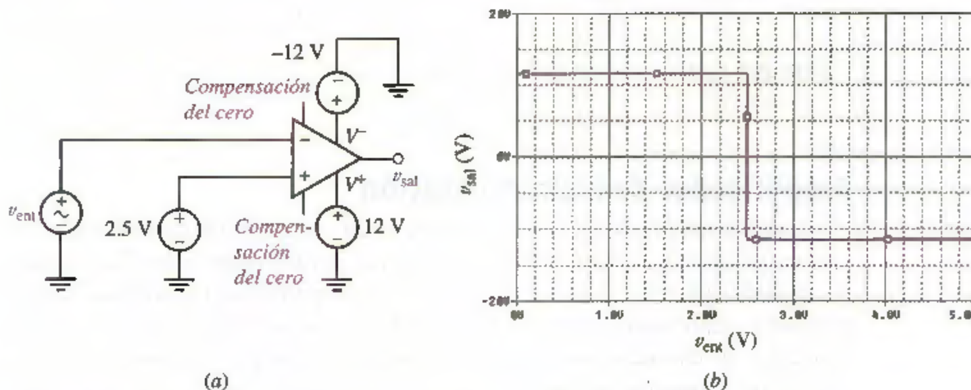
6.7 Simular los restantes circuitos de amp op que se describieron en este capítulo y comparar los resultados con los predichos por el modelo ideal del amp op.

6.6 LOS COMPARADORES Y EL AMPLIFICADOR DE INSTRUMENTACIÓN

El comparador

Cada circuito amp op que se ha estudiado hasta ahora ha incluido una conexión eléctrica entre la pata de salida y la pata de entrada inversora, a la cual se le conoce como operación de *lazo cerrado* y se utiliza para proporcionar retroalimentación negativa como se mencionó con anterioridad. La operación de lazo cerrado es el método preferido para utilizar un amp op como amplificador, ya que sirve para aislar el desempeño del circuito de las variaciones en la ganancia de lazo abierto que surgen a partir de las variaciones de temperatura o de defectos de fabricación. Sin embargo, existe un gran número de aplicaciones donde representa una ventaja la utilización del amp op con una configuración de *lazo abierto*. Los dispositivos diseñados para utilizarse en dichas aplicaciones a menudo se conocen como ***comparadores***, ya que están diseñados en forma ligeramente distinta de los amp op normales a fin de mejorar su velocidad cuando trabajan en lazo abierto.

La figura 6.35*a* muestra un simple circuito comparador donde una tensión de referencia de 2.5 V está conectada a la entrada no inversora y la tensión a comparar (v_{ent}) está conectada a la entrada inversora. En razón de que el amp op tiene una ganancia de lazo abierto A muy grande (típicamente 10^5 o mayor, como se puede observar en la tabla 6.3), no es necesario una diferencia de tensión muy grande entre las terminales de entrada para llevarlo al punto de saturación. En realidad, se requiere una tensión de entrada diferencial tan pequeña como la tensión de alimentación dividida entre A, esto es, aproximadamente



■ **FIGURA 6.35** (*a*) Ejemplo de un circuito comparador con una tensión de referencia de 2.5 V. (*b*) Gráfica de la característica entrada-salida.

$\pm 120\ \mu V$ en el caso del circuito de la figura 6.35*a* y $A = 10^5$. En la figura 6.35*b* se muestra la salida distintiva del circuito comparador, donde la respuesta varía entre el valor positivo y negativo de la saturación, sin que haya en esencia una región de "amplificación" no lineal. Por ende, una salida positiva de 12 V del comparador indica una tensión de entrada 12 V *menor que* la tensión de referencia, mientras que una salida negativa de 12 V señala una tensión de entrada *mayor que* la referencia. Se logra un comportamiento opuesto si se conecta la tensión de referencia a la entrada inversora.

EJEMPLO 6.8

Diseñar un circuito que proporcione una salida "1 lógico" de 5 V si cierta señal de tensión cae por debajo de 3 V y que sea igual a cero en cualquier otro caso.

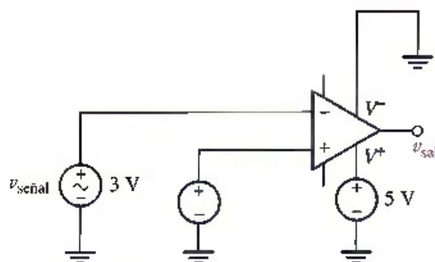


FIGURA 6.36 Posible diseño del circuito requerido.

En razón de que se desea que la salida del comparador varíe entre 0 y 5 V, se utilizará un amp op con una única fuente de +5 V conectada como se muestra en la figura 6.36. Se conecta una tensión de referencia de +3 V a la entrada no inversora, la cual puede ser proporcionada por las dos baterías de 1.5 V en serie, o un circuito de referencia a base de un diodo Zener. La señal de tensión de salida (que se designa como $v_{señal}$), entonces se conecta a la entrada inversora. En realidad, el rango de tensión de saturación de un circuito comparador será ligeramente menor que el de las tensiones de alimentación, por lo que será necesario realizar algunos ajustes en conjunto con la simulación y la prueba.

PRÁCTICA

6.8 Diseñar un circuito que proporcione una salida de 12 V si una cierta tensión ($v_{señal}$) excede el valor de 0 V, y una salida de −2 V en cualquier otro caso.

Respuesta: La posible solución se muestra en la figura 6.37.

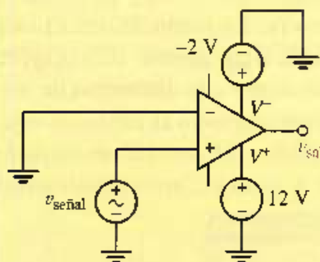


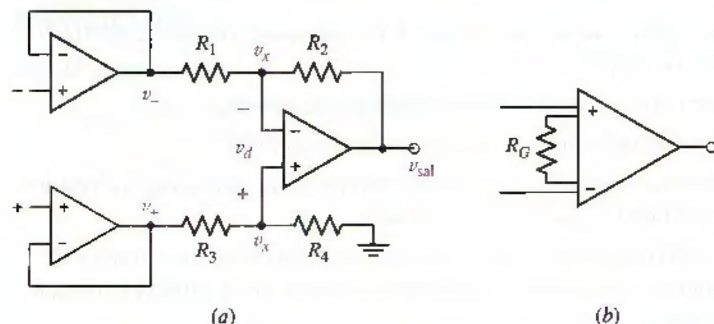
FIGURA 6.37 Una posible solución al problema de práctica 6.8.

Amplificador de instrumentación

El circuito comparador básico actúa sobre la diferencia de tensión entre las dos terminales de entrada del dispositivo, aunque desde el punto de vista técnico no amplifica las señales ya que la salida no es proporcional a la entrada. El amplificador diferencial de la figura 6.10 también actúa sobre la diferencia de tensión entre las entradas inversora y no-inversora y, siempre y cuando se evite la saturación, *generará* una salida directamente proporcional a esta diferencia. Sin embargo, cuando se esté trabajando con una tensión de entrada muy pequeña, una mejor opción es un dispositivo conocido como ***amplificador de***

instrumentación, el cual está formado en realidad por tres dispositivos amp op en un solo encapsulado.

Un ejemplo común de la configuración del amplificador de instrumentación se muestra en al figura 6.38*a* y su símbolo se muestra en la figura 6.38*b*. Cada una de las entradas alimenta directamente a la etapa de seguidor de tensión y la salida de ambos seguidores alimenta a una etapa del amplificador diferencial. En particular, el amplificador de instrumentación se adecua muy bien en aplicaciones donde la señal de tensión de entrada es muy pequeña (por ejemplo, del orden de milivolts), como las que generan los termoacopladores o medidores de esfuerzo y donde pueda presentarse una señal grande de ruido en modo común de varios volts.



■ **FIGURA 6.38** (*a*) Amplificador de instrumentación básico. (*b*) Símbolo que se utiliza comúnmente.

Si todos los componentes del amplificador de instrumentación se fabricaran en la misma "pastilla" de silicio, sería posible obtener características del dispositivo muy precisas y lograr cocientes exactos de los dos conjuntos de resistencias. Con la finalidad de maximizar el CMRR del amplificador de instrumentación, se espera que $R_4/R_3 = R_2/R_1$, por lo que se obtiene una amplificación igual de componentes en modo común de las señales de entrada. Para analizar esta cuestión con más detalle, se identificará la tensión a la salida del seguidor de tensión en la parte superior como "v_-" y la tensión a la salida del seguidor de tensión en la parte inferior como "v_+". Bajo el supuesto de que los tres amp op son ideales y eligiendo a la tensión en cualquiera de las entradas de la etapa diferencial, v_x, se pueden escribir las ecuaciones nodales siguientes:

$$\frac{v_x - v_-}{R_1} + \frac{v_x - v_{sal}}{R_2} = 0 \qquad [20]$$

y

$$\frac{v_x - v_+}{R_3} + \frac{v_x}{R_4} = 0 \qquad [21]$$

Despejando v_x en la ecuación [21], se tiene que

$$v_x = \frac{v_+}{1 + R_3/R_4} \qquad [22]$$

y sustituyendo este valor en la ecuación [20] se obtiene la expresión de v_{sal} en términos de la entrada:

$$v_{sal} = \frac{R_4}{R_3}\left(\frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_4/R_3}\right) v_+ - \frac{R_2}{R_1} v_- \qquad [23]$$

A partir de la ecuación [23] es evidente que el caso general permite la amplificación de los componentes en modo común de las dos entradas. Sin embargo,

en el caso particular donde $R_4/R_3 = R_2/R_1 = K$, la ecuación [23] se reduce a $K(v_+ - v_-) = K v_d$, de tal forma que (suponiendo amplificadores operacionales ideales) se amplificará sólo la diferencia y la ganancia estará determinada por el cociente de las resistencias. En razón de que estas resistencias están en el interior del amplificador de instrumentación y el usuario no puede acceder a ellos, los dispositivos prácticos como el AD622 permiten que pueda fijarse la ganancia en cualquier punto dentro del intervalo de 1 a 1 000 conectando una resistencia externa entre dos de sus patillas (se muestra en la figura 6.38*b* como R_G).

RESUMEN Y REPASO

- Existen dos reglas fundamentales que deben aplicarse cuando se analizan los circuitos de amp op *ideales*:
  1. No fluye corriente hacia ninguna terminal de entrada.
  2. Nunca existe tensión entre las terminales de entrada.
- La tensión de salida de los circuitos de amp op suele analizarse en términos de alguna cantidad o cantidades de entrada.
- El análisis nodal suele ser la mejor elección para analizar los circuitos de amp op; además, resulta más conveniente empezar en la entrada y trabajar hacia la salida.
- No se puede suponer la corriente de salida de un amp op; debe calcularse después de que la tensión de salida se determinó de manera independiente.
- La ganancia de un circuito de amp op inversor está dada por la ecuación

$$v_{sal} = -\frac{R_f}{R_1} v_{ent}$$

- La ganancia de un circuito de amp op no inversor se obtiene mediante la ecuación:

$$v_{sal} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_{ent}$$

- Una resistencia casi siempre se conecta desde la patilla (terminal) de salida de un amp op hasta su patilla (terminal) de entrada inversora, lo cual incorpora una retroalimentación negativa en el circuito para incrementar la estabilidad.
- El modelo de amp op ideal se basa en la aproximación de la ganancia infinita en lazo abierto A, la resistencia de entrada infinita R_i y la resistencia de salida cero R_o.
- En la práctica, el intervalo de la tensión de salida de un amp op está limitado por las tensiones de suministro utilizadas para activar el dispositivo.

LECTURAS ADICIONALES

Dos libros muy amenos que tratan acerca de las aplicaciones de los amp op son:

R. Mancini (ed.), *Op Amps Are For Everyone*, 2a. ed. Amsterdam: Newnes, 2003. También se encuentra disponible en el sitio web de Texas Instruments (www.ti.com).

W. G. Jung, *Op Amp Cookbook*, 3a. ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997.

Las características del diodo Zener y otros tipos de diodos se estudian en el capítulo 1 de

W. H. Hayt, Jr. and G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design*, 2a. ed. Nueva York: Wiley, 1995.

Uno de los primeros reportes sobre la implantación de un "amplificador operacional" se puede encontrar en

J. R. Ragazzini, R. M. Randall y F. A. Russell, "Analysis of problems in dynamics by electronic circuits," *Proceedings of the IRE* **35**(5), 1947, pp. 444-452.

Y una guía de aplicaciones de los amp op se puede encontrar en el sitio web de la compañía Analog Devices, Inc. (www.analog.com):

George A. Philbrick Researches, Inc, *Applications Manual for Computing Amplifiers for Modelling, Measuring, Manipulating & Much Else*. Norwood, Mass.: Analog Devices, 1998.

EJERCICIOS

6.2 El amp op ideal

1. En el circuito op amp de la figura 6.39, calcular V_{sal} si (*a*) V_{ent} = 3 V, R_1 = 10 Ω y R_2 = 100 Ω; (*b*) V_{ent} = 2.5 V, R_1 = 1 MΩ y R_2 = 1 MΩ; (*c*) V_{ent} = − 1 V, R_1 = 3.3 kΩ y R_2 = 4.7 kΩ.

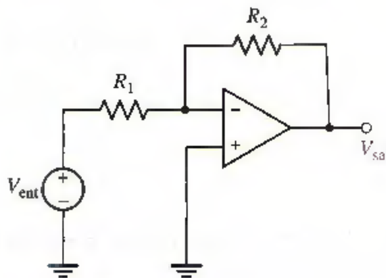


FIGURA 6.39

2. En el circuito con amp op de la figura 6.40, calcular V_{sal} si (*a*) V_{ent} = 1.5 V, R_3 = 10 Ω, R_1 = 10 Ω, y R_2 = 47 Ω; (*b*) V_{ent} = − 9 V, R_3 = 1 kΩ, R_1 = 1 MΩ, y R_2 = 1 MΩ; (*c*) V_{ent} = 100 mV, R_3 = 330 Ω, R_1 = 1 kΩ, y R_2 = 6.8 kΩ.

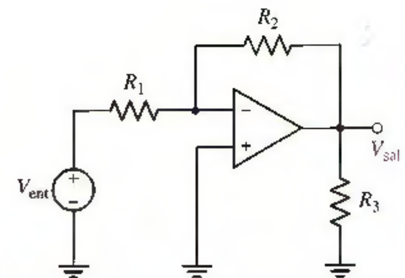


FIGURA 6.40

3. Dibujar la tensión de salida v_{sal} del circuito con amp op que se muestra en la figura 6.41 si (*a*) v_{ent} = 2 sen 5*t* V; (*b*) v_{ent} = 1 + 0.5 sen 5*t* V.

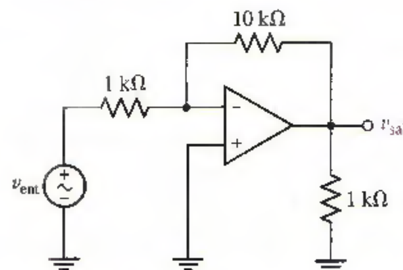


FIGURA 6.41

4. Dibujar la tensión de salida v_{sal} del circuito con amp op que se muestra en la figura 6.42 si (*a*) v_{ent} = 10 cos 4*t* V; (*b*) v_{ent} = 15 + 4 cos 4*t* V.

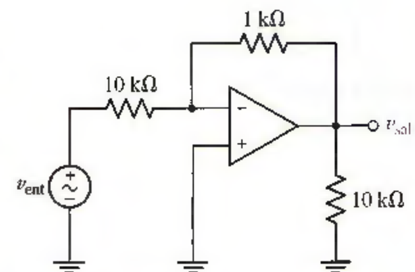
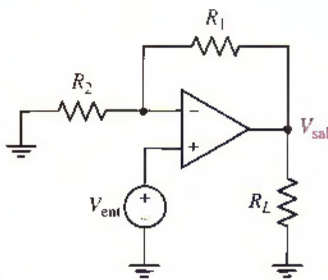


FIGURA 6.42

D 5. Diseñar un circuito que entregue −9 V a una carga de 47 kΩ si sólo se cuenta con fuentes de ±5 V. (Para resolver de este problema no es necesario incluir las fuentes de alimentación que en realidad suministran energía al amp op, el cual no está restringido a ±5 V.)

D 6. Diseñar un circuito que entregue +20 V a una carga de 1 kΩ si sólo se cuenta con fuentes de alimentación de ±5 V. (Para resolver este problema no es necesario incluir las fuentes de alimentación que en realidad suministran energía al amp op, el cual no está restringido a ±5 V.)



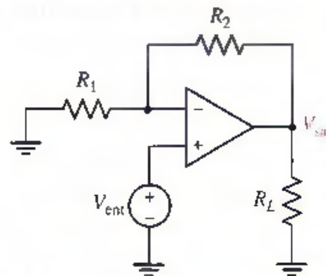
■ **FIGURA 6.43**

7. Diseñar un circuito que entregue +1.5 V a una carga no especificada, si sólo se cuenta con una fuente de +5 V. Para resolver este problema no es necesario incluir las fuentes de alimentación que en realidad suministran energía al amp op, el cual no está restringido a ± 5V.

8. Diseñar un circuito que entregue +3 V a una carga no especificada, si sólo se cuenta con una fuente de +9 V. Para resolver este problema no es necesario incluir las fuentes de alimentación que en realidad suministran energía al amp op, el cual no está restringido a ± 5V.

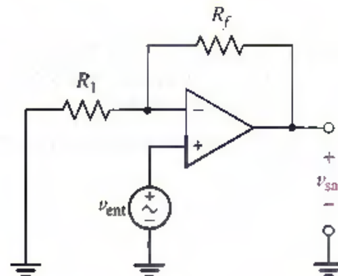
9. En el circuito amp op de la figura 6.43, calcular V_{sal} si (*a*) $V_{ent} = 300$ mV, $R_2 = 10\ \Omega$, y $R_1 = 47\ \Omega$; (*b*) $V_{ent} = 1.5$ V, $R_1 = 1\ \text{M}\Omega$, y $R_2 = 1\ \text{M}\Omega$; (*c*) $V_{ent} = -1$ V, $R_1 = 4.7\ \text{k}\Omega$, y $R_2 = 3.3\ \text{k}\Omega$.

10. En el circuito con amp op de la figura 6.44, calcular V_{sal} si (*a*) $V_{ent} = 200$ mV, $R_L = 10\ \text{k}\Omega$, $R_1 = 10\ \Omega$, y $R_2 = 47\ \Omega$; (*b*) $V_{ent} = -9$ V, $R_L = 1\ \text{k}\Omega$, $R_1 = 1\ \text{M}\Omega$, y $R_2 = 1\ \text{M}\Omega$; (*c*) $V_{ent} = 100$ mV, $R_L = 330\ \Omega$, $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$, y $R_2 = 6.8\ \text{k}\Omega$.



■ **FIGURA 6.44**

11. En el circuito con amp op de la figura 6.45, $R_1 = R_f = 1\ \text{k}\Omega$. Dibujar la tensión de salida v_{sal} si (*a*) $v_{ent} = 4$ sen $10t$ V; (*b*) $v_{ent} = 1 + 0.25$ sen $10t$ V.

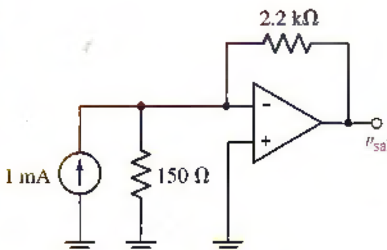


■ **FIGURA 6.45**

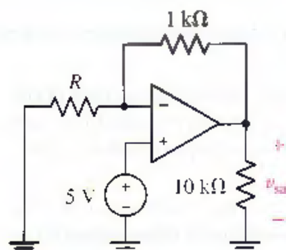
12. En el circuito con amp op de la figura 6.45, $R_1 = 2\ \text{k}\Omega$ y $R_f = 1\ \text{k}\Omega$. Dibujar la tensión de salida v_{sal} si (*a*) $v_{ent} = 2\cos 2t$ V; (*b*) $v_{ent} = 4 + \cos 2t$ V.

13. De acuerdo con la figura 6.46, calcular la tensión v_{sal}.

14. En el circuito de la figura 6.47, ¿qué valor de R se requiere para que se suministren 150 mW a la resistencia de 10 kΩ?



■ **FIGURA 6.46**

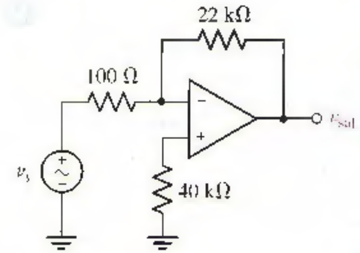


■ **FIGURA 6.47**

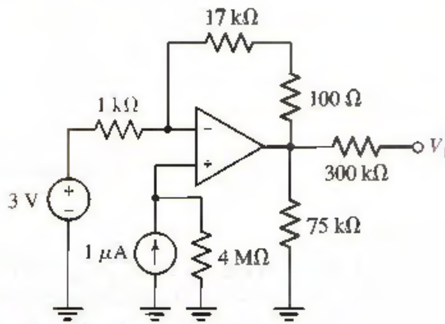
15. Cierto micrófono proporciona 0.5 V cuando alguien aplaude a una distancia de 20 pies. Un interruptor electrónico tiene una resistencia equivalente de Thévenin de 670 Ω y requiere 100 mA para energizarse. Diseñar el circuito que conectará el micrófono al interruptor electrónico, de manera que éste se active cuando alguien aplauda.

16. Para el circuito de la figura 6.48, obtener una expresión para v_{sal} en términos de v_s.

17. Calcular la tensión V_1 del circuito de la figura 6.49.

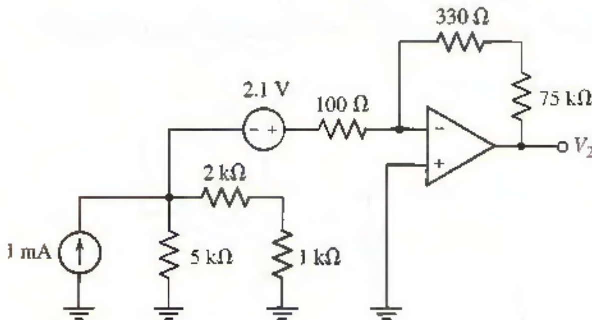


■ **FIGURA 6.48**

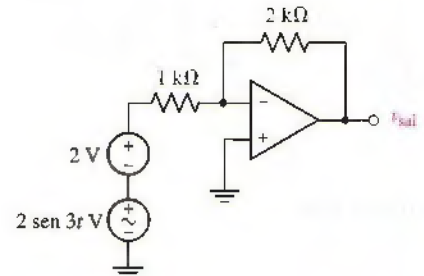


■ **FIGURA 6.49**

18. Calcular la tensión V_2 del circuito de la figura 6.50.



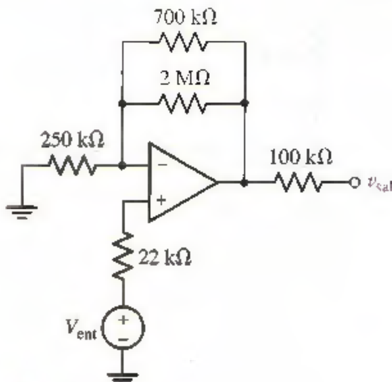
■ **FIGURA 6.50**



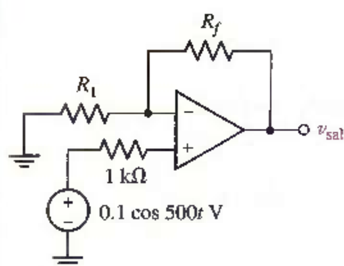
■ **FIGURA 6.51**

19. Deducir una expresión de v_{sal} del circuito de la figura 6.51 y evaluarlo en $t = 3$ segundos.

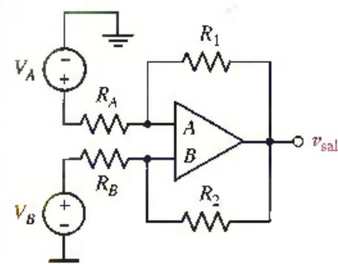
20. ¿Qué valor de V_{ent} causará una tensión de salida de 18 V en el circuito de la figura 6.52?



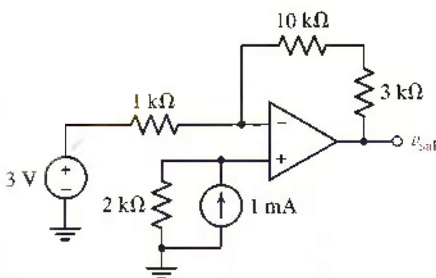
■ **FIGURA 6.52**



■ **FIGURA 6.53**

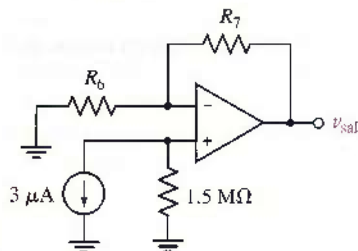


■ **FIGURA 6.55**



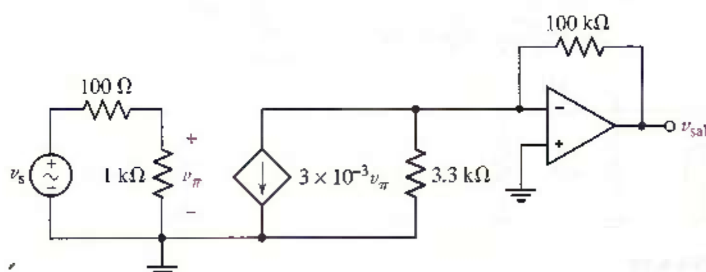
■ **FIGURA 6.56**

21. En la figura 6.53, elegir R_1 y R_f para obtener $v_{sal} = 23.7 \cos 500t$ volts.
22. Obtener la expresión de v_{sal} relativa al circuito de la figura 6.54, sin utilizar transformaciones de fuente.



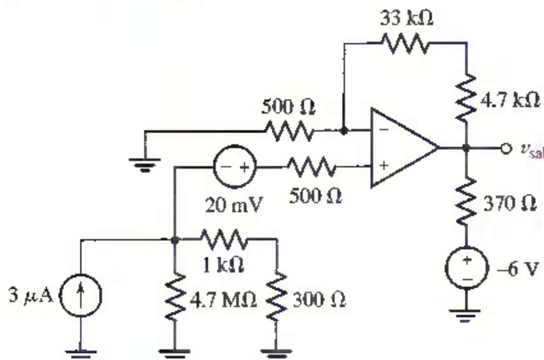
■ **FIGURA 6.54**

23. De acuerdo con el circuito de la figura 6.55:
   (*a*) Si $V_A = 0$, $V_B = 1$ V, $R_A = R_B = 10$ kΩ, $R_1 = 70$ kΩ, $R_2 = \infty$, y $v_{sal} = 8$V, ¿cuál de las terminales (*A* o *B*) es la entrada no inversora? Explicar su respuesta.
   (*b*) $V_A = 10$ V y $V_B = 0$ V. Si *B* es la entrada inversora, elegir R_A, R_B, R_1 y R_2 para obtener una tensión de salida de 20 V.
   (*c*) $V_A = V_B = 1$ V, $R_1 = 0$, y $R_2 = \infty$. Si V_{sal} es 1 V, ¿cuál de las terminales (*A* o *B*) es la entrada inversora? Explicar su respuesta.
24. Calcular v_{sal} del circuito de amp op de la figura 6.56.
25. Si $v_s = 5$ sen $3t$ mV en el circuito de la figura 6.57, calcular v_{sal} en $t = 0.25$ s.



■ **FIGURA 6.57**

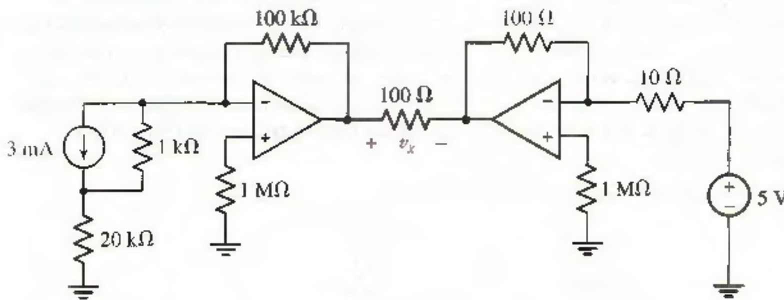
26. En el circuito de la figura 6.58, utilizar las técnicas de análisis de circuitos apropiadas a fin de calcular v_{sal}.



■ **FIGURA 6.58**

27. En la figura 6.58, sustituya la fuente de 3 μA por una fuente de 27 μA y calcular v_{sal}.

28. Calcular v_x del circuito de amp op múltiple de la figura 6.59.

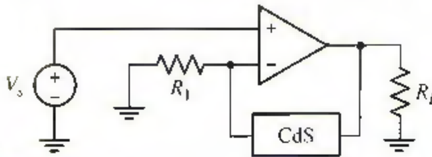


■ **FIGURA 6.59**

29. Obtener la expresión del amplificador sumador general, en el que cada resistencia tenga un valor diferente.

30. Deducir la expresión del amplificador diferencial general, en el que cada resistencia pueda tener un valor distinto.

D 31. El sulfuro de cadmio (CdS) se suele utilizar para fabricar resistencias cuyo valor depende de la intensidad de la luz que incide sobre su superficie. En la figura 6.60, una "fotocelda" de CdS se emplea como resistencia de retroalimentación R_f. En la oscuridad total, tiene una resistencia de 100 kΩ, y con una intensidad de 6 candelas, su resistencia es igual a 10 kΩ. R_L representa un circuito que se activa cuando se aplica en sus terminales una tensión de 1.5 V o menor. Elegir R_1 y V_s de manera que el circuito representado por R_L se active mediante una luz de 2 candelas o más brillante.



■ **FIGURA 6.60**

D 32. En un estudio de grabación se utilizan dos micrófonos diferentes, uno para las voces y otro para los instrumentos. Diseñar un circuito que permita que ambas salidas de micrófono se combinen; considerar que las voces deben recibir el doble de amplificación que los instrumentos.

D 33. Una señal senoidal viaja sobre una señal compensada de cd de 2 V (en otras palabras, el valor promedio de la señal total es de 2 V). Diseñar un circuito para eliminar la compensación cd, y amplificar la señal senoidal (sin inversión de fase) por un factor de 100.

6.3 Etapas en cascada

D 34. Diseñar un circuito que proporcione una tensión de salida igual al promedio de las tres tensiones de entrada v_1, v_2 y v_3.

D 35. Un sistema electrónico de inventario de almacén utiliza básculas ubicadas debajo de cada estante; la salida de las básculas están calibradas para proporcionar 1 mV por cada kg. Diseñar un circuito que proporcione una tensión de salida proporcional al peso total de un grupo de artículos similares (distribuidos en cuatro estantes) que queden en existencia. Restar el peso excedente de cada estante (el peso excedente se proporciona como tensión de referencia en cada estante). La salida de tensión debe calibrarse de tal manera que 1 mV equivalga a 1 kg.

D 36. Un fabricante de armas a base de radares para la medición de la velocidad vehicular proporciona una salida de tensión proporcional a la velocidad del objeto en cuestión, de tal forma que 10 mV = 1 mph. Si el velocímetro del vehículo de la policía es bloqueado a fin de proporcionar una señal proporcional a su velocidad tal que 10 mV = 1 mph, diseñar un circuito multietapa que (*a*) proporcione una señal de tensión igual a la diferencia en velocidades del auto y el vehículo de la policía (tal que +10 mV = velocidad del vehículo de la policía menos 1 mph) y (*b*) proporcione una señal de tensión para cada una de las tres cantidades en kph, tal que 10 mV = 1 kph.

37. Calcular v_{sal} para el circuito de la figura 6.61.

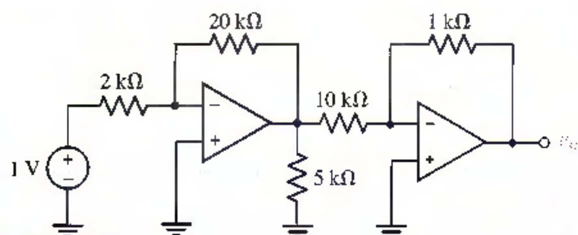


FIGURA 6.61

38. Obtener la expresión de V_{sal} en términos de V_1 y V_2 del circuito de la figura 6.62.

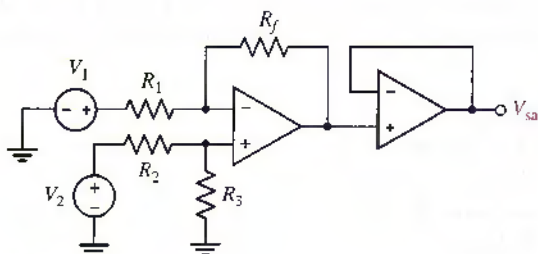


FIGURA 6.62

39. Calcular la tensión de salida de cada etapa del circuito de amp op en cascada de la figura 6.63.

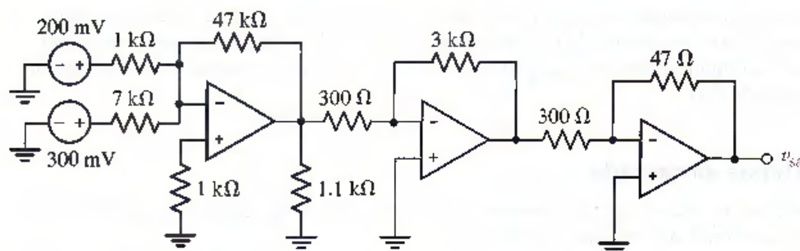
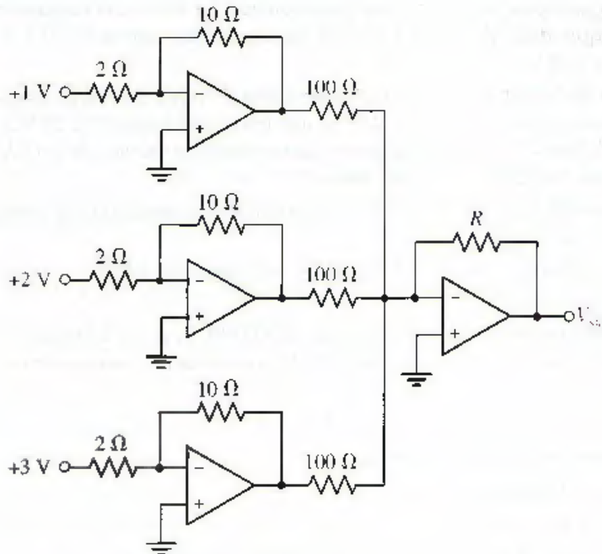


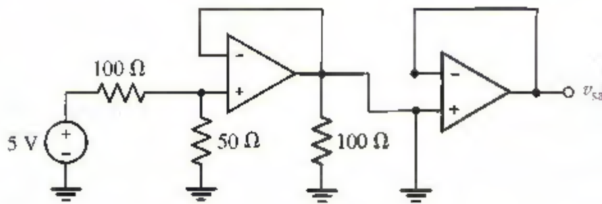
FIGURA 6.63

40. De acuerdo con el circuito de amp op de la figura 6.64, ¿qué valor de R se requiere para obtener V_{sal} = 10 V?



■ **FIGURA 6.64**

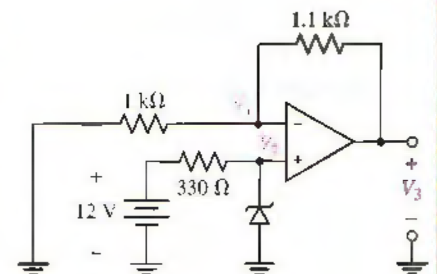
41. Calcular v_{sal} del circuito de amp op de dos etapas de la figura 6.65.



■ **FIGURA 6.65**

6.4 Circuitos para fuentes de tensión y de corriente

42. (*a*) El circuito de la figura 6.66 utiliza un diodo 1N750, que está caracterizado por una tensión Zener de 4.7 V. Determinar las tensiones marcadas como V_1, V_2 y V_3. (*b*) Verificar el análisis con una simulación PSpice adecuada. Elaborar un esquema marcado adecuadamente y comentar sobre las posibles fuentes de cualquier diferencia en ambos análisis.



■ **FIGURA 6.66**

43. Diseñar un circuito que genere una tensión de referencia de +5.1 V como la entrada a un seguidor de tensión si sólo se cuenta con baterías de 9 V. Utilizar un diodo 1N4733 con una tensión Zener de 5.1 V a una corriente de 76 mA.

44. Diseñar un circuito que genere una tensión de referencia de −2.5 V como la entrada a un seguidor de tensión si sólo se cuenta con baterías de 9 V. Utilizar un diodo 1N4740, el cual cuenta con una tensión Zener de 10 V a una corriente de 25 mA.

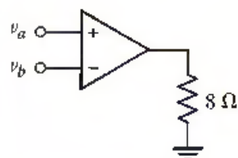
45. Diseñar un circuito que genere una tensión de referencia de +12 V como la entrada a un seguidor de tensión si sólo se cuenta con baterías de 9 V. Utilizar un diodo 1N4747 con una tensión Zener de 20 V a una corriente de 12.5 mA.

46. (*a*) Diseñar un circuito que genere una tensión de referencia de −5 V como la entrada a un seguidor de tensión si sólo se cuenta con baterías de 9 V. Utilizar un diodo 1N4728 con una tensión Zener de 3.3 V a una corriente de 76 mA. (*b*) Modificar el diseño para proporcionar una tensión de referencia de +2.2 V.

47. Diseñar el circuito de fuente de tensión que proporcione 25 mA a una carga no especificada. Utilizar un diodo Zener 1N4740 con una tensión de ruptura de 10 V a una corriente de 25 mA.

48. Diseñar el circuito de fuente de tensión que proporcione 12.5 mA a una carga no especificada. Utilizar un diodo Zener 1N4747 con una tensión de ruptura de 20 V a una corriente de 12.5 mA.

49. Diseñar el circuito de fuente de tensión que proporcione 75 mA a una carga no especificada. Utilizar un diodo Zener 1N4747 con una tensión de ruptura de 20 V a una corriente de 12.5 mA. Si el amplificador es alimentado con fuentes de ±15 V, ¿qué rango de cargas son factibles en este diseño?



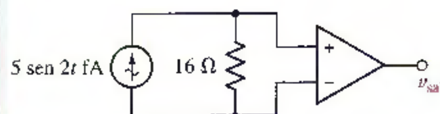
■ **FIGURA 6.67**

50. Mediante el modelo detallado para el μA741, determinar la potencia que se entrega la resistencia de 8 Ω de la figura 6.67 si

(*a*) $v_a = v_b = 1$ nV; (*b*) $v_a = 0$, $v_b = 1$ nV; (*c*) $v_a = 2$ pV, $v_b = 1$ fV;
(*d*) $v_a = 50\ \mu$V, $v_b = -4\ \mu$V.

51. Un circuito de amp op inversor se construye con un AD549. Si $R_1 = 270$ kΩ y $R_f = 1$ MΩ, determinar cuál es la corriente de polarización de entrada que se espera para:

(*a*) $V_S = 1$ mV; (*b*) $V_S = -7.5$ mV; (*c*) $V_S = 1$ V.

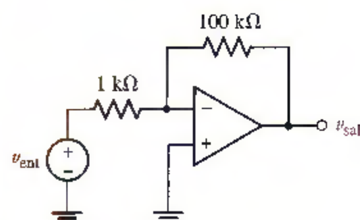


■ **FIGURA 6.68**

52. Calcular v_{sal} del circuito de la figura 6.68 si:

(*a*) $A = 10^5$, $R_i = 100$ MΩ, y $R_o = 0$

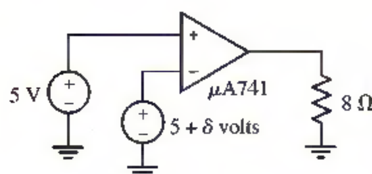
(*b*) $A = 10^6$, $R_i = 1$ TΩ, y $R_o = 0$



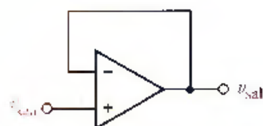
■ **FIGURA 6.69**

53. En el circuito de la figura 6.69(*a*) obtener la expresión de v_{sal}/v_{ent} si $R_i = \infty$, $R_o = 0$, y A es finita. (*b*) ¿Qué valor de la ganancia en lazo abierto A se requiere para que la ganancia en lazo cerrado esté dentro de 1% de su valor ideal?

54. Calcular la potencia disipada por la resistencia de 8 Ω si $\delta =$ (*a*) 0 V; (*b*) 1 nV; (*c*) 2.5 μV del circuito de la figura 6.70.



■ **FIGURA 6.70**



■ **FIGURA 6.71**

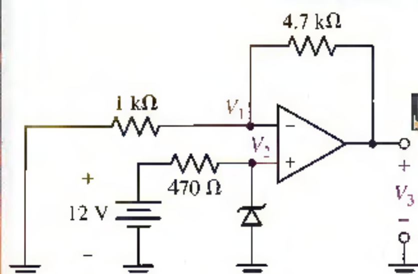
55. Con los parámetros correspondientes a un AD549, calcular v_{sal} del circuito de la figura 6.71 si $v_{ent} = -16$ mV.

6.5 Consideraciones prácticas

56. Deducir la expresión de la tensión de salida de un seguidor de tensión en términos de la tensión de entrada v_{ent} para el caso de una ganancia de lazo abierto y resistencia de entrada finitas y resistencia de salida diferente de cero. Verificar que la expresión se simplifique a $v_{sal} = v_{ent}$ en el caso de un amp op ideal.

57. (*a*) Construir un detallado modelo de amp op que incluya una contribución A_{CM} de ganancia en modo común, a la tensión de salida. (*b*) Utilizar el modelo con los valores de $A = 10^5$, $R_i = \infty$, $R_o = 0$, y $A_{CM} = 10$ para analizar el circuito de la figura 6.25 con $v_1 = 5 + 2\text{sen}t$ V y $v_2 = 5$. (*c*) Comparar su respuesta con la que obtendría si $A_{CM} = 0$.

58. Determinar la *velocidad de decaimiento* y explicar su significado en la forma de onda de salida de un circuito con amp op.



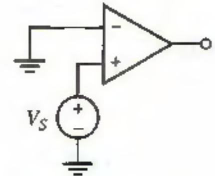
■ **FIGURA 6.72**

59. El circuito de la figura 6.72 utiliza un diodo 1N750, que está caracterizado por una tensión Zener de 4.7 V. (*a*) Determinar las tensiones marcadas como V_1, V_2 y V_3. (*b*) Verificar la respuesta mediante una simulación en PSpice, empleando un amp op A741 y fuentes de alimentación de ±18 V. Elaborar un diagrama marcado adecuadamente con los resultados. Si la simulación no concuerda exactamente con los cálculos realizados a mano, intentar determinar el origen de dicha discrepancia. (*c*) ¿Cuál es el valor mínimo al que una fuente de 12 V puede reducirse antes de que el circuito Zener deje de llevar a cabo su función?

60. Efectuar una simulación PSpice de un circuito de amp op inversor mediante un μA741, con un suministro de ± 15 V, $R_1 = 10$ kΩ, y $R_f = 1$ MΩ. Graficar las características de entrada-salida e indique las regiones lineal y de saturación positiva/negativa. ¿La ganancia predicha por la simulación concuerda con la que predice el modelo del amp op ideal?

61. Si se sabe que las aplicaciones sólo requieren configuraciones de amp op inversor y que no importa tener capacidad para reducir la tensión de salida, ¿cuál es el número mínimo de patillas (terminales) que se requieren para el encapsulamiento de amp op? Escribir cada una mediante un nombre.

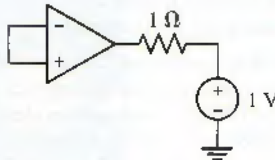
62. Utilizar PSpice para simular el circuito de la figura 6.73 utilizando (*a*) μA741; (*b*) LM324; (*c*) LF411. Determinar la tensión de entrada diferencial V_S que se requiere para saturar cada tipo de amp op, utilizando suministros de ± 15 V. (*d*) Comparar sus resultados con lo que esperaría, en base a la información de la tabla 6.3.



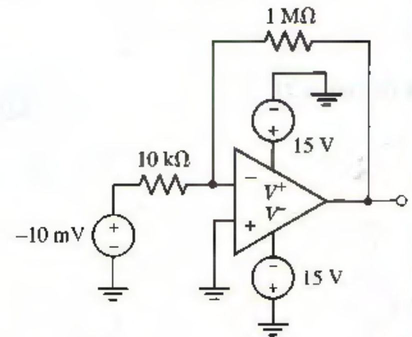
■ **FIGURA 6.73**

63. Efectuar una simulación PSpice de un circuito de amp op no inversor con un μA741, suministros de ± 15 V, $R_1 = 4.7$ kΩ y $R_f = 1$ MΩ. Graficar las características de entrada-salida e indique las regiones lineal y de saturación positiva/negativa. ¿La ganancia concuerda con lo predicho por el modelo de amp op ideal?

64. Utilizar el concepto de circuito que se presenta en la figura 6.74 para determinar la resistencia de salida de un μA741 y un LF411. Variar la tensión del suministro y determinar si afecta los resultados de simulación. ¿Concuerdan las simulaciones con los valores de la tabla 6.3?



■ **FIGURA 6.74**



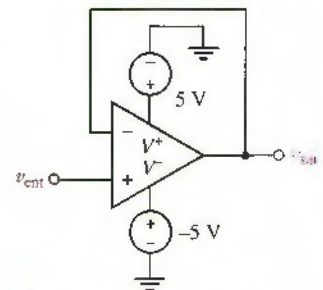
■ **FIGURA 6.75**

65. Simular el circuito de la figura 6.75 mediante un LF411. Determinar la corriente de polarización de entrada y la tensión de entrada diferencial. Comparar los resultados con los valores predichos por el modelo detallado y los valores que se presentan en la tabla 6.3.

66. Un sensor proporciona una tensión de señal de entre -30 mV y $+75$ mV. (*a*) Si se usa un amplificador inversor con una ganancia de tensión de $|v_{sal}/v_{ent}| = 1\,000$ y suministros de ± 15 V dc ¿cuál es el intervalo esperado de la tensión de salida? (*b*) Si se emplea un amplificador no inversor con suministros de ± 15 V cd, ¿cuál es la máxima razón de resistencias R_f/R_1 que se puede emplear sin que haya saturación del amp op?

67. (*a*) Simular el circuito de la figura 6.76 utilizando el μA741 sobre el intervalo -10 V $\leq V_{ent} \leq +10$ V. Determinar las tensiones precisas en las que comienza la saturación mediante el cursor. Comparar sus resultados con los que se podrían predecir utilizando la tabla 6.3.

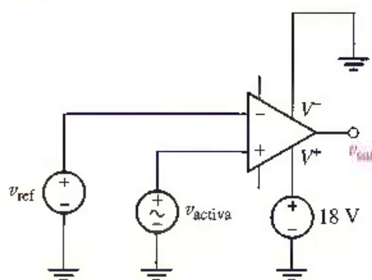
(*b*) Un amp op μA741 real provee hasta 35 mA de corriente bajo condiciones continuas de cortocircuito. Determinar la corriente de cortocircuito máxima posible con el modelo que se utiliza en PSpice.



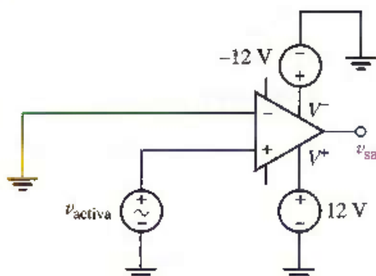
■ **FIGURA 6.76**

68. Para mejorar la seguridad de la transmisión, una señal caótica variable en el tiempo se suma a una señal de audio antes de transmitirse. La misma señal caótica se transmite también en una frecuencia separada. Suponiendo que cualquier antena de recepción se modela como una fuente de tensión variable en el tiempo en serie con una resistencia de 300 diseñar un circuito para separar las dos señales, descartar la señal caótica, amplificar la señal de audio por un factor de 10 y entregar el resultado a un altavoz de 8 Ω.

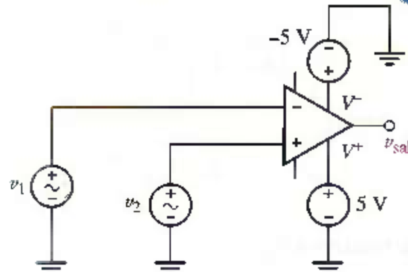
69. Diseñar un circuito de amp op que proporcione una tensión de salida igual al promedio de las tres tensiones de entrada. Se puede suponer que las tensiones de entrada estarán confinadas en el intervalo -10 V $\leq V_{ent} \leq +10$ V. Verificar su diseño con PSpice y mediante un conjunto adecuado de tensiones de entrada.



■ **FIGURA 6.77**



■ **FIGURA 6.78**



■ **FIGURA 6.79**

6.6 Comparadores y el amplificador de instrumentación

70. En el circuito que se muestra en la figura 6.77, dibujar la tensión de salida esperada v_{sal} en función de v_{activa} para -5 V $\leq v_{activa} \leq +5$ V, si v_{ref} es igual a (*a*) -3 V; (*b*) $+3$ V.

71. En el circuito que se muestra en la figura 6.78, dibujar la tensión de salida esperada v_{sal} en función de v_{activa}, si -2 V $\leq v_{activa} \leq +2$ V. Verificar la solución mediante un μA741 (aunque es lento en comparación con los amp op diseñados específicamente para su uso como comparadores, su modelo en PSpice funciona bien, y puesto que ésta es una aplicación de cd, la velocidad no representa ningún problema). Elaborar un esquema marcado adecuadamente con los resultados.

72. En el circuito que se muestra en la figura 6.79, (*a*) dibujar la tensión de salida esperada v_{sal} en función de v_1 para -5 V $\leq v_1 \leq +5$ V, si $v_2 = +2$ V; (*b*) graficar la tensión de salida esperada v_{sal} en función de v_2 para -5 V $\leq v_2 \leq +5$ V, si $v_1 = +2$ V.

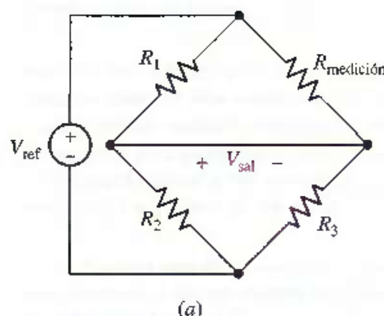
73. En aplicaciones de lógica digital, una señal de +5 V representa un estado lógico "1" y una señal de 0 V un estado lógico "0". Con el fin de procesar información en tiempo real mediante una computadora digital, se requiere de algún tipo de interfase, la cual típicamente incluye un convertidor analógico-a-digital (A/D), esto es, un dispositivo que convierte las señales analógicas en digitales. Diseñar un circuito que actúe como un A/D de 1 bit, donde cualquier señal menor a 1.5 V represente un "0" lógico y cualquier señal mayor a 1.5 V un "1" lógico.

74. Suponer que, en el amplificador de instrumentación que se muestra en la figura 6.38*a*, los tres amp op son ideales y determinar el CMRR del circuito si (*a*) $R_1 = R_3$ y $R_2 = R_4$; (*b*) las cuatro resistencias tienen valores diferentes.

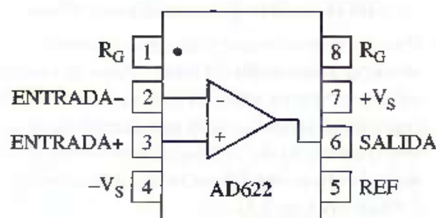
75. Una aplicación muy común de los amplificadores de instrumentación se realiza para medir tensiones en circuitos de medición de esfuerzo resistivo. Estos sensores de esfuerzo funcionan mediante la detección de los cambios en resistencia que resultan de las distorsiones geométricas, como se muestra en la ecuación [6] de capítulo 2. A menudo son parte de un circuito puente, como se muestra en la figura 6.80*a*, donde el medidor de esfuerzo se identifica como R_G. (*a*) Demostrar que $V_{sal} = V_{ent}\left[\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_3}{R_3+R_{medición}}\right]$. (*b*) Verificar que $V_{sal} = 0$ cuando los valores de las tres resistencias R_1, R_2, y R_3 se seleccionan al mismo valor de la resistencia de medición $R_{medición}$. (*c*) En el caso de esta aplicación, el medidor que se seleccionó tiene una resistencia al esfuerzo de 5 kΩ y se espera un aumento máximo de resistencia de 50 mΩ. Sólo se tienen disponibles fuentes de ±12 V. Utilizando el amplificador de instrumentación de la figura 6.80*b*, diseñar un circuito que proporcione una señal de tensión de +1 V cuando el medidor de esfuerzo se encuentre en su carga máxima.

Especificaciones del AD622

La ganancia G del amplificador puede variar de 2 a 1 000 si se conecta una resistencia entre las terminales 1 y 8 con un valor determinado por $R = \frac{50.5}{G-1}$ kΩ.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 6.80**

CAPÍTULO 7

Capacitores e inductores

CONCEPTOS CLAVE

Relación tensión-corriente de un capacitor ideal.

Relación corriente-tensión de un inductor ideal.

Cálculo de la energía almacenada en capacitores e inductores.

Análisis de las respuestas del capacitor y del inductor a formas de onda variantes en el tiempo.

Combinaciones en serie y en paralelo de capacitores.

Combinaciones en serie y en paralelo de inductores.

Circuitos de amp op que utilizan capacitores.

Modelado de elementos de almacenamiento de energía con PSpice.

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan dos nuevos elementos pasivos del circuito, el *capacitor* y el *inductor*, ambos son capaces de almacenar y entregar cantidades *finitas* de energía. En este aspecto difieren de las fuentes ideales, puesto que no pueden proporcionar un flujo de potencia promedio finito durante un intervalo infinito. A pesar de que estos elementos están clasificados como lineales, las relaciones corriente-tensión de estos dos nuevos elementos dependen del tiempo, lo que da origen a muchos circuitos interesantes. Como se verá a continuación, el intervalo de los valores de capacitancia e inductancia que se puede encontrar es enorme, por lo que, a veces, éstos determinarán el comportamiento del circuito y, en otras ocasiones, serán insignificantes. Dichos problemas siguen siendo relevantes en las aplicaciones modernas de circuitos, en particular, a medida que los sistemas de comunicaciones y de computadoras demanden frecuencias de operación más elevadas y densidades de componentes mayores.

7.1 EL CAPACITOR

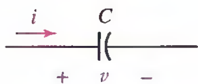
Modelo de capacitor ideal

Se denominó antes a las fuentes de tensión y de corriente independientes y dependientes como elementos activos, y a la resistencia lineal como elemento pasivo, aunque las definiciones de activo y de pasivo aún siguen confundiéndose y es necesario distinguirlas con claridad. Ahora se define un ***elemento activo*** como aquel que proporciona una potencia promedio mayor que cero a cierto dispositivo externo, donde el promedio se toma en un intervalo infinito. Las fuentes ideales son elementos activos, así como el amplificador operacional. Por el contrario, un ***elemento pasivo*** se define como el que no puede suministrar una potencia promedio mayor que cero en un intervalo infinito. La resistencia está en tal categoría; la energía que recibe casi siempre se transforma en calor, y nunca suministra energía.



A continuación se presenta un nuevo elemento de circuito pasivo, el ***capacitor***. Se define la capacitancia C por medio de la relación de corriente-tensión

$$\boxed{i = C\frac{dv}{dt}} \qquad [1]$$



■ **FIGURA 7.1** Símbolo eléctrico y convenciones de corriente-tensión de un capacitor.

donde v e i satisfacen las convenciones de un elemento pasivo, como se muestra en la figura 7.1. Se debe tener presente que v e i son funciones del tiempo; si es necesario, se subraya este hecho escribiendo en su lugar $v(t)$ e $i(t)$. Con base en la ecuación [1] se determina la unidad de capacitancia como un ampere-segundo por volt, o un coulomb por volt. Luego se define el ***faradio***[1] (F) como un coulomb por volt y se lo utiliza como la unidad de capacitancia.

El capacitor ideal definido por la ecuación [1] sólo es el modelo matemático de un dispositivo real. Un capacitor se compone de dos superficies conductoras sobre las que puede almacenarse una carga, y están separadas por una delgada capa aislante que tiene una resistencia muy grande. Si se supone que la resistencia es lo suficientemente grande como para que se pueda considerar infinita, entonces nunca podrán recombinarse cargas iguales y opuestas situadas sobre las "placas" del capacitor, o a menos no se hará mediante ninguna trayectoria dentro del elemento. La construcción del dispositivo físico se sugiere por el símbolo de circuito que se presenta en la figura 7.1.

Considerar algún dispositivo externo conectado a este capacitor y que provoca que una corriente positiva fluya hacia una placa del capacitor y salga de la otra placa. Corrientes iguales entran y salen de las dos terminales del elemento, lo cual no es más que lo que se espera de cualquier elemento de circuito. Examinar ahora el interior del capacitor. La corriente positiva que entra a una placa representa la carga positiva que se mueve hacia ella a través de su hilo de conexión terminal; la carga no puede pasar a través del interior del capacitor, por lo cual se acumula sobre la placa. En realidad, la corriente y la carga crecientes se relacionan mediante la ecuación ya familiar

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Considerar ahora esta placa como un nodo cargado en exceso y aplicar la ley de Kirchhoff de corriente; aparentemente no se cumple. La corriente se aproxima a la placa desde el circuito externo, pero no fluye fuera de la placa hacia el "circuito interno". Este dilema inquietó hace más de un siglo al famoso científico escocés James Clerk Maxwell. La teoría electromagnética unificada que después formuló plantea la hipótesis de una "corriente de desplazamiento" está presente siempre que un campo eléctrico o una tensión varían con el tiempo. La corriente de desplazamiento que fluye de manera interna entre las placas del capacitor es exactamente igual a la corriente de conducción que fluye en los hilos de conexión del capacitor; de esta forma, la ley de Kirchhoff de corriente se satisface, si se incluyen las corrientes de conducción y de desplazamiento. Sin embargo, el análisis de circuitos no se interesa en la corriente de desplazamiento interna, y ya que por fortuna es igual a la corriente de conducción, se podrá considerar que la hipótesis de Maxwell relaciona la corriente de conducción con la tensión cambiante a través del capacitor.

Un capacitor construido con dos placas de conducción paralelas de área A, separadas por una distancia d, tiene una capacitancia $C = \varepsilon A/d$, donde ε es la permitividad (una constante del material aislante entre las placas), lo cual

(1) Recibe el nombre en honor a Michael Faraday.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

■ **FIGURA 7.2** Ejemplos de los tipos de capacitores disponibles en el mercado. (*a*) De izquierda a derecha: cerámico de 270 pF, tantalio de 20 μF poliéster de 15 nF, poliéster de 150 nF. (*b*) Izquierda: electrolítico de 2 000 μF a 40 VDC electrolítico de 25 000 μF 35 VDC. (*c*) En el sentido de las manecillas del reloj comenzando por el más pequeño: electrolítico de 100 μF a 63 VDC electrolítico de 2200 μF a 50 VDC, electrolítico de 55 F a 2.5 CD y electrolítico de 4 800 μF a 50 VDC. Observar que, en general, a medida que aumenta la capacitancia, se requiere de un encapsulado mayor, con una evidente excepción. ¿Cuál fue el compromiso en este caso?

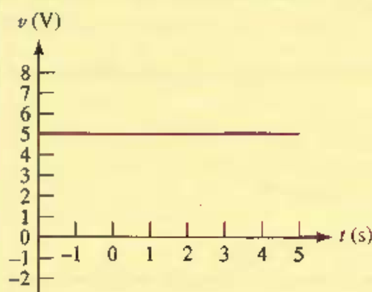
supone que las dimensiones lineales de las placas de conducción son mucho mayores que *d*. En el aire o el vacío, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854$ pF/m. La mayoría de los capacitores emplean una delgada capa de dieléctrico con una permitividad mayor que el aire, a fin de minimizar el tamaño del dispositivo. En la figura 7.2 se presentan ejemplos de diversos tipos de capacitores disponibles comercialmente, aunque se debe recordar que dos superficies, cualesquiera conductoras que no estén en contacto directo entre sí se caracterizarían mediante una capacitancia diferente de cero (pero quizás pequeña). También se debe hacer observar que una capacitancia de varios cientos de *microfaradios* (μF) se considera "grande".



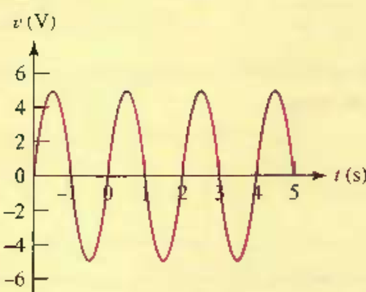
Mediante la ecuación [1], ya definida, se descubrirán varias características importantes del nuevo modelo matemático. Una tensión constante en un capacitor produce una corriente cero que pasa a través de él; por ello un capacitor es un "*circuito abierto para la cd*". Este hecho se representa en forma gráfica mediante el símbolo del capacitor. También resulta patente que un salto de tensión repentino requiere una corriente infinita. En razón de que lo anterior es físicamente inalcanzable, es imposible que la tensión en el capacitor cambie en el tiempo cero.

EJEMPLO 7.1

Determinar la corriente *i* que fluye a través del capacitor de la figura 7.1 en las dos formas de onda de tensión de la figura 7.3 si $C = 2$ F.



(*a*)



(*b*)

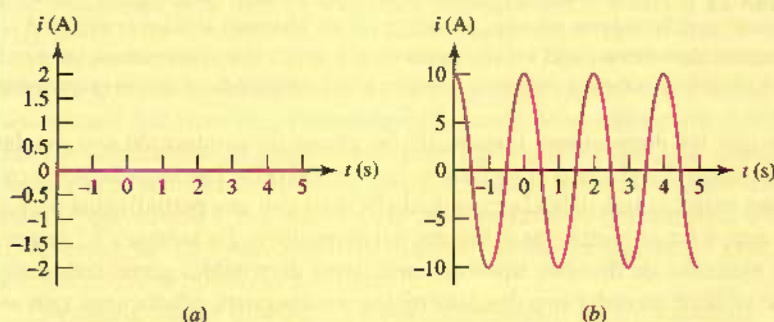
■ **FIGURA 7.3** (*a*) Tensión de cd aplicada a las terminales del capacitor. (*b*) Forma de onda senoidal de tensión aplicada a las terminales de un capacitor.

(*Continúa en la siguiente página*)

La corriente i está relacionada con la tensión v en el capacitor de la ecuación [1]:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

En el caso de la forma de onda de tensión que se muestra en la figura 7.3*a*, $dv/dt = 0$, por lo que $i = 0$; el resultado se grafica en la figura 7.4*a*. En el caso de la forma de onda senoidal de la figura 7.3*b*, se espera que circule una forma de onda senoidal de corriente como respuesta, que tenga la misma frecuencia y dos veces la magnitud (puesto que $C = 2$ F). La gráfica del resultado se muestra en la figura 7.4*b*.



■ **FIGURA 7.4** (*a*) $i = 0$ ya que la tensión aplicada es de cd. (*b*) La corriente es de forma cosenoidal en respuesta a la tensión senoidal.

PRÁCTICA

7.1 Determinar la corriente que circula a través de un capacitor de 5 mF como respuesta a una tensión $v =$: (*a*) −20 V; (*b*) $2e^{-5t}$ V.

Respuesta: (*a*) 0 A; (*b*) $-50e^{-5t}$ mA.

Relaciones integrales de tensión-corriente

La tensión del capacitor se expresaría en términos de la corriente que integra la ecuación [1]. Primero se obtiene:

$$dv = \frac{1}{C}i(t)\,dt$$

e integrando[2] entre los tiempos t_0 y t y entre las tensiones correspondientes $v(t_0)$ y $v(t)$ se tiene:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' + v(t_0) \qquad [2]$$

La ecuación [2] también puede escribirse como una integral indefinida, más una constante de integración:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt + k$$

(2) Observar que se aplica el procedimiento matemático correcto para la definición de una *variable simulada* t' en situaciones donde la variable de integración t es también un límite.

Por último, en muchos problemas reales, se encontrará que no es posible distinguir $v(t_0)$, la tensión inicial, en el capacitor. En tales casos, desde el punto de vista matemático será conveniente establecer $t_0 = -\infty$ y $v(-\infty) = 0$, por lo que:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt'$$

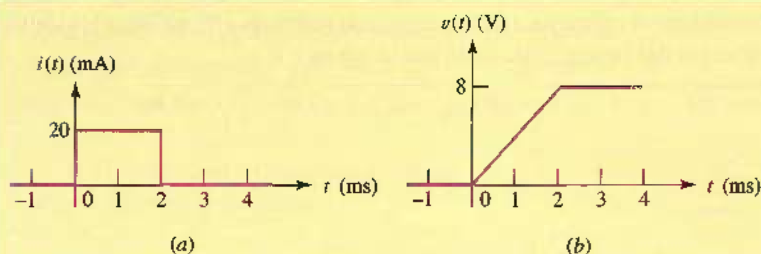
Puesto que la integral de la corriente en cualquier intervalo es la carga acumulada en ese periodo sobre la placa del capacitor hacia la cual fluye la corriente, también se puede definir a la capacitancia como

$$q(t) = Cv(t)$$

donde $q(t)$ y $v(t)$ representan los valores instantáneos de la carga sobre cualquiera de las placas y la tensión entre ellas, respectivamente.

EJEMPLO 7.2

Determinar la tensión del capacitor que está asociado con la corriente que se indica en forma gráfica en la figura 7.5*a*.



■ **FIGURA 7.5** (*a*) Forma de onda de la corriente aplicada a un capacitor de 5 μF. (*b*) Forma de onda de una tensión resultante que se obtuvo mediante integración gráfica.

Al interpretar la ecuación [2] en forma gráfica, se sabe que la diferencia entre los valores de la tensión en t y t_0 es proporcional al área bajo la curva de corriente entre estos mismos dos valores del tiempo. La constante de proporcionalidad es $1/C$. El área de la figura 7.5*a* se obtiene por inspección de los valores deseados de t_0 y t. Se selecciona nuestro punto inicial t_0 anterior al tiempo cero. Por simplicidad, el primer intervalo de t se escoge entre $-\infty$ y 0, y puesto que nuestra forma de onda implica que no se aplicó corriente a este capacitor desde el inicio del tiempo,

$$v(t_0) = v(-\infty) = 0$$

Con referencia a la ecuación [2], la integral de la corriente entre $t_0 = -\infty$ y 0 es simplemente cero, puesto que $i = 0$ en ese intervalo. De tal modo:

$$v(t) = 0 + v(-\infty) \qquad -\infty \leq t \leq 0$$

o

$$v(t) = 0 \qquad t \leq 0$$

(Continúa en la página siguiente)

Si se considera ahora el intervalo que representa el pulso rectangular, se obtiene

$$v(t) = \frac{1}{5 \times 10^{-6}} \int_0^t 20 \times 10^{-3}\, dt' + v(0)$$

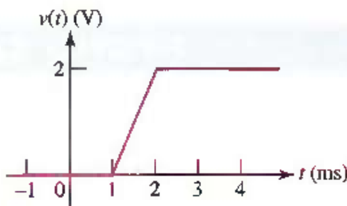
Puesto que $v(0) = 0$,

$$v(t) = 4\,000t \qquad 0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$$

En el intervalo semiinfinito que sigue al pulso, la integral $i(t)$ es otra vez cero, de modo que

$$v(t) = 8 \qquad t \geq 2 \text{ ms}$$

Los resultados se expresan con mayor simplicidad mediante un diagrama que a través de estas expresiones analíticas, como se indica en la figura 7.5*b*.



■ **FIGURA 7.6**

PRÁCTICA

7.2 Determinar la corriente a través de un capacitor de 100 pF si su tensión, como función del tiempo, está dada por la figura 7.6.

Respuesta: 0 A, $-\infty \leq t \leq 1$ ms; 200 nA, 1 ms $\leq t \leq 2$ ms; 0 A, $t \geq 2$ ms.

Almacenamiento de energía

La potencia entregada a un capacitor está dada por

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt}$$

y la energía almacenada en su campo eléctrico es, entonces,

$$\int_{t_0}^{t} p\, dt' = C\int_{t_0}^{t} v\frac{dv}{dt'}\, dt' = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v'\, dv' = \frac{1}{2}C\left\{[v(t)]^2 - [v(t_0)]^2\right\}$$

por lo que

$$w_C(t) - w_C(t_0) = \tfrac{1}{2}C\left\{[v(t)]^2 - [v(t_0)]^2\right\} \qquad [3]$$

donde la energía almacenada vale $w_C(t_0)$ en joules (J) y la tensión en t_0 es $v(t_0)$. Si se elige una referencia de energía cero en t_0, queda implícito que la tensión del capacitor es también cero en ese instante, entonces:

$$\boxed{w_C(t) = \tfrac{1}{2}C\,v^2} \qquad [4]$$

Considerar un ejemplo numérico simple. Como se muestra en la figura 7.7, una fuente de tensión senoidal se encuentra en paralelo con una resistencia de 1 MΩ y con un capacitor de 20 μF. Se podría suponer que la resistencia en paralelo representa la resistencia finita del dieléctrico entre las placas del capacitor físico (un capacitor *ideal* tiene resistencia infinita).

EJEMPLO 7.3

Calcular la energía máxima almacenada en el capacitor de la figura 7.7 y la energía que disipa la resistencia en el intervalo $0 < t < 0.5$ s.

Identificar el objetivo del problema.

La energía almacenada en el capacitor varía con el tiempo; se pide el valor *máximo* en un intervalo específico, así como la cantidad *total* de energía disipada por la resistencia en este intervalo. En realidad son dos ecuaciones por completo diferentes.

Recopilar la información conocida.

La única fuente de energía en el circuito es la fuente de tensión independiente, que tiene un valor de 100 sen $2\pi t$ V. Sólo es de interés el intervalo $0 < t < 0.5$ s. El circuito está marcado de manera adecuada.

Decidir la técnica disponible que se ajusta mejor al problema.

La energía en el capacitor se determina mediante la evaluación de la tensión. Para calcular la energía disipada por la resistencia durante el mismo intervalo, es necesario integrar la *potencia* disipada, $p_R = i_R^2 \cdot R$.

Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.

La energía almacenada en el capacitor es simplemente:

$$w_C(t) = \tfrac{1}{2}Cv^2 = 0.1\,\text{sen}^2 2\pi t \qquad \text{J}$$

Se obtiene la expresión de la potencia disipada por la resistencia, en términos de la corriente i_R:

$$i_R = \frac{v}{R} = 10^{-4}\,\text{sen}2\pi t \qquad \text{A}$$

por lo que

$$p_R = i_R^2 R = (10^{-4})(10^6)\,\text{sen}^2 2\pi t$$

de modo que la energía disipada por la resistencia entre 0 y 0.5 s sea

$$w_R = \int_0^{0.5} p_R\,dt = \int_0^{0.5} 10^{-2}\,\text{sen}^2 2\pi t\,dt \qquad \text{J}$$

Determinar si se requiere información adicional.

Se cuenta con la expresión de la energía almacenada en el capacitor; en la figura 7.8 se muestra un dibujo. La expresión que se obtuvo de la energía disipada por la resistencia no incluye ninguna cantidad desconocida, por lo cual puede evaluarse con facilidad.

Buscar la solución.

A partir del bosquejo de la expresión de la energía almacenada en el capacitor, se puede ver que aumenta desde cero a $t = 0$ hasta un máximo de 100 mJ en $t = \frac{1}{4}$ s, y que luego disminuye hasta cero en otro $\frac{1}{4}$ s. Por lo tanto, $w_{C_{\text{máx}}} = 100$ mJ. Al evaluar la expresión integral de la energía disipada por la resistencia, se puede ver que $w_R = 2.5$ mJ.

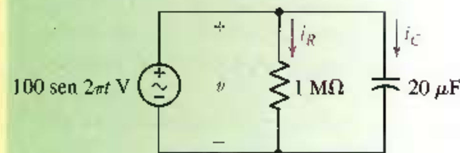


FIGURA 7.7 Una fuente de tensión senoidal se aplica a una red *RC* en paralelo. La resistencia de 1 MΩ podría representar la resistencia finita de la capa dieléctrica "real" del capacitor.

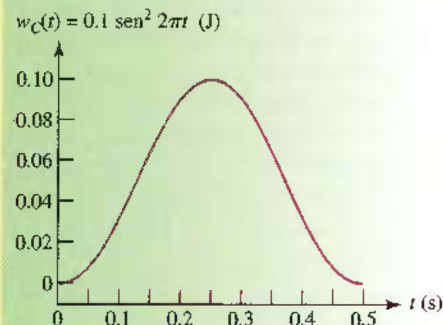


FIGURA 7.8 Gráfica de la energía almacenada en el capacitor como función del tiempo.

(Continúa en la siguiente página)

Verificar la solución. ¿Es razonable o esperada?

No se espera calcular una energía almacenada negativa, que no aparece en el diagrama. Además, puesto que el valor máximo de sen $2\pi t$ es 1, la máxima energía esperada sería $(1/2)(20 \times 10^{-6})(100)^2 = 100$ mJ.

La resistencia disipó 2.5 mJ en el periodo de 0 a 500 ms, aunque el capacitor almacenó una energía máxima de 100 mJ en un punto durante ese intervalo. ¿Qué pasó con los "otros" 97.5 mJ? Para responder a esta pregunta, se calcula la corriente del capacitor:

$$i_C = 20 \times 10^{-6}\frac{dv}{dt} = 0.004\pi \cos 2\pi t$$

y la corriente i_s definida como circulando hacia la fuente de tensión

$$i_s = -i_C - i_R$$

los cuales están graficados en la figura 7.9. Se puede observar que la corriente que circula a través de la resistencia es una pequeña fracción de la corriente de la fuente, lo cual no es para sorprenderse ya que 1 MΩ es un valor de resistencia relativamente grande. A medida que la corriente fluye a partir de la fuente, se desvía una pequeña cantidad hacia la resistencia, mientras que la restante circula hacia el capacitor a medida que éste se carga. Después de $t = 250$ ms, se puede observar que la corriente de la fuente cambia de signo; la corriente ahora circula del capacitor hacia la fuente. La mayor parte de la energía almacenada en el capacitor está regresando a la fuente de tensión ideal, excepto por la pequeña fracción disipada por la resistencia.

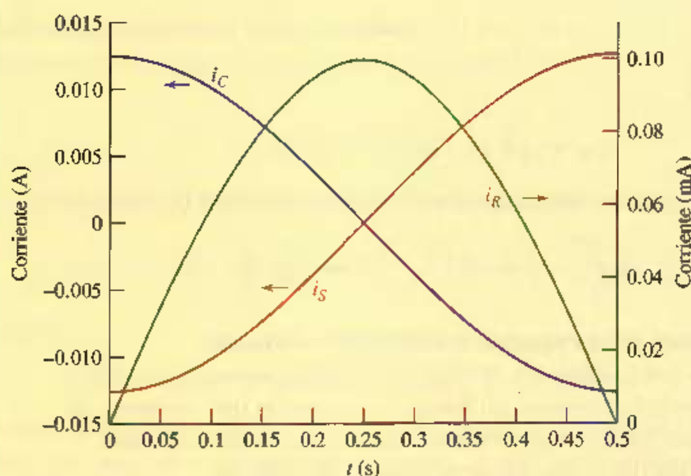


FIGURA 7.9 Gráfica de las corrientes en la resistencia, en el capacitor y en la fuente durante el intervalo de 0 a 500 ms.

PRÁCTICA

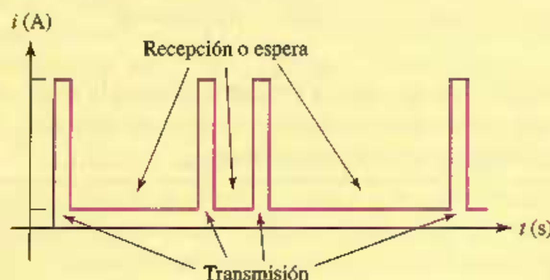
7.3 Calcular la energía almacenada en un capacitor de 1 000 μF en $t = 50$ μs si la tensión en él es de $1.5 \cos 10^5 t$ volts.

Respuesta: 90.52 μJ.

APLICACIÓN PRÁCTICA

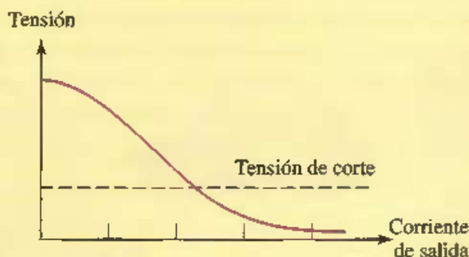
Ultracapacitores

Los teléfonos de sistemas digitales celulares y de satélite tienen tres modos de operación básicos: *en espera, recepción* y *transmisión*. Por lo común, la recepción de señales y espera no requiere de una gran cantidad de drenaje de corriente de las baterías, pero la transmisión sí (fig. 7.10). Sin embargo, el tiempo invertido en la transmisión es casi siempre una pequeña fracción del tiempo total que el dispositivo utiliza para extraer potencia, como se indica en la figura.



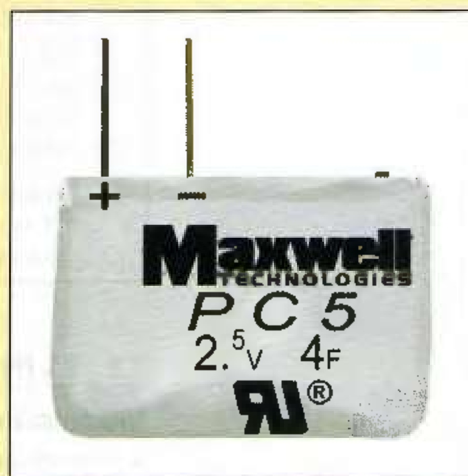
■ **FIGURA 7.10** Ciclo de trabajo característico de un teléfono celular.

Como se vio en el capítulo 5, las baterías mantienen una tensión constante sólo para pequeñas corrientes. Así, cuando aumenta la demanda de corriente, disminuye la tensión de la batería (fig. 7.11), lo cual provoca problemas, puesto que la mayoría de los circuitos tienen una tensión mínima, o *tensión de corte*, por debajo de la cual ya no funcionan de manera apropiada.



■ **FIGURA 7.11** Ejemplo de la relación tensión-corriente en una batería.

Si la corriente pico que toma del circuito es tal que la tensión de la batería disminuye por debajo de la tensión de corte, se requiere de una batería mucho más grande. Sin embargo, lo anterior suele resultar inconveniente en las aplicaciones portátiles, donde por lo general convienen baterías ligeras y pequeñas. Una alternativa para el uso exclusivo de baterías consiste en emplear un dispositivo híbrido compuesto por una batería estándar y un capacitor diseñado de manera especial (conocido algunas veces como *capacitor electroquímico* o *ultracapacitor*). Un ejemplo de dicha configuración se esboza en la figura 7.12.



■ **FIGURA 7.12** Ultracapacitor disponible en el mercado. Foto cortesía de Maxwell Technologies Inc.

El principio detrás del dispositivo híbrido es que mientras la batería se mantiene con la corriente exigida por el circuito (por ejemplo, mientras el teléfono está en el modo de *recepción*), el capacitor almacena energía de la batería ($\frac{1}{2}CV^2$). Si la demanda de corriente se incrementa de manera súbita (por ejemplo, cuando el teléfono está en operación), la tensión de la batería tratará de disminuir. En ese momento, la corriente fluirá fuera del capacitor cargado como respuesta a la dv/dt resultante. Siempre que la resistencia equivalente de Thévenin sea mucho más pequeña que la resistencia interna de la batería, la corriente circulará a través del circuito del teléfono, en vez de hacerlo por la batería. La carga dejará muy rápido al capacitor, por lo que el "empuje" de corriente tiene una corta duración. Sin embargo, si la operación de *transmisión* dura poco, el capacitor apoya de manera eficaz a la batería y evita que el circuito se interrumpa. En el capítulo 8 se estudiará cómo predecir en qué medida un capacitor ayuda a una batería, siempre que se conozca su resistencia de Thévenin y la del circuito.

Características importantes de un capacitor ideal

1. No hay corriente a través de un capacitor si la tensión en él no cambia con el tiempo. Por lo tanto, un capacitor es un *circuito abierto en cd.*
2. Se almacena una cantidad finita de energía en un capacitor incluso si la corriente que circula por él es cero, como sucede cuando la tensión entre las placas es constante.
3. Es imposible cambiar la tensión en un capacitor por una cantidad finita en el tiempo cero, ya que lo anterior requiere una corriente infinita a través del capacitor. Un capacitor se opone a un cambio abrupto de la tensión entre sus placas de una manera análoga a la forma en que un resorte se opone a un cambio abrupto en su desplazamiento.
4. Un capacitor nunca disipa energía, sólo la almacena. Si bien lo anterior es cierto en el caso del *modelo matemático,* no lo es en el de un capacitor *físico* (real) debido a las resistencias finitas.

7.2 EL INDUCTOR

Modelo del inductor ideal

A pesar de que se definió de manera estricta a un ***inductor*** desde un punto de vista de circuitos (esto es, mediante una ecuación de tensión-corriente), se podría comprender mejor la definición con unos cuantos comentarios acerca del desarrollo de la teoría de campo magnético. A principios de la década de 1800, el científico danés Oersted demostró que un conductor que lleva corriente produce un campo magnético (la aguja de una brújula resultaba afectada por un alambre cuando por éste circulaba corriente). Un poco después, Ampère realizó algunas mediciones cuidadosas que demostraron que el campo magnético se relacionaba *linealmente* con la corriente que lo producía. El siguiente paso se dio cerca de veinte años después cuando el inglés Michael Faraday y el inventor estadounidense Joseph Henry descubrieron casi de manera simultánea[3] que un campo magnético variable podía inducir una tensión en un circuito cercano. Demostraron que la tensión era proporcional a la tasa de cambio en el tiempo de la corriente que producía el campo magnético. La constante de proporcionalidad es lo que ahora se llama inductancia, simbolizada como L, por lo que

$$v = L\frac{di}{dt} \qquad [5]$$

donde se debe reconocer que v y i son, en ambos casos, funciones del tiempo. Cuando se desee subrayar esto, utilizamos los símbolos $v(t)$ e $i(t)$.

El símbolo de circuito del inductor se presenta en la figura 7.13, y debe observarse que se emplea la convención de signos pasiva, exactamente como se hizo con la resistencia y el capacitor. La unidad con la que se mide la inductancia es el ***henry*** (H), y la ecuación de definición muestra que el henry es sólo una expresión más breve de un volt-segundo por ampere.

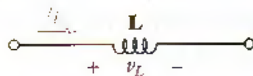


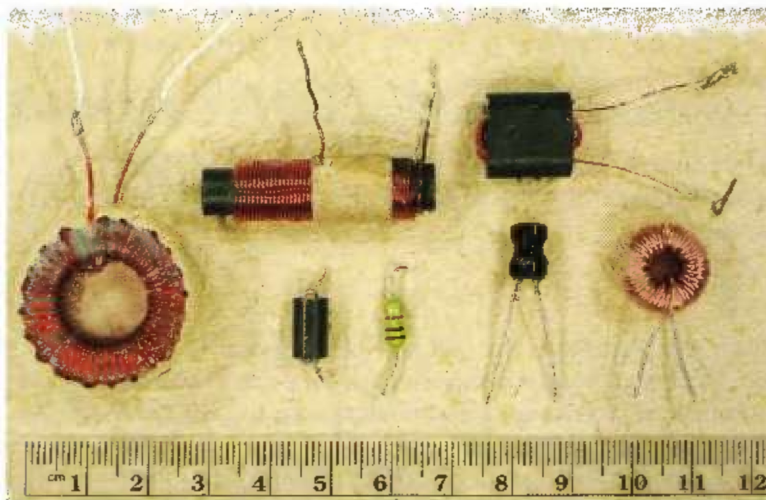
FIGURA 7.13 Símbolo eléctrico y convenciones de corriente-tensión de un inductor.

(3) Ganó Faraday.

El inductor, cuya inductancia se define mediante la ecuación [5], es un modelo matemático; constituye un elemento *ideal* que se puede utilizar para imitar el comportamiento de un dispositivo *real*. Se podría construir un inductor físico enrollando un alambre largo alrededor de un cilindro bobina. Este artefacto sirve para aumentar la corriente que provoca el campo magnético y en su caso incrementar también el "número" de circuitos vecinos en los cuales puede inducirse la tensión de Faraday. El resultado de este efecto doble es que la inductancia de una bobina es casi proporcional al cuadrado del número de vueltas completas que efectúa el conductor y de las cuales está formado. Por ejemplo, un inductor o "bobina" que tiene la forma de una hélice larga con un paso muy pequeño tiene una inductancia igual a $\mu N^2 A/s$, donde A es el área de la sección transversal, s es la longitud axial de la hélice, N es el número de vueltas completas del alambre y μ (mu) es una constante del material dentro de la hélice, llamada permeabilidad. En el espacio libre (y de manera muy aproximada, en el aire), $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m $= 4\pi$ nH/cm. En la figura 7.14 se presentan varios ejemplos de inductores disponibles comercialmente.

Analizar la ecuación [5] para determinar alguna de las características eléctricas del modelo matemático. La ecuación muestra que la tensión en un inductor resulta proporcional a la tasa de cambio en el tiempo de la corriente que circula a través de él. En particular, probar que no hay tensión en un conductor que lleva una corriente constante, sin que importe la magnitud de esta corriente. En consecuencia, es posible considerar a un inductor como un *cortocircuito en cd.*

Otro hecho que se deriva de la ecuación [5] es que un cambio repentino o discontinuo en la corriente debe asociarse con una tensión infinita en el inductor. En otras palabras, si se desea producir un cambio abrupto en una corriente de inductor, es necesario aplicar una tensión infinita. Aunque una función forzada de tensión infinita podría ser aceptable desde el punto de vista teórico, nunca puede ser parte del fenómeno exhibido por un dispositivo físico real. Como se verá en



(*a*)



(*b*)

FIGURA 7.14 (*a*) Varios tipos de inductores comunes, a los cuales, en ocasiones, también se les conoce como "reactores". En el sentido de las manecillas del reloj, comenzando por la izquierda: inductor toroidal de núcleo de ferrita de 287 μH inductor cilíndrico con núcleo de ferrita de 266 μH inductor de núcleo de ferrita de 215 μH diseñado para frecuencias de VHF, inductor toroidal de núcleo de acero laminado de 85 μH inductor estilo bobina de 10 μH inductor de plomo axial de 100 μH e inductor de núcleo suelto de 7 μH que se utiliza para suprimir señales de RF. (*b*) Inductor de 11 H cuyas medidas son 10 cm (altura) $\times$ 8 cm (ancho) $\times$ 8 cm (profundidad).

breve, un cambio abrupto en la corriente del inductor requiere también una variación abrupta en la energía almacenada en este mismo, y dicho cambio repentino en la energía requiere una potencia infinita en ese instante; también en este caso la potencia infinita no es parte del mundo físico real. Para evitar una tensión infinita y una potencia infinita, no debe permitirse que la corriente del inductor salte de forma *instantánea* de un valor a otro.

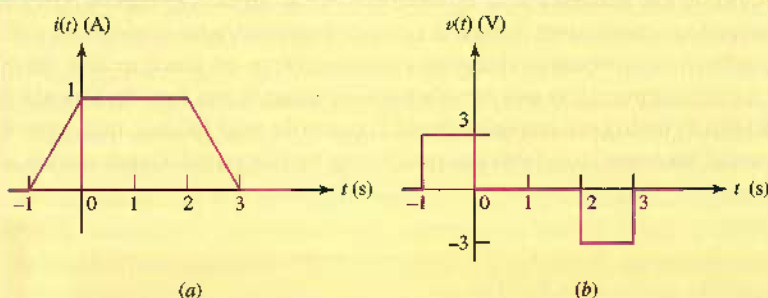


Si se intenta poner en circuito abierto un inductor físico a través del cual fluye una corriente finita, quizás aparezca un arco en el interruptor. Esto es útil en el sistema de encendido de algunos automóviles, donde el distribuidor interrumpe la corriente que circula por la bobina y aparece el arco en la bujía. Aunque no ocurre de modo instantáneo, sucede en un intervalo muy corto, lo cual origina la creación de una gran tensión. La presencia de una gran tensión en una distancia pequeña corresponde a un campo eléctrico muy grande; la energía almacenada se disipa al ionizar el aire en la trayectoria del arco.

La ecuación [5] también podría interpretarse (y resolverse, si es necesario) por métodos gráficos, como se observa en el ejemplo 7.4.

EJEMPLO 7.4

Dada la forma de onda de la corriente en un inductor de 3 H, como se muestra en la figura 7.15*a*, determinar la tensión del inductor y graficarla.



■ **FIGURA 7.15** (*a*) Forma de onda de la corriente en un inductor de 3 H. (*b*) Forma de onda correspondiente a la tensión, $v = 3\,di/dt$.

Siempre y cuando la tensión v y la corriente i se definan para cumplir con la convención de signos pasiva, se puede obtener v de la figura 7.15*a* mediante la ecuación [5]:

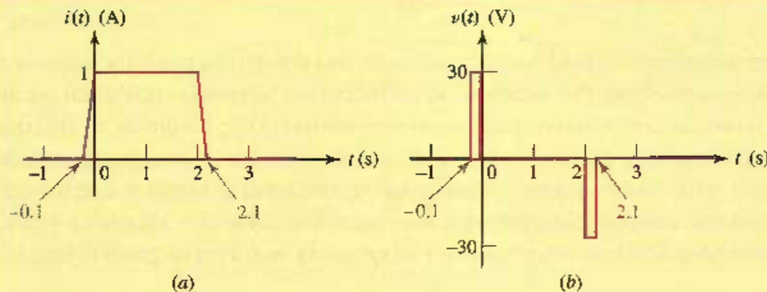
$$v = 3\frac{di}{dt}$$

Puesto que la corriente es cero para $t < -1$ s, la tensión es cero en este intervalo. Entonces la corriente empieza a aumentar a una razón lineal de 1 A/s, y por ello se produce una tensión constante de $L\,di/dt = 3$ V. Durante el siguiente intervalo de 2 s la corriente es constante y la tensión es, por lo tanto, cero. La disminución final de la corriente origina $di/dt = -1$ A/s, que produce $v = -3$ V. Para $t > 3$ s, $i(t)$) es una constante (cero), de modo que $v(t) = 0$ en ese intervalo. La forma de onda de tensión completa se bosqueja en la figura 7.15*b*.

Se investigará ahora el efecto de un aumento y de un decaimiento más rápido de la corriente entre los valores cero y 1 A.

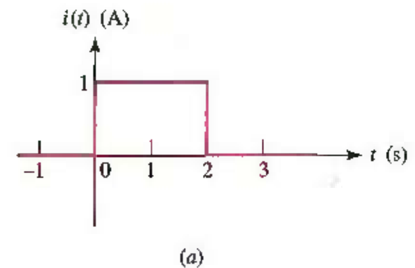
EJEMPLO 7.5

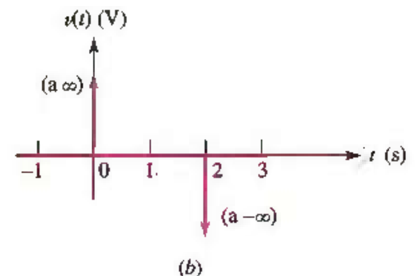
Calcular la tensión del inductor que resulta al aplicar la forma de onda de corriente de la figura 7.16*a* en el inductor del ejemplo 7.4.



■ **FIGURA 7.16** (*a*) El tiempo requerido para que la corriente de la figura 7.15*a* cambie desde 0 hasta 1, y desde 1 hasta 0, se reduce en un factor de 10. (*b*) Forma de onda de una tensión resultante. Los anchos de los pulsos se exageran para mayor claridad.

Observar que los intervalos del aumento y el descenso se redujeron a 0.1 s. De tal modo, la magnitud de cada derivada será 10 veces más grande; esta condición se muestra en los dibujos de corriente y tensión de la figura 7.16*a* y *b*. En las formas de onda de tensión de la figura 7.15*b* y 7.16*b*, resulta interesante notar que el área bajo cada pulso de tensión corresponde a 3 V-s.



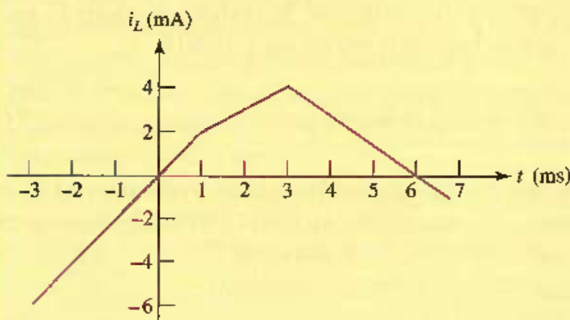


■ **FIGURA 7.17** (*a*) El tiempo requerido para que la corriente de la figura 7.16*a* cambie desde 0 hasta 1, y desde 1 hasta 0, se reduce hasta 0; el aumento y la caída son abruptos. (*b*) La tensión resultante en un inductor de 3 H se compone de un pico infinito positivo y de uno negativo.

Por el momento, sólo por curiosidad se continuará en la misma línea. Una reducción adicional de la longitud de ambos intervalos producirá una magnitud de tensión proporcionalmente mayor, pero sólo dentro del intervalo en el que la corriente crece o disminuye. Un cambio abrupto en la corriente provocará los "picos" de tensión infinita (si cada uno tiene un área de 3 V-s) como se ve en las formas de onda de la figura 7.17*a* y *b*; o, a partir de un punto de vista igualmente válido pero opuesto, tales picos de tensión infinita se requieren para producir cambios abruptos en la corriente.

PRÁCTICA

7.4 En la figura 7.18 se presenta la corriente a través de un inductor de 200 mH. Suponer la convención de signos pasiva y determinar v_L en t igual a: (*a*) 0; (*b*) 2 ms; (*c*) 6 ms.



■ **FIGURA 7.18**

Respuesta: 0.4 V; 0.2 V; –0.267 V.

Relaciones integrales de tensión-corriente

La inductancia se definió por medio de una ecuación diferencial simple,

$$v = L\frac{di}{dt}$$

y se extrajeron varias conclusiones acerca de las características de un inductor a partir de esta relación. Por ejemplo, se encontró que se podría considerar un inductor como un cortocircuito para la corriente directa, por lo que se acordó que no se puede permitir que una corriente de inductor cambie de manera abrupta de un valor a otro, debido a que requeriría que se asociaran al inductor una tensión y una potencia infinitas. Sin embargo, la ecuación de definición simple de inductancia contiene aún más información. Reexpresada en forma un poco diferente,

$$di = \frac{1}{L} v\,dt$$

invita a la integración. Considerar primero los límites que se establecerán sobre las dos integrales. Se desea la corriente i en el tiempo t, así que este par de cantidades proporciona los límites superiores de las integrales que aparecen en el lado izquierdo y en el derecho, respectivamente, de la ecuación; los límites inferiores también pueden expresarse en forma general con sólo suponer que la corriente es $i(t_0)$ en el tiempo t_0. Así,

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di' = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

lo cual conduce a la ecuación

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt'$$

o

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)} \qquad [6]$$

La ecuación [5] expresa la tensión del inductor en términos de la corriente, en tanto que la ecuación [6] ubica la corriente en términos de la tensión. También son posibles otras formas para la última ecuación. Se podría considerar la integral como indefinida que incluye una constante de integración k:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v\,dt + k \qquad [7]$$

También se podría suponer que se está resolviendo un problema real en el que la selección de t_0 como $-\infty$ asegura que no habrá corriente o energía en el inductor. Por lo tanto, si $i(t_0) = i(-\infty) = 0$, entonces:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt' \qquad [8]$$

Se investigará el uso de estas diversas integrales mediante un ejemplo simple en el que se especifica la tensión en un inductor.

EJEMPLO 7.6

Se sabe que la tensión en un inductor de 2 H corresponde a 6 cos 5*t* V. Determinar la corriente de inductor resultante si $i(t = -\pi/2) = 1$ A.

De la ecuación [6]:

$$i(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} 6\cos 5t'\,dt' + i(t_0)$$

o

$$i(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)\text{sen}5t - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)\text{sen}5t_0 + i(t_0)$$
$$= 0.6\,\text{sen}5t - 0.6\,\text{sen}5t_0 + i(t_0)$$

El primer término indica que la corriente del inductor varía de modo senoidal; el segundo y tercer términos, en conjunto, representan sólo una constante que se determina cuando la corriente se especifica en forma numérica en algún instante. Con base en el hecho de que la corriente es 1 A en $t = -\pi/2$ s, se identifica t_0 como $-\pi/2$ con $i(t_0) = 1$, y resulta:

$$i(t) = 0.6\,\text{sen}5t - 0.6\,\text{sen}(-2.5\pi) + 1$$

o

$$i(t) = 0.6\,\text{sen}5t + 1.6$$

Se obtendría el mismo resultado a partir de la ecuación [7]. Se tiene:

$$i(t) = 0.6\,\text{sen}5t + k$$

y se establece el valor numérico de k forzando que la corriente sea 1 A en $t = -\pi/2$:

$$1 = 0.6\,\text{sen}(-2.5\pi) + k$$

o

$$k = 1 + 0.6 = 1.6$$

y de ese modo, como antes,

$$i(t) = 0.6\,\text{sen}5t + 1.6$$

La ecuación [8] provocará problemas con esta tensión particular. Se fundamenta la ecuación en el supuesto de que la corriente era cero cuando $t = -\infty$. Para estar seguros, lo anterior debe ser cierto en el mundo físico real, pero se trabaja en el ámbito del modelo matemático; los elementos y funciones forzadas son ideales. La dificultad surge después de que se integra, con lo cual se obtiene

$$i(t) = 0.6\,\text{sen}\,5t'\Big|_{-\infty}^{t}$$

y al tratar de evaluar la integral en el límite inferior:

$$i(t) = 0.6\,\text{sen}5t - 0.6\,\text{sen}\,(-\infty)$$

El seno de $\pm\infty$ es indeterminado, y por lo tanto no se puede evaluar la expresión. La ecuación [8] es útil sólo si se evalúan las funciones que se aproximan a cero cuando $t \to -\infty$.

PRÁCTICA

7.5 Un inductor de 100 mH tiene una tensión de $v_L = 2e^{-3t}$ V en sus terminales. Determinar la corriente resultante en el inductor si $i_L(-0.5) = 1$ A.

Respuesta: $-\frac{20}{3}e^{-3t} + 30.9$ A.

Sin embargo, no se deben realizar juicios precipitados sobre la forma simple de las ecuaciones [6], [7] y [8] que se utilizarán por siempre, pues cada una tiene sus ventajas, según sea el problema y la aplicación. La ecuación [6] representa un método general y lento, pero que muestra con claridad que la constante de integración es una corriente. La ecuación [7] es una expresión un poco más concisa de la ecuación [6], aunque se suprime la naturaleza de la constante de integración. Por último, la ecuación [8] resulta una expresión excelente, ya que no se necesita ninguna constante; sin embargo, se aplica sólo cuando la corriente es cero en $t = -\infty$ y cuando la expresión analítica de la corriente no está indeterminada ahí.

Almacenamiento de energía

Poner atención a la potencia y la energía. La potencia absorbida está dada por el producto corriente-tensión

$$p = vi = Li\frac{di}{dt}$$

La energía w_L aceptada por el inductor se almacena en el campo magnético alrededor de la bobina y se expresa por medio de la integral de la potencia sobre el intervalo deseado:

$$\int_{t_0}^{t} p\,dt' = L\int_{t_0}^{t} i\frac{di}{dt'}\,dt' = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} i'\,di'$$

$$= \frac{1}{2}L\left\{[i(t)]^2 - [i(t_0)]^2\right\}$$

De tal modo,

$$w_L(t) - w_L(t_0) = \tfrac{1}{2}L\left\{[i(t)]^2 - [i(t_0)]^2\right\} \qquad [9]$$

donde se ha supuesto otra vez que la corriente es $i(t_0)$ en el tiempo t_0. Al usar la expresión de la energía, suele considerarse que se elige un valor de t_0 para el que la corriente es cero; se acostumbra suponer también que la energía es igual a cero para este tiempo. Entonces, simplemente se tiene:

$$\boxed{w_L(t) = \tfrac{1}{2}Li^2} \qquad [10]$$

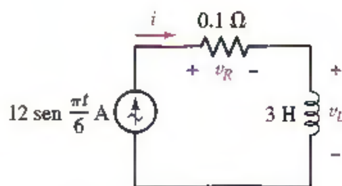


FIGURA 7.19 Una corriente senoidal se aplica como una función forzada a un circuito *RL* en serie. La resistencia de 0.1 Ω representa la resistencia inherente del alambre con el que el inductor está fabricado.

donde se entiende ahora que la referencia de la energía cero es cualquier tiempo para el que la corriente del inductor sea nula. En cualquier tiempo subsecuente, en el que la corriente es cero, se encuentra además que no se almacena energía en la bobina. Siempre que la corriente no es nula, e independientemente de su dirección o signo, la energía se almacena en el inductor. Por lo tanto, se concluye que se suministrará potencia al inductor durante una parte del tiempo y se recuperará luego de él. Toda la energía almacenada puede recuperarse de un inductor ideal; en el modelo matemático no hay cargos por almacenamiento ni comi-

siones. Una bobina física, sin embargo, debe construirse a partir de un alambre real, por lo que tendrá siempre una resistencia asociada. No se puede almacenar ni recuperar la energía sin pérdida.

Estas ideas se ilustran mediante un simple ejemplo. En la figura 7.19 se muestra un inductor de 3 H en serie con una resistencia de 0.1 Ω y una fuente de corriente senoidal, $i_s = 12 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6}$ A. La resistencia debe interpretarse como la resistencia del alambre que se necesita asociar con la bobina física.

EJEMPLO 7.7

Determinar la máxima energía almacenada en el inductor de la figura 7.19 y la que se disipa en la resistencia durante el tiempo en que se almacena en el inductor y luego se recupera del mismo.

La energía almacenada en el inductor es

$$w_L = \frac{1}{2}Li^2 = 216 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi t}{6} \qquad \text{J}$$

y esta energía aumenta desde cero en $t = 0$ hasta 216 J en $t = 3$ s. Así, la máxima energía almacenada en el inductor es igual a 216 J.

Después de alcanzar su valor máximo en $t = 3$ s, toda la energía sale del inductor. Sin embargo, esta bobina debe pagar un precio por el privilegio de almacenar y quitar 216 J en 6 segundos. La potencia disipada por la resistencia se calcula con facilidad como

$$p_R = i^2 R = 14.4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi t}{6} \qquad \text{W}$$

y la energía que se convierte en calor en la resistencia dentro de este intervalo de 6 s es, por lo tanto,

$$w_R = \int_0^6 p_R \, dt = \int_0^6 14.4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{6} t \, dt$$

o

$$w_R = \int_0^6 14.4 \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \cos \frac{\pi}{3} t\right) dt = 43.2 \text{ J}$$

De tal modo, se consumieron 43.2 J en el proceso de almacenar y luego recuperar 216 J en un intervalo de 6 s. Lo anterior representa 20% de la máxima energía almacenada, así que representa un valor razonable de muchas bobinas que tienen esta gran inductancia. En bobinas cuya inductancia es alrededor de 100 μH, se debe esperar una cifra cercana a 2 o 3%.

PRÁCTICA

7.6 Sea $L = 25$ mH en el inductor de la figura 7.20. (*a*) Calcular v en $t = 12$ ms si $i = 10te^{-100t}$ A. (*b*) Determinar i en $t = 0.1$ s si $v = 6e^{-12t}$ V e $i(0) = 10$ A. Si $i = 8(1 - e^{-40t})$ mA, calcular: (*c*) la potencia que se suministra al inductor en $t = 50$ ms, y (*d*) la energía almacenada en el inductor en $t = 40$ ms.

Respuesta: −15.06 mV; 24.0 A; 7.49 μW; 0.510 μJ.

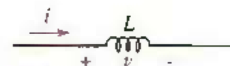


FIGURA 7.20

A continuación se resumen las cuatro características clave de un inductor que se deducen de la ecuación de definición $v = L\, di/dt$:

Características importantes de un inductor ideal

1. No hay tensión en un inductor si la corriente que circula por él no cambia con el tiempo. Desde este punto de vista, un inductor es un *cortocircuito en cd.*
2. Se almacena una cantidad finita de energía en un inductor, incluso si su tensión es nula, como cuando la corriente que pasa por él es constante.
3. Es imposible cambiar la corriente que circula por un inductor por una cantidad finita en el tiempo cero, ya que se necesitaría una tensión infinita en el inductor. Un inductor se opone a un cambio abrupto en la corriente que pasa por él, de manera análoga a la forma en que una masa se opone a un cambio abrupto en su velocidad.
4. El inductor nunca disipa energía, sólo la almacena. Si bien ello es cierto en el caso del modelo *matemático* no lo es en el de un inductor *físico* debido a las resistencias en serie

Resulta interesante adelantar la explicación de ***dualidad*** de la sección 7.6 al leer de nuevo los cuatro enunciados anteriores con ciertas palabras sustituidas por sus términos "duales". Si se intercambian *capacitor* por *inductor, capacitancia* por *inductancia, tensión* por *corriente, en* por *a través, circuito abierto* por *cortocircuito, resorte* por *masa, y desplazamiento* por *velocidad* (en cualquier dirección), se obtienen los cuatro enunciados de los capacitores que se acaban de dar.

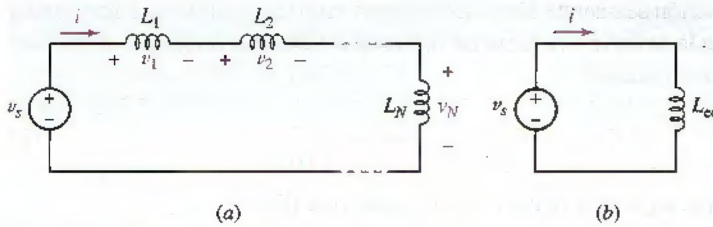
7.3 COMBINACIÓN DE INDUCTANCIA Y CAPACITANCIA

Ahora que se añadieron el inductor y el capacitor a la lista de elementos de circuitos pasivos, es necesario decidir si seguirán siendo o no válidos los métodos desarrollados para analizar circuitos resistivos. También será conveniente aprender cómo sustituir combinaciones en serie y en paralelo de cualquiera de estos elementos con equivalentes más simples, del mismo modo que se hizo en el capítulo 3 con resistencias.

Se consideran primero las dos leyes de Kirchhoff, ya que ambas son axiomáticas. Sin embargo, cuando se supusieron estas dos leyes, se hizo sin restricciones en cuanto a los tipos de elementos que constituían la red. Por lo tanto, ambas mantienen su validez.

Inductores en serie

Ahora se podrían ampliar los procedimientos obtenidos para reducir diversas combinaciones de resistencias en una resistencia equivalente a los casos análogos de inductores y capacitores. Considerar primero una fuente de tensión ideal aplicada a una combinación en serie de N inductores, como en la figura 7.21a. Se desea un solo inductor equivalente, con inductancia L_{eq}, el cual debe sustituir la combinación en serie, de modo que la corriente de la fuente $i(t)$ permanezca



■ **FIGURA 7.21** (*a*) Circuito que contiene *N* inductores en serie. (*b*) Circuito equivalente deseado, en el que $L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$.

invariable. El circuito equivalente se muestra en la figura 7.21*b*. Aplicando la LVK al circuito original,

$$\begin{aligned} v_s &= v_1 + v_2 + \cdots + v_N \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + \cdots + L_N) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

o, de manera más concisa:

$$v_s = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} L_n \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} \sum_{n=1}^{N} L_n$$

Sin embargo, en el caso del circuito equivalente se tiene

$$v_s = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

y en consecuencia la inductancia equivalente está dada por

$$L_{eq} = (L_1 + L_2 + \cdots + L_N)$$

o

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^{N} L_n \qquad [11]$$

El inductor equivalente a varios inductores conectados en serie es aquel cuya inductancia equivalga a la suma de las inductancias del circuito original, que *es exactamente el mismo resultado que se obtuvo en el caso de resistencias en serie.*

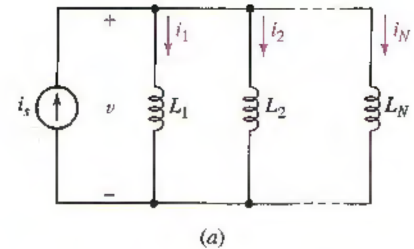
Inductores en paralelo

La combinación de varios inductores en paralelo se logra escribiendo la ecuación nodal particular del circuito original, el cual se muestra en la figura 7.22*a*,

$$\begin{aligned} i_s &= \sum_{n=1}^{N} i_n = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{L_n} \int_{t_0}^{t} v\, dt' + i_n(t_0) \right] \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L_n} \right) \int_{t_0}^{t} v\, dt' + \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0) \end{aligned}$$

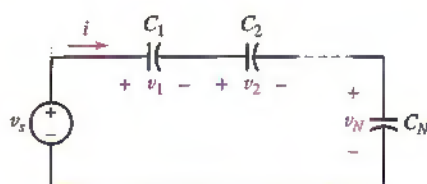
y comparándola con el resultado del circuito equivalente de la figura 7.22*b*, se obtiene

$$i_s = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^{t} v\, dt' + i_s(t_0)$$

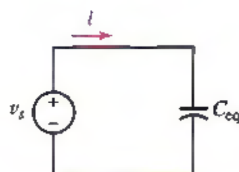




■ **FIGURA 7.22** (*a*) Combinación en paralelo de *N* inductores. (*b*) Circuito equivalente, donde $L_{eq} = [1/L_1 + 1/L_2 + \cdots + 1/L_N]^{-1}$.



(a)



(b)

FIGURA 7.23 (a) Circuito que contiene N capacitores. (b) Circuito equivalente deseado, donde $C_{eq} = [1/C_1 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_N]^{-1}$.

En razón de que la ley de Kirchhoff de corriente exige que $i_s(t_0)$ sea igual a la suma de las corrientes de rama en t_0, los dos términos integrales deben ser iguales; por consiguiente:

$$L_{eq} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + \cdots + 1/L_N} \qquad [12]$$

En el caso especial de dos inductores en paralelo se tiene:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \qquad [13]$$

en donde se observa que los inductores en paralelo se combinan de la misma forma en que lo hacen las resistencias en paralelo.

Capacitores en serie

Para determinar un capacitor que es equivalente a N capacitores en serie, se usa el circuito de la figura 7.23a y su equivalente de la figura 7.23b para escribir

$$v_s = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{C_n} \int_{t_0}^{t} i\, dt' + v_n(t_0) \right]$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^{t} i\, dt' + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0)$$

y

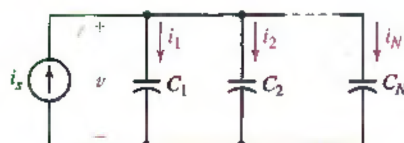
$$v_s = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^{t} i\, dt' + v_s(t_0)$$

Sin embargo, la ley de tensión de Kirchhoff establece la igualdad de $v_s(t_0)$ y la suma de las tensiones de capacitores en t_0; de tal modo,

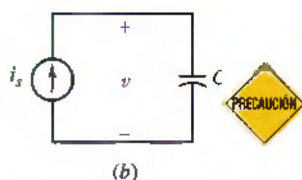
$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_N} \qquad [14]$$

por lo que los capacitores en serie se combinan como lo hacen las conductancias en serie, o las resistencias en paralelo. El caso especial de dos capacitores en serie, desde luego, da como resultado

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad [15]$$



(a)



(b)

FIGURA 7.24 (a) Combinación en paralelo de N capacitores. (b) Circuito equivalente, donde $C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$.

Capacitores en paralelo

Por último, los circuitos de la figura 7.24 permiten establecer el valor de la capacitancia del capacitor equivalente a N capacitores en paralelo, como

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N \qquad [16]$$

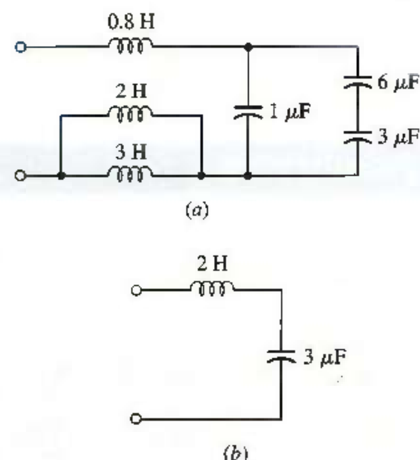
así que no resulta sorprendente observar que los capacitores en paralelo se combinan de la misma manera en que lo hacen las resistencias en serie; esto es, simplemente se suman las capacitancias individuales.

Bien vale la pena memorizar estas fórmulas. Las que se aplican a combinaciones de inductores en serie y en paralelo resultan idénticas a las de resistencias, por lo que suelen parecer "obvias". Sin embargo, hay que tener cuidado en el caso de las expresiones correspondientes a las combinaciones de capacitores en serie y en paralelo, ya que son opuestas a las de resistencias e inductores y con frecuencia provocan errores cuando los cálculos se hacen muy a la ligera.

EJEMPLO 7.8

Simplificar la red de la figura 7.25*a* mediante combinaciones serie/paralelo.

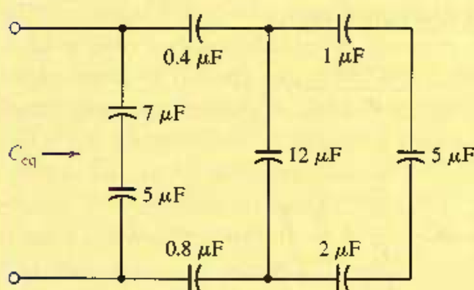
Los capacitores de 6 y 3 μF se combinan primero en un capacitor equivalente de 2 μF y éste luego se combina con un elemento de 1 μF con el que está en paralelo para producir una capacitancia equivalente de 3 μF. Además, los inductores de 3 y 2 H se sustituyen por un inductor equivalente de 1.2 H, que se suma después al elemento de 0.8 H para formar una inductancia total equivalente de 2 H. La red equivalente mucho más simple (y quizás menos costosa) se muestra en la figura 7.25*b*.



■ **FIGURA 7.25** (*a*) Red *LC* dada. (*b*) Circuito equivalente más simple.

PRÁCTICA

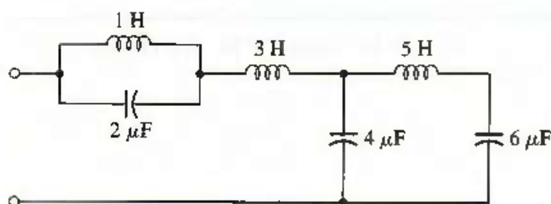
7.7 Determinar C_{eq} de la red de la figura 7.26.



■ **FIGURA 7.26**

Respuesta: 3.18 μF.

La red de la figura 7.27 contiene tres inductores y tres capacitores, pero no pueden hacerse combinaciones en serie o paralelo de los inductores o los capacitores. No se puede simplificar esta red mediante las técnicas que se presentan en este texto.



■ **FIGURA 7.27** Red *LC* en la que no es posible efectuar combinaciones en serie o en paralelo de inductores o de capacitores.

7.4 CONSECUENCIAS DE LA LINEALIDAD

A continuación se retorna al análisis nodal y de malla. En razón de que ya se sabe que se podrían aplicar con seguridad las leyes de Kirchhoff, habrá una pequeña dificultad al escribir un conjunto de ecuaciones que sean suficientes e in-

dependientes. Sin embargo, serán ecuaciones integrodiferenciales lineales con coeficientes constantes, que si son difíciles de pronunciar, son más difíciles de resolver. En consecuencia, se escribirán ahora para familiarizar al lector con el uso de las leyes de Kirchhoff en circuitos *RLC*; además, se explicará la solución de los casos más simples en los capítulos subsecuentes.

EJEMPLO 7.9

Escribir las ecuaciones nodales apropiadas del circuito de la figura 7.28.

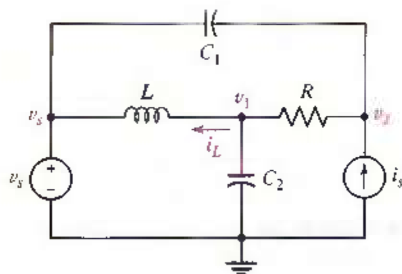


FIGURA 7.28 Circuito *RLC* de cuatro nodos con tensiones de nodo asignadas.

Las tensiones de nodo se eligen como se indica y se suman las corrientes que salen del nodo central:

$$\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}(v_1 - v_s)\,dt' + i_L(t_0) + \frac{v_1 - v_2}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} = 0$$

donde $i_L(t_0)$ es el valor de la corriente del inductor en el tiempo en el que empieza la integración. En el nodo del lado derecho,

$$C_1\frac{d(v_2 - v_s)}{dt} + \frac{v_2 - v_1}{R} - i_s = 0$$

Al reexpresar estas ecuaciones,

$$\frac{v_1}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_1\,dt' - \frac{v_2}{R} = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_s\,dt' - i_L(t_0)$$

$$-\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + C_1\frac{dv_2}{dt} = C_1\frac{dv_s}{dt} + i_s$$

que son las ecuaciones integrodiferenciales prometidas, surgen varios asuntos interesantes en relación con ellas. Primero, ocurre que la fuente de tensión v_s entra en las ecuaciones como una integral y como una derivada, no simplemente como v_s. Puesto que ambas fuentes están especificadas para todo el tiempo, se podrá evaluar la derivada o la integral. Segundo, el valor inicial de la corriente del inductor, $i_L(t_0)$, actúa como una corriente de fuente (constante) en el nodo central.

PRÁCTICA

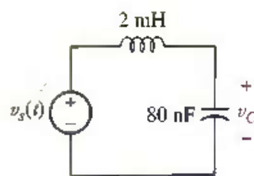


FIGURA 7.29

7.8 Si $v_C(t) = 4\cos 10^5 t$ V en el circuito de la figura 7.29, determinar $v_s(t)$.

Respuesta: $-2.4\cos 10^5 t$ V.

No se intentará resolver la ecuación integrodiferencial en este momento. Sin embargo, vale la pena señalar que cuando las funciones forzadas de tensión son funciones senoidales del tiempo, se podrá definir una razón de tensión-corriente (denominada ***impedancia***) o una razón de corriente-tensión (llamada ***admitancia***) para cada uno de los tres elementos pasivos. Los factores que funcionan bajo las dos tensiones de nodo de las ecuaciones precedentes, se convertirán entonces en simples factores multiplicadores, por lo que las ecuaciones serán otra vez

algebraicas lineales y se podrían resolver mediante determinantes o por una simple eliminación de variables, como antes.

También se podría demostrar que los beneficios de la linealidad se aplican de igual modo a los circuitos *RLC*. De acuerdo con la definición previa de un circuito lineal, tales circuitos son también lineales, debido a que las relaciones de tensión-corriente para el inductor y el capacitor son lineales. Para el inductor, se tiene

$$v = L\frac{di}{dt}$$

y la multiplicación de la corriente por alguna constante K tiene como resultado una tensión que es también más grande por un factor K. En la formulación integral,

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)$$

puede verse que, si cada término se incrementa por un factor de K, entonces el valor inicial de la corriente debe aumentarse por este mismo factor.

El análisis correspondiente del capacitor muestra que también es lineal. Por consiguiente, un circuito compuesto por fuentes independientes, fuentes dependientes lineales, y resistencias, inductores y capacitores lineales es un circuito lineal.

En este circuito lineal la respuesta resulta otra vez proporcional a la función forzada. La prueba del enunciado se obtiene escribiendo primero un sistema general de ecuaciones integrodiferenciales. Se colocan todos los términos que tienen la forma $Ri, L\,di/dt$, y $1/C\int i\,dt$ en el miembro izquierdo de cada ecuación; además, se conservan las tensiones de fuente independiente en el miembro derecho. Como simple ejemplo, una de las ecuaciones podría tener la forma

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' + v_C\,(t_0) = v_s$$

Si cada fuente independiente se incrementa ahora por un factor K, el miembro derecho de cada ecuación es multiplicado por ese mismo factor. En estas condiciones, cada término del miembro izquierdo es un término lineal que incluye alguna corriente de lazo, o una tensión de capacitor inicial. A fin de provocar que todas las respuestas (corrientes de lazo) se incrementen por un factor K, resulta patente que también se deben aumentar las tensiones de capacitor iniciales por un factor K. Es decir, se debe tratar a la tensión inicial del capacitor como una tensión de fuente independiente e incrementarla del mismo modo por un factor K. De manera similar, las corrientes de inductor iniciales aparecen como corrientes de fuente independiente en el análisis nodal.

Por lo tanto, el principio de proporcionalidad entre fuentes y respuesta se extiende al circuito *RLC* general, y se deduce que también se aplica el principio de superposición. Debe subrayarse que las corrientes iniciales del inductor y las tensiones iniciales del capacitor deben considerarse como fuentes independientes al aplicar el principio de superposición; cada valor inicial se desactiva de acuerdo con su turno. En el capítulo 5 se aprendió que el principio de superposición es una consecuencia natural de la naturaleza lineal de los circuitos resistivos, los cuales son lineales debido a que la relación tensión-corriente de la resistencia es lineal, al igual que las leyes de Kirchhoff.

Sin embargo, antes de aplicar el principio de superposición a circuitos *RLC* se deben establecer métodos para resolver las ecuaciones que describen a estos circuitos cuando sólo está presente una fuente independiente. Esta vez es impor-

tante estar convencidos de que un circuito lineal poseerá una respuesta cuya amplitud es proporcional a la amplitud de la fuente. Se debe estar preparado para aplicar después la superposición, al considerar una corriente de inductor o una tensión de capacitor especificada en $t = t_0$ como una fuente que debe eliminarse cuando le llega su turno.

Los teoremas de Thévenin y Norton se basan en la linealidad del circuito inicial, en la aplicabilidad de las leyes de Kirchhoff y en el principio de superposición. El circuito *RLC* general satisface por completo estos requisitos, por lo cual se concluye que todos los circuitos lineales que contienen cualesquiera combinaciones de fuentes de tensión y de corriente independientes, fuentes de tensión y de corriente lineales dependientes, y resistencias, inductores y capacitores lineales se analizan con el uso de ambos teoremas, si se desea. No es necesario repetir los teoremas aquí, ya que se enunciaron antes, de una manera que se aplica por igual al circuito *RLC* general.

7.5 CIRCUITOS DE AMP OP SIMPLES CON CAPACITORES

En el capítulo anterior se presentaron varios tipos diferentes de circuitos de amplificador basados en el amp op ideal. En casi todos los casos se demostró que la salida se relacionaba con la tensión de entrada mediante alguna combinación de razones de resistencias. Si se sustituyen una o más de tales resistencias por un capacitor, se obtendrán algunos circuitos interesantes en los que la salida resulta proporcional a la derivada o la integral de la tensión de entrada. Dichos circuitos tienen amplias aplicaciones en la práctica. Por ejemplo, se conecta un sensor de velocidad a un circuito de amp op que da una señal proporcional a la aceleración, o se obtiene una señal de salida que representa la carga total incidente sobre un electrodo metálico durante un tiempo específico al sólo integrar la corriente medida.

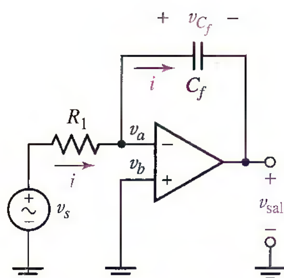


FIGURA 7.30 Amp op conectado como un integrador.

Para crear un integrador mediante un amp op ideal, se conecta a tierra la entrada no invertida, se instala un capacitor ideal como un elemento de retroalimentación desde la salida de regreso a la entrada invertida y se conecta una fuente de señales v_s a la entrada invertida a través de una resistencia ideal, como se muestra en la figura 7.30.

Al efectuar el análisis nodal en la entrada invertida,

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + i$$

La corriente i se relaciona con la tensión en el capacitor,

$$i = C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

Lo cual da

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

Con base en la regla 2 del amp op, se sabe que $v_a = v_b = 0$, por lo que

$$0 = \frac{-v_s}{R_1} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

Integrando y despejando v_{sal}, se obtiene

$$v_{C_f} = v_a - v_{sal} = 0 - v_{sal} = \frac{1}{R_1 C_f} \int_0^t v_s \, dt' + v_{C_f}(0)$$

o

$$v_{sal} = -\frac{1}{R_1 C_f}\int_0^t v_s\,dt' - v_{C_f}(0) \qquad [17]$$

Por lo tanto, se combina una resistencia, un capacitor y un amp op para formar un integrador. Observar que el primer término de la salida es $1/RC$ veces el negativo de la integral de la entrada desde $t' = 0$ hasta t, además, el segundo término es el negativo del valor inicial de v_{C_f}. El valor de $(RC)^{-1}$ se iguala con la unidad si se desea elegir $R = 1\ \text{M}\Omega$ y $C = 1\ \mu\text{F}$, por ejemplo; se podrían hacer otras elecciones que aumenten o disminuyan la tensión de salida.

Antes de concluir con el circuito integrador, se podría anticipar una pregunta al lector crítico: *¿Se podría usar un inductor en lugar del capacitor y obtener un diferenciador?* En realidad sí, pero los diseñadores de circuito suelen evitar, siempre que es posible, el uso de inductores debido a su tamaño, peso y costo, así como a la resistencia y a la capacitancia asociadas. En vez de eso, se intercambian las posiciones de la resistencia y el capacitor en la figura 7.30 y se obtiene un diferenciador.

EJEMPLO 7.10

Obtener la expresión de la tensión de salida del circuito de amp op que se muestra en la figura 7.31.

Se comienza escribiendo una ecuación nodal en la patilla (terminal) de entrada invertida, con $v_{C_1} \triangleq v_a - v_s$:

$$0 = C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{v_a - v_{sal}}{R_f}$$

De acuerdo con la regla 2 del amp op, $v_a = v_b = 0$. De tal modo,

$$C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{v_{sal}}{R_f}$$

Despejando para v_{sal},

$$v_{sal} = R_f C_1\frac{dv_{C_1}}{dt}$$

Puesto que $v_{C_1} = v_a - v_s = -v_s$,

$$v_{sal} = -R_f C_1\frac{dv_s}{dt}$$

Así, al intercambiar la resistencia y el capacitor entre sí en el circuito de la figura 7.30, se obtiene un diferenciador en lugar de un integrador.

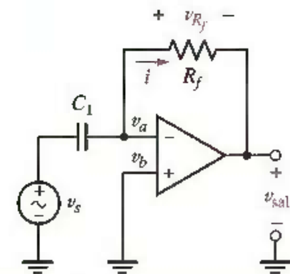


FIGURA 7.31 Amp op ideal conectado como un diferenciador.

PRÁCTICA

7.9 Obtener la expresión de v_{sal} en términos de v_{ent} en el circuito de la figura 7.32.

Respuesta: $v_{sal} = -L_f/R_1\, dv_s/dt$.

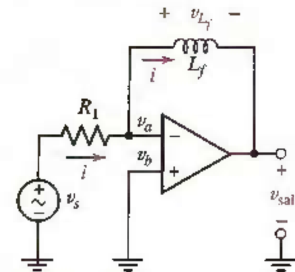
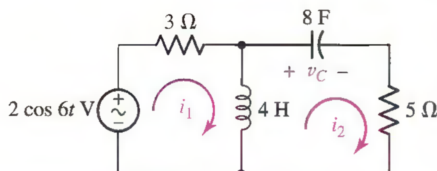


FIGURA 7.32

7.6 DUALIDAD

La idea de ***dualidad*** se aplica a muchos conceptos fundamentales de ingeniería. En esta sección se definirá la dualidad en términos de las ecuaciones de circuito. Dos circuitos son "duales" si las ecuaciones de malla que caracterizan a uno de ellos tienen la *misma forma matemática* que las ecuaciones nodales que caracterizan al otro. Se dice que son duales exactos si cada ecuación de malla de un circuito es numéricamente idéntica a la ecuación nodal correspondiente del otro; desde luego, las variables de corriente y de tensión por sí mismas no pueden ser idénticas. La dualidad misma se refiere sólo a cualquiera de las propiedades exhibidas por los circuitos duales.



■ **FIGURA 7.33** Circuito dado para el que la definición de dualidad se aplica a fin de determinar el circuito dual. Observe que $v_C(0) = 10$ V.

Interpretar la definición y utilizarla para construir un circuito dual exacto escribiendo las dos ecuaciones de malla para el circuito de la figura 7.33. Se asignan dos corrientes de malla i_1 e i_2 y se obtienen las siguientes ecuaciones de malla:

$$3i_1 + 4\frac{di_1}{dt} - 4\frac{di_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad [18]$$

$$-4\frac{di_1}{dt} + 4\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t i_2\,dt' + 5i_2 = -10 \qquad [19]$$

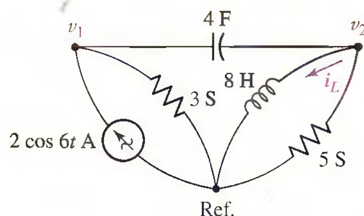
Se podría ahora construir las dos ecuaciones que describen el dual exacto del circuito. Se desea que sean ecuaciones nodales; por ello, se comienza por la sustitución de las corrientes de mallas i_1 e i_2 en las ecuaciones [18] y [19] por dos tensiones de nodo con referencia a v_1 y v_2. Así se obtiene

$$3v_1 + 4\frac{dv_1}{dt} - 4\frac{dv_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad [20]$$

$$-4\frac{dv_1}{dt} + 4\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t v_2\,dt' + 5v_2 = -10 \qquad [21]$$

después de este resultado, se busca el circuito representado por ambas ecuaciones nodales.

Dibuje primero una línea para representar el nodo de referencia y luego establezca dos nodos en los que se ubiquen las referencias positivas de v_1 y v_2. La ecuación [20] indica que una fuente de corriente de 2 cos 6t A se conecta entre el nodo 1 y el nodo de referencia, orientado para proporcionar la corriente que entra en el nodo 1. La ecuación muestra también que aparece una conductancia de 3 S entre el nodo 1 y el nodo de referencia. Regrese a la ecuación [21] y considere primero los términos no mutuos, es decir, aquellos que no aparecen en la ecuación [20]. Ellos indican que se conecta un inductor de 8 H y una conductancia de 5 S (en paralelo) entre el nodo 2 y el de referencia. Los dos términos semejantes de las ecuaciones [20] y [21] representan un capacitor de 4 F presente de manera mutua en los nodos 1 y 2; el circuito se completa conectando dicho capacitor entre los dos nodos. El término constante en el miembro derecho de la ecuación [21] es el valor de la corriente del inductor en $t = 0$; en otras palabras, $i_L(0) = 10$ A. El circuito dual se presenta en la figura 7.34; puesto que los dos conjuntos son numéricamente idénticos, los circuitos son duales exactos.



■ **FIGURA 7.34** Dual exacto del circuito de la figura 7.33.

Los circuitos duales se pueden obtener con mayor rapidez por este método, ya que las ecuaciones no necesitan escribirse. Para construir el dual de un circuito dado, se debe considerar al circuito en términos de ecuaciones de malla. Con cada malla es necesario asociar un nodo de no referencia, y además, proporcionar el nodo de referencia. Por lo tanto, en el esquema del circuito dado se pone

un nodo en el centro de cada malla y se indica el nodo de referencia como una línea cerca del esquema o un lazo que lo encierra. Cada elemento que aparece de manera colectiva en las dos mallas es un elemento mutuo y origina términos idénticos, excepto por el signo, en las dos ecuaciones de malla correspondientes, por lo cual debe sustituirse por un elemento que proporcione el término dual en las dos ecuaciones nodales correspondientes. Por lo tanto, dicho elemento dual debe conectarse de manera directa entre los dos nodos de no referencia que están dentro de las mallas en las que aparecen los elementos mutuos dados.

La naturaleza del elemento dual se determina con facilidad; la forma matemática de las ecuaciones será la misma sólo si la inductancia se sustituye por la capacitancia, ésta por la inductancia, la conductancia por la resistencia, y la resistencia por la conductancia. De esta forma, el inductor de 4 H que es común a las mallas 1 y 2 del circuito de la figura 7.33 aparece como un capacitor de 4 F conectado en forma directa entre los nodos 1 y 2 del circuito dual.

Los elementos que aparecen sólo en una malla deben tener duales que aparezcan entre el nodo correspondiente y el nodo de referencia. Al considerar otra vez la figura 7.33, la fuente de tensión 2 cos 6t V aparece sólo en la malla 1; su *dual* es una fuente de corriente 2 cos 6t A, que se conecta sólo al nodo 1 y al de referencia. En razón de que la fuente de tensión se dirige en el sentido de las manecillas del reloj, la de corriente debe estar dentro del nodo de no referencia dirigido. Por último, es necesario tomar provisiones respecto del dual de la tensión inicial presente en el capacitor de 8 F del circuito dado. Las ecuaciones nos demostraron que el dual de la tensión inicial en el capacitor es una corriente inicial a través del inductor del circuito dual; los valores numéricos son los mismos, así que el signo correcto de la corriente inicial tal vez se determine con mayor facilidad si se consideran como fuentes la tensión inicial en el circuito dado y la corriente inicial en el circuito dual. En consecuencia, si v_C en el circuito dado se ve como una fuente, aparecería como $-v_C$ en el miembro derecho de la ecuación de malla; en el circuito dual, si se piensa que la corriente i_L fuese una fuente, produciría un término $-i_L$ en el miembro derecho de la ecuación nodal. Debido a que cada una tiene el mismo signo cuando se consideran como fuente, entonces si $v_C(0) = 10\,\text{V}$, $i_L(0)$ debe ser 10 A.

El circuito de la figura 7.33 se repite en la figura 7.35, y su dual exacto se construye en el propio diagrama de circuito al dibujar sólo el dual de cada elemento dado entre los dos nodos que están dentro de las dos mallas comunes al elemento en cuestión. Quizá sea de utilidad un nodo de referencia que rodee al circuito dado. Después de que el circuito dual se vuelve a dibujar en una forma más normal, aparece como en la figura 7.34.

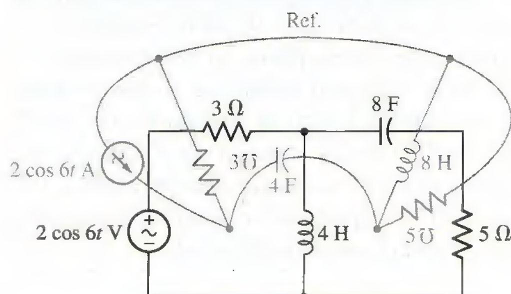


FIGURA 7.35 Dual del circuito de la figura 7.33 que se construye en forma directa del diagrama de circuito.

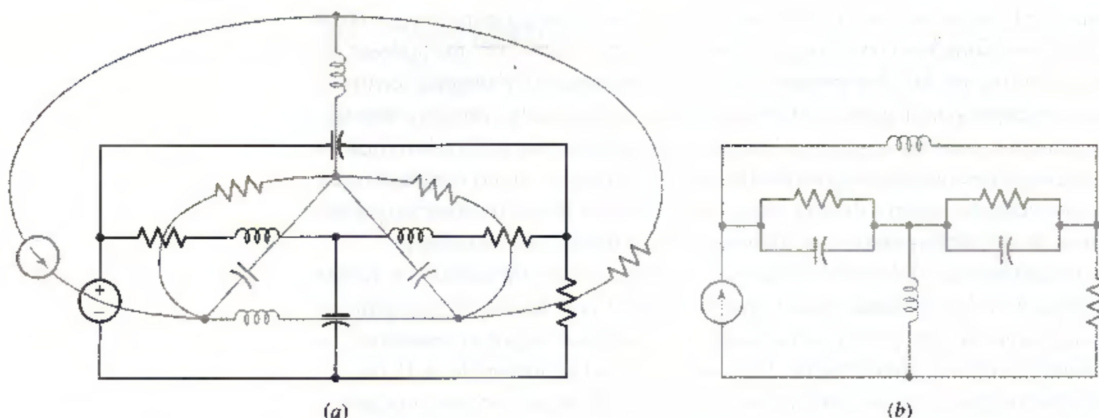


FIGURA 7.36 (*a*) Dual (en gris) de un circuito dado (en negro) construido sobre este último. (*b*) Circuito dual dibujado en forma más convencional a fin de compararlo con el original.

Un ejemplo adicional de la construcción de un circuito dual se presenta en la figura 7.36*a* y *b*. Puesto que no se especifican valores de elementos particulares, ambos circuitos son duales, pero no necesariamente duales exactos. El circuito original tal vez se recupere del dual, al colocar un nodo en el centro de cada una de las cinco mallas de la figura 7.36*b* y proceder como se hizo con anterioridad.

El concepto de dualidad también se expresa con el lenguaje utilizado para describir el análisis o la operación de circuitos. Por ejemplo, si se tiene una fuente de tensión en serie con un capacitor, quizá se desee plantear un importante enunciado: *la fuente de tensión provoca que fluya una corriente por el capacitor*; cuyo enunciado dual es: *la fuente de corriente ocasiona que exista una tensión entre los extremos del inductor*. El dual de un enunciado expresado de manera menos cuidadosa, como *la corriente circula una y otra vez por un circuito en serie* quizá requiera un poco menos de inventiva.[4]

Se puede practicar el uso del lenguaje dual leyendo el teorema de Thévenin en este sentido; de ello debe resultar el teorema de Norton.

Se ha hablado de elementos, lenguaje y circuitos duales. ¿Qué sucede con una red dual? Considerar una resistencia R y un inductor L en serie. El dual de dicha red de dos terminales existe y se obtiene con mayor facilidad al conectar alguna fuente ideal a esa red. El circuito dual se obtiene entonces como la fuente dual en paralelo con una conductancia G de misma magnitud que R, y una capacitancia C que tiene la misma magnitud que L. Se considera la red dual como la red de dos terminales que se conecta a una fuente dual; así pues, corresponde a un par de terminales entre las cuales G y C se conectan en paralelo.

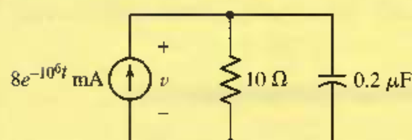
Antes de dejar la definición de dualidad, debe señalarse que se define con base en las ecuaciones de malla y nodales. En razón de que los circuitos no planares (forma no plana) se describen mediante un sistema de ecuaciones de malla, un circuito que no pueda dibujarse en forma planar no posee un dual.

Sobre todo, se usa la dualidad a fin de reducir el trabajo que se debe efectuar para analizar los circuitos estándares simples. Luego de analizar el circuito RL en serie, el circuito RC en paralelo requiere menos atención, no porque sea menos importante, sino en virtud de que ya se conoce el análisis de la red dual. Debido a que el análisis de algunos circuitos complicados no se presta a conocerse bien, a menudo la dualidad no proporcionará una solución rápida.

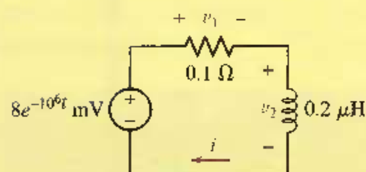
(4) Alguien sugirió: "la tensión es la misma en los extremos del circuito en paralelo".

PRÁCTICA

7.10 Escribir una ecuación nodal simple del circuito de la figura 7.37*a*, y mostrar, mediante sustitución directa, que $v = -80e^{-10^6 t}$ mV es una solución. Con base en lo anterior, determinar (*a*) v_1; (*b*) v_2 y (*c*) i para el circuito de la figura 7.37*b*.



(*a*)



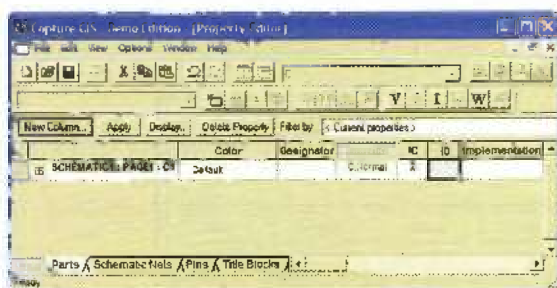
(*b*)

■ **FIGURA 7.37**

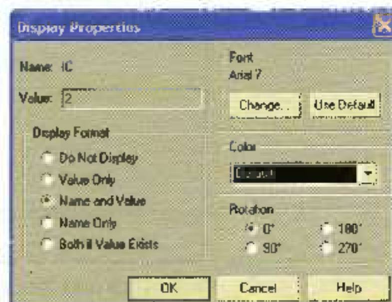
Respuesta: $-8e^{-10^6 t}$ mV; $16\,e^{-10^6 t}$ mV; $-80e^{-10^6 t}$ mA.

7.7 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE CAPACITORES E INDUCTORES CON PSPICE

Cuando se usa PSpice para analizar circuitos que contienen inductores y capacitores, con frecuencia se necesita especificar la condición inicial de cada elemento [es decir, $v_C(0)$ e $i_L(0)$]. Lo anterior se consigue haciendo doble clic sobre el símbolo del elemento, lo que despliega la ventana de diálogo que se muestra en la figura 7.38*a*. En el extremo derecho (no se muestra), puede verse el valor de la capacitancia, el cual es por omisión igual a 1 nF. Se especifica también la condición inicial (IC), a 2 V en la figura 7.38*a*. Si se hace clic en el botón derecho del ratón y se selecciona Display, se presenta la ventana de diálogo que se muestra en la figura 7.38*b*, la cual permite que se despliegue la condición inicial en el diagrama. El procedimiento para configurar la condición inicial de un inductor es, esencialmente, el mismo. Asimismo, se puede observar que cuando el capacitor se pone primero en el esquema aparece en forma horizontal; la terminal de referencia positiva de la tensión inicial es la terminal *izquierda*.



(*a*)

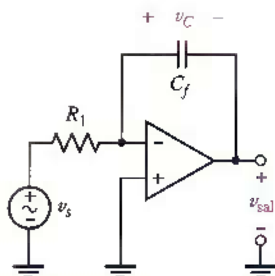


(*b*)

■ **FIGURA 7.38** (*a*) Ventana de edición de las propiedades del capacitor. (*b*) Ventana de diálogo de las propiedades de despliegue.

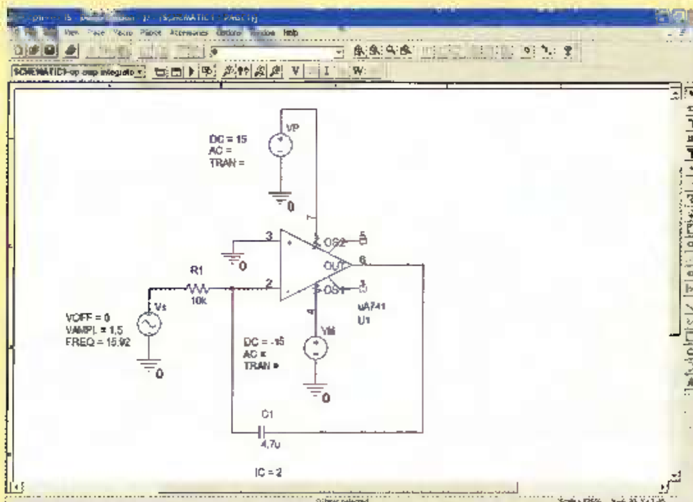
EJEMPLO 7.11

Simular la forma de onda de la tensión de salida del circuito de la figura 7.39 si $v_s = 1.5$ sen $100t$ V, $R_1 = 10$ kΩ, $C_f = 4.7$ μF y $v_C(0) = 2$ V.



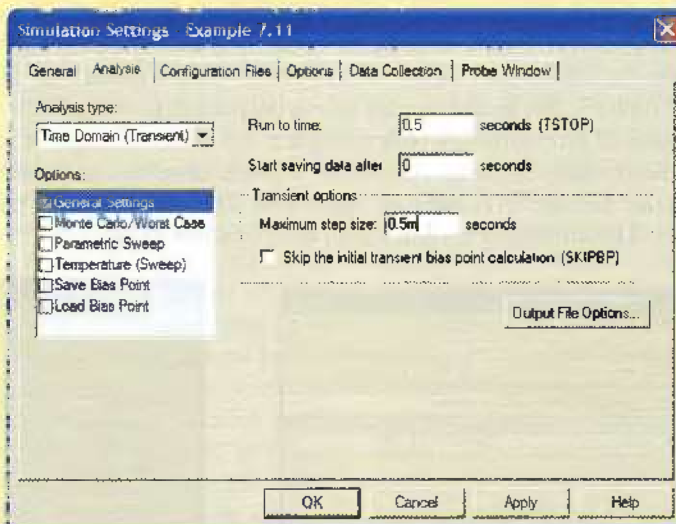
■ **FIGURA 7.39** Circuito de un amp op integrador.

Se empieza dibujando el circuito esquemático, cerciorándose de establecer la tensión inicial en el capacitor (fig. 7.40). Observar que fue necesario convertir la frecuencia de 100 rad/s en $100/2\pi = 15.92$ Hz.



■ **FIGURA 7.40** Representación esquemática del circuito que se muestra en la figura 7.39 donde la tensión inicial del capacitor tiene un valor de 2 V.

Para obtener tensiones y corrientes variables en el tiempo, es necesario efectuar lo que se conoce como *análisis transitorio*. En el menú **PSpice** se crea un **New Simulation Profile** con el nombre **op amp integrator,** el cual conduce al cuadro de diálogo que se muestra en la figura 7.41. **Run to time**



■ **FIGURA 7.41** Ventana de diálogo para configurar un análisis transitorio. Se selecciona un tiempo final de 0.5 s para obtener varios periodos de la forma de onda de salida (1/15.92 ≈ 0.06 s).

representa el momento en el que terminará la simulación; PSpice seleccionará sus tiempos discretos en los que hará los cálculos de las diferentes tensiones y corrientes. En ocasiones se obtiene un mensaje de error que anuncia que no pudo converger la solución transitoria o que la forma de onda de salida no está tan pareja como se esperaba. En dichas situaciones, es de utilidad configurar un valor en **Maximum step size,** el cual se fijó en 0.5 en este ejemplo.

Del análisis anterior y de la ecuación [17], se espera que la salida sea proporcional a la integral negativa de la forma de onda de entrada, es decir, $v_{sal} = 0.319 \cos 100t - 2.319$ V, como se muestra en la figura 7.42. La condición inicial de 2 V en el capacitor se combina con un término constante a partir de la integración para dar como resultado un *valor promedio diferente de cero* a la salida, a diferencia de la entrada que tiene un valor promedio de cero.

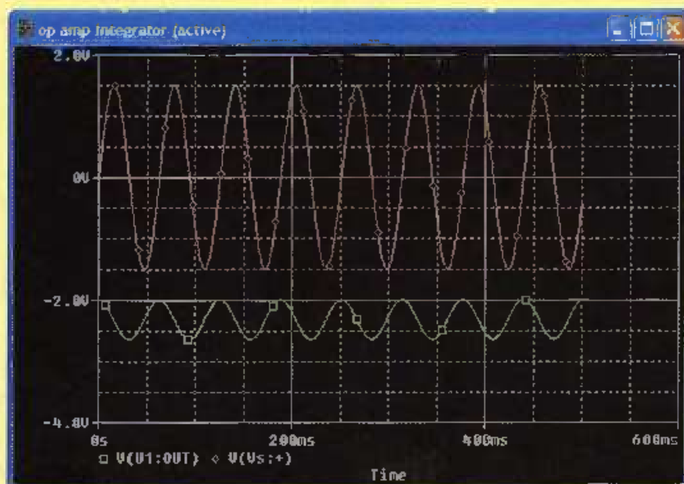


FIGURA 7.42 Salida de prueba del circuito integrador simulado junto con la forma de onda de entrada para efectos de comparación.

RESUMEN Y REPASO

- La corriente que circula por el capacitor está dada por $i = C\, dv/dt$.
- La tensión en el capacitor se relaciona con su corriente por medio de:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\, dt' + v(t_0)$$

- Un capacitor es un *circuito abierto* en cd.
- La tensión en un inductor está dada por $v = L\, di/dt$.
- La corriente que circula por un inductor se relaciona con su tensión mediante:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\, dt' + i(t_0)$$

- Un inductor es un *cortocircuito* en cd.

- La energía almacenada en el capacitor está dada por $\frac{1}{2}\,Cv^2$, mientras que la energía almacenada en el inductor está dada por $\frac{1}{2}\,Li^2$; ambas están referidas al momento en el que no se almacenó energía.
- Las combinaciones de inductores en serie y en paralelo se combinan mediante la aplicación de las mismas ecuaciones que las de resistencias.
- Las combinaciones de capacitores en serie y en paralelo funcionan de manera *opuesta* a la de las resistencias.
- Un capacitor como el elemento de retroalimentación de un amp op inversor origina una tensión de salida proporcional a la *integral* de la tensión de entrada. El intercambio de la resistencia de entrada y el capacitor de retroalimentación causa una tensión de salida proporcional a la *derivada* de la tensión de entrada.
- En razón de que los capacitores y los inductores son elementos lineales, la LVK, la LCK, la superposición, los teoremas de Thévenin y Norton, así como los análisis nodal y de malla se aplican también en sus circuitos.
- El concepto de dualidad proporciona otra perspectiva respecto de la relación entre circuitos con inductores y circuitos con capacitores.
- PSpice permite establecer la tensión inicial en un capacitor y la corriente inicial a través de un inductor. Un análisis transitorio proporciona detalles de la respuesta, en función del tiempo, de los circuitos que contienen estos tipos de elementos.

LECTURAS ADICIONALES

En los libros que se mencionan a continuación se puede encontrar una guía detallada de las características y selección de varios tipos de capacitores e inductores:

H. B. Drexler, *Passive Electronic Component Handbook*, 2a. ed., C.A. Harper, ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2003, pp. 69-203.

C. J. Kaiser, *The Inductor Handbook*, 2a. ed. Olathe, Kans.: C. J. Publishing,1996.

Dos buenos libros que describen los circuitos amp op basados en capacitores son:

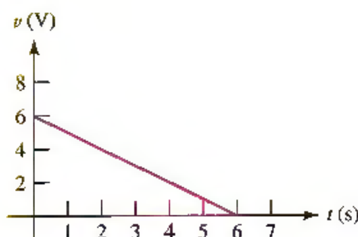
R. Mancini (ed), *Op Amps Are For Everyone*, 2a. ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

W. G. Jung, *Op Amp Cookbook*, 3a. ed. Upper Saddle River, N. J.: Prentice Hall, 1997.

EJERCICIOS

7.1 El capacitor

1. Calcular la corriente que circula por un capacitor de 10 μF si la tensión en las terminales es: (*a*) 5 V; (*b*) $115\sqrt{2}\cos 120\pi t$ V; (*c*) $4e^{-t}$ mV.
2. Hacer un dibujo de la onda de corriente que circula por un capacitor de 4.7 μF como respuesta a una forma de onda de tensión que se muestra en la figura 7.43. Suponer que la corriente y la tensión se definen de manera congruente con la convención pasiva de signos.
3. Calcular la corriente que circula a través de un capacitor de 1 mF como respuesta a una tensión v en sus terminales si v es igual a: (*a*) $30te^{-t}$ V; (*b*) $4e^{-5t}\,\text{sen}\,100t$ V.
4. ¿Cuál es la cantidad máxima de energía que puede almacenarse en cada uno de los capacitores electrolíticos de la figura 7.2*b* y *c*? Explicar la respuesta.
5. Un capacitor se fabrica a partir de dos delgados discos de aluminio de 1 cm de diámetro, separados por una distancia de 100 μm (0.1 mm). (*a*) Calcular la capaci-



■ FIGURA 7.43

tancia suponiendo que sólo hay aire entre las placas metálicas. (*b*) Determinar la tensión que debe aplicarse para almacenar en el capacitor 1 mJ de energía. (*c*) Si se necesita que el capacitor almacene 2.5 μJ de energía en una aplicación que suministra hasta 100 V, ¿qué valores de permisividad relativa $\varepsilon/\varepsilon_0$ se requerirían para la región entre las placas?

6. Un diodo de silicio de unión *pn* se caracteriza por una capacitancia de unión definida como

$$C_j = \frac{K_s \varepsilon_0 A}{W}$$

donde $K_s = 11.8$ del silicio, ε_0 es la permisividad del vacío, $A =$ el área de la sección transversal de la unión, y W se conoce como el ancho de agotamiento de la unión. W no sólo depende de la manera en que se fabrica el diodo, sino también de la tensión aplicada en sus dos terminales. Puede calcularse por medio de

$$W = \sqrt{\frac{2K_s\varepsilon_0}{qN}(V_{bi} - V_A)}$$

De tal forma, los diodos se emplean con frecuencia en circuitos electrónicos, puesto que se consideran como capacitores controlados por tensión. Suponiendo valores de parámetros de $N = 10^{18}$ cm^{-3}, $V_{bi} = 0.57$ V, y empleando $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C, calcular la capacitancia de un diodo con área de sección transversal $A = 1\ \mu\text{m} \times 1\ \mu\text{m}$ a tensiones aplicadas de $V_A = -1, -5$ y -10 volts.

D 7. Diseñar un capacitor cuya capacitancia pueda variarse en forma manual entre 100 pF y 1 nF al girar una perilla. Incluir esquemas marcados de modo apropiado para explicar su diseño.

8. Una tensión de $v(t) = \begin{cases} 3\text{ V} & t < 0 \\ 3e^{-t/5}\text{ V}, & t \geq 0 \end{cases}$ se aplica a un capacitor de 300 μF. (*a*) Calcular la energía almacenada en el capacitor en $t = 2$ ms. (*b*) ¿En qué tiempo la energía almacenada en el capacitor disminuyó 37% de su valor máximo? (*Redondee hasta el segundo más cercano.*) (*c*) Determinar la corriente que circula por el capacitor en $t = 1.2$ s. (*d*) Calcular la potencia entregada por el capacitor al circuito externo en $t = 2$ s.

9. La corriente que pasa por un capacitor de 47 μF se presenta en la figura 7.44. Calcular la tensión en el dispositivo luego de (*a*) $t = 2$ ms; (*b*) $t = 4$ ms; (*c*) $t = 5$ ms.

10. La corriente que circula por un capacitor está dada por $i(t) = 7$ sen πt mA. Si la energía almacenada en $t = 200$ ms es igual a 3 μJ, ¿cuál es el valor de la capacitancia?

11. (*a*) Si el capacitor de la figura 7.1 tiene una capacitancia de 0.2 μF, y una tensión $v_C = 5 + 3\cos^2 200t$ V, determinar $i_C(t)$. (*b*) ¿Cuál es la máxima energía almacenada en el capacitor? (*c*) Si $i_C = 0$ para $t < 0$ e $i_C = 8e^{-100t}$ mA para $t > 0$, determinar $v_C(t)$ para $t > 0$. (*d*) Si $i_C = 8e^{-100t}$ mA para $t > 0$ y $v_C(0) = 100$ V, determinar $v_C(t)$ para $t > 0$.

12. La forma de onda de corriente que se muestra para $t > 0$ en la figura 7.45 se aplica a un capacitor de 2 mF. Dado que $v_C(0) = 250$ V, y utilizando la convención de signos pasiva, ¿durante qué intervalo el valor de v_C está entre 2 000 y 2 100 V?

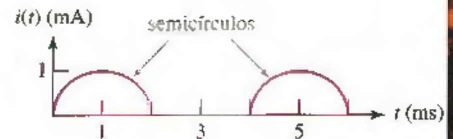


FIGURA 7.44

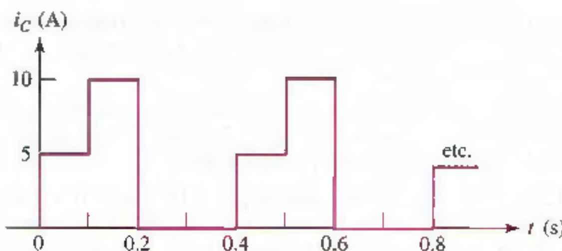
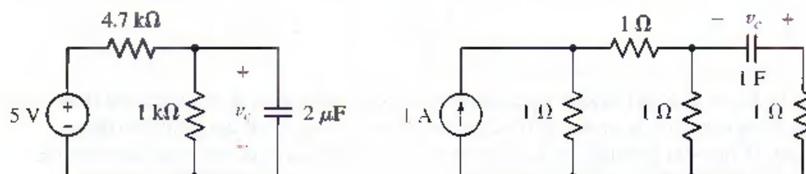


FIGURA 7.45

13. Una resistencia R se conecta en paralelo con un capacitor de 1 μF. Para cualquier $t \leq 0$, la energía almacenada en el capacitor vale $20e^{-1\,000t}$ mJ. (*a*) Determinar R. (*b*) Por integración, demostrar que la energía disipada en R durante el intervalo $0 \leq t < \infty$ es 0.02 J.



14. Para el circuito de la figura 7.46, (*a*) calcular la tensión en cada capacitor. (*b*) Verificar sus respuestas con PSpice. Proponer un esquema marcado adecuadamente con los resultados de la simulación.

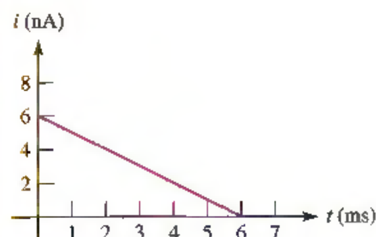


■ **FIGURA 7.46**

7.2 El inductor

15. Calcular la tensión en un inductor de 10 nH si la corriente en la terminal de referencia "+" es: (*a*) 5 mA; (*b*) $115\sqrt{2}\cos 120\pi t$ A; (*c*) $4e^{-6t}$ mA.

16. Bosquejar la tensión que aparece en un inductor de 1 pH como respuesta a la forma de onda de corriente que se muestra en la figura 7.47. Suponer que la corriente y la tensión se definen de forma congruente con la convención pasiva de signos.

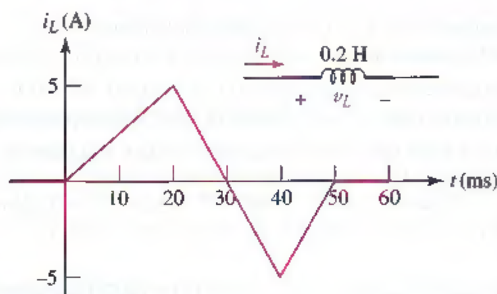


■ **FIGURA 7.47**

17. Calcular la tensión que se desarrolla en un inductor de 5 μH como respuesta a una corriente i que circula hacia su terminal de referencia "+" si i es igual a: (*a*) $30te^{-t}$ nA; (*b*) $4e^{-5t}$ sen $100t$ mA.

18. ¿Cuál es la máxima cantidad de energía que puede almacenarse en un inductor de 5 mH si el alambre está diseñado para una corriente máxima de 1.5 A? Explicar su respuesta.

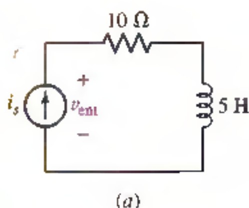
19. De acuerdo con la figura 7.48: (*a*) dibujar v_L como una función del tiempo, $0 < t < 60$ ms; (*b*) proporcionar el valor del tiempo en el que el inductor absorbe una potencia máxima; (*c*) determinar el valor del tiempo en el cual el inductor suministra la potencia máxima y (*d*) calcular la energía almacenada en el inductor a $t = 40$ ms.



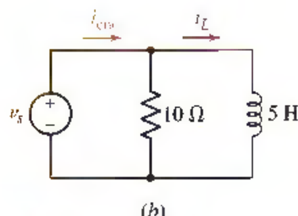
■ **FIGURA 7.48**

20. En la figura 7.13, sea $L = 50$ mH, con $i_L = 0$ para $t < 0$ y $80te^{-100t}$ mA para $t > 0$. Calcular los valores máximos de $|i_L|$ y $|v|$, así como el tiempo en el que ocurre cada máximo.

21. (*a*) Si $i_s = 0.4t^2$ A para $t > 0$ en el circuito de la figura 7.49*a*, determinar y graficar $v_{ent}(t)$ para $t > 0$. (*b*) Si $v_s = 40t$ V para $t > 0$ e $i_L(0) = 5$ A, determinar y graficar $i_{ent}(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura 7.49*b*.



(*a*)



(*b*)

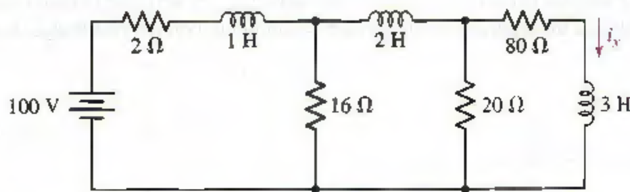
■ **FIGURA 7.49**

22. La tensión 20 cos $1\,000t$ V se aplica al inductor de 25 mH. Si la corriente en el inductor es cero en $t = 0$, determinar y graficar ($0 \leq t \leq 2\pi$ ms): (*a*) la potencia que absorbe el inductor; (*b*) la energía almacenada en el inductor.

23. La tensión v_L a 0.2 H en los extremos de un inductor de 0.2 H es de 100 V para $0 < t \leq 10$ ms; decrece linealmente hasta cero en el intervalo $10 < t < 20$ ms; es igual a 0 en $20 \leq t < 30$ ms; su valor es de 100 V para $30 < t < 40$ ms; y es cero de ahí en adelante. Utilizar la convención de signos pasiva para v_L e i_L.

(*a*) Calcular i_L en $t = 8$ ms si $i_L(0) = -2$ A. (*b*) Determinar la energía almacenada en $t = 22$ ms si $i_L(0) = 0.2$

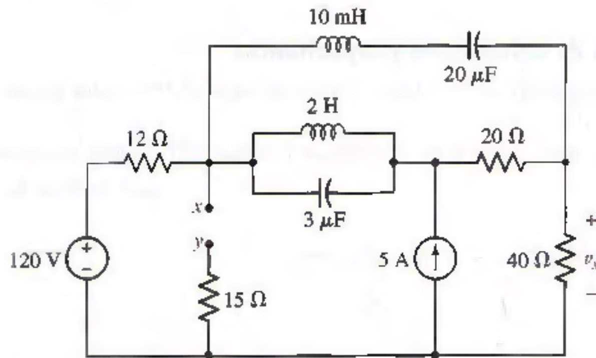
24. El circuito descrito en la figura 7.50 se conectó durante mucho tiempo. Determinar i_x.



■ **FIGURA 7.50**

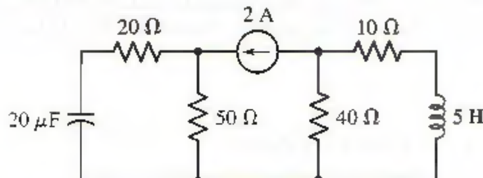
25. La tensión en un inductor de 5 H es $v_L = 10(e^{-t} - e^{-2t})$ V. Si $i_L(0) = 80$ mA y v_L y i_L satisfacen la convención de signos pasiva, determinar (*a*) $v_L(1\text{ s})$; (*b*) $i_L(1\text{ s})$; y (*c*) $i_L(\infty)$.

26. Mucho tiempo después de que todas las conexiones se efectuaron en el circuito de la figura 7.51, determinar v_x si (*a*) un capacitor se presenta entre *x* y *y* y (*b*) está presente un inductor entre *x* y *y*.



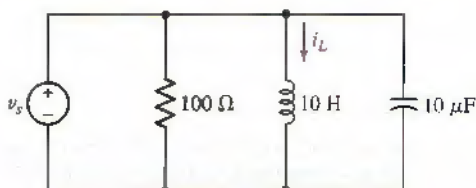
■ **FIGURA 7.51**

27. De acuerdo con el circuito de la figura 7.52, proporcionar: (*a*) w_L; (*b*) w_C; (*c*) la tensión a través de cada elemento del circuito; (*d*) la corriente en cada elemento del circuito.



■ **FIGURA 7.52**

28. Sea $v_s = 400t^2$ V para $t > 0$ e $i_L(0) = 0.5$ A en el circuito de la figura 7.53. En $t = 0.4$ s, determinar los valores de la energía: (*a*) almacenada en el capacitor; (*b*) almacenada en el inductor; y (*c*) disipada por la resistencia desde $t = 0$.



■ **FIGURA 7.53**

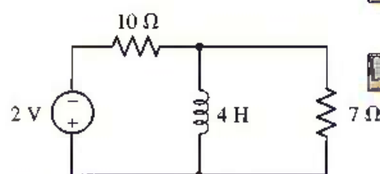


FIGURA 7.54


29. Para el circuito de la figura 7.54, (*a*) calcular la potencia disipada por las resistencias de 7 y 10 Ω, respectivamente. (*b*) Verificar las respuestas con PSpice. Elaborar un esquema marcado adecuadamente con los resultados de la simulación.


30. (*a*) Determinar el equivalente de Thévenin de la red conectada al inductor de la figura 7.55. (*b*) Calcular la corriente a través del inductor. (*c*) Verificar la respuesta con PSpice. Elaborar un diagrama marcado adecuadamente con los resultados de la simulación.

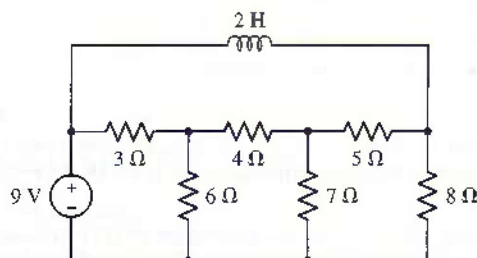


FIGURA 7.55

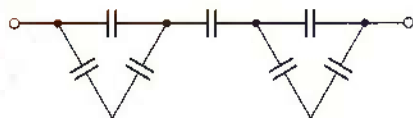


FIGURA 7.56

7.3 Combinaciones de inductancia y capacitancia

31. Determinar la capacitancia equivalente de la red en la figura 7.56 si todos los capacitores son de 10 μF.

32. Determinar la inductancia equivalente de la red en la figura 7.57 si todos los inductores son de 77 pH.

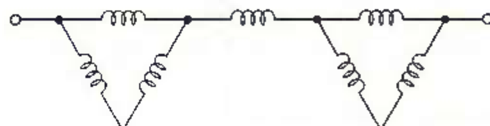


FIGURA 7.57

33. Para el circuito de la figura 7.58, (*a*) reducir el circuito al número más pequeño posible de componentes mediante combinaciones serie/paralelo; (*b*) determinar v_x si todas las resistencias son de 10 kΩ. Todos los capacitores son de 50 μF, y todos los inductores de 1 mH.

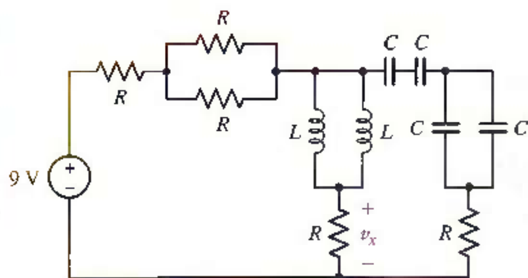


FIGURA 7.58

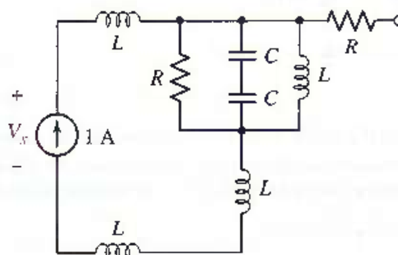


FIGURA 7.59

34. Para el circuito de la figura 7.59, (*a*) dibujar de nuevo el circuito utilizando el menor número posible de componentes con base en el empleo de reglas de combinación serie/paralelo; (*b*) determinar V_x si todas las resistencias son de 1 Ω, todos los capacitores de 50 μF, y todos los inductores de 10 nH.

35. Reducir la red de la figura 7.60 a una sola capacitancia equivalente, según se observa desde las terminales a y b.

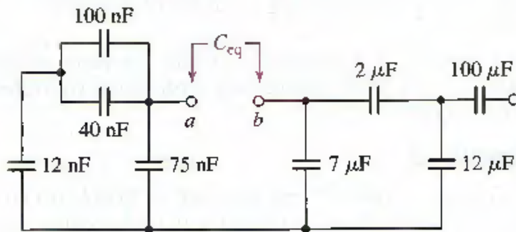


FIGURA 7.60

36. Reducir la red de la figura 7.61 a una sola inductancia equivalente, según como se observa desde las terminales a y b.

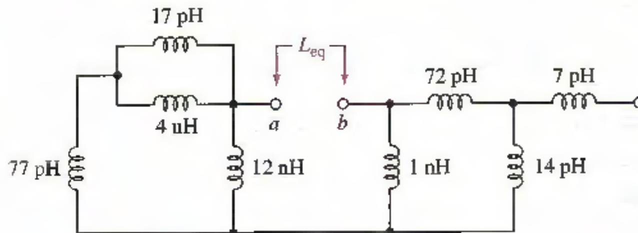


FIGURA 7.61

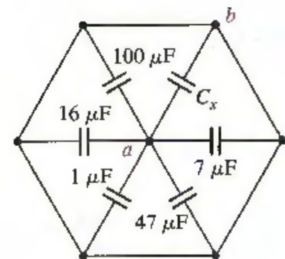


FIGURA 7.62

37. La red de la figura 7.62 almacena 534.8 μJ de energía cuando se conecta una tensión de 2.5 V en las terminales a y b. ¿Cuál es el valor de C_x?

38. La red de la figura 7.63 consta de tres etapas en serie y cada una contiene un número correspondiente de inductores en paralelo. (a) Determinar la inductancia equivalente si todos los inductores son de 1.5 H. (b) Obtener la expresión de una red general de este tipo que tenga N etapas.

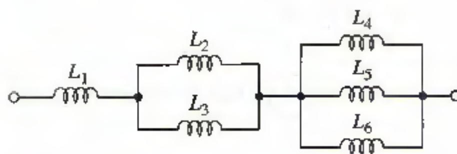


FIGURA 7.63

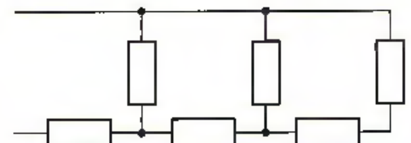


FIGURA 7.64

39. En la red de la figura 7.63, $L_1 = 1$ H, $L_2 = L_3 = 2$ H, $L_4 = L_5 = L_6 = 3$ H. (a) Calcular la inductancia equivalente. (b) Obtener la expresión de una red general de este tipo que tenga N etapas, suponiendo que la etapa N está compuesta por N inductores, cada uno con una inductancia de N henrys.

40. Extender el concepto de transformaciones Δ-Y para simplificar la red de la figura 7.64, si cada elemento es un capacitor de 2 pF.

41. Ampliar el concepto de transformaciones Δ-Y para simplificar la red de la figura 7.64, si cada elemento es un inductor de 1 nH.

42. Dada una caja llena de inductores de 1 μH demostrar cómo (mediante el menor número posible de componentes) se obtendría una inductancia equivalente de (a) 2.25 μH; (b) 750 nH; (c) 450 nH.

43. Observar la red de la figura 7.65 y calcular: (a) R_{eq} si cada elemento es una resistencia de 10 Ω; (b) L_{eq} si cada elemento es un inductor de 10 H: (c) C_{eq} si cada elemento es un capacitor de 10 F.

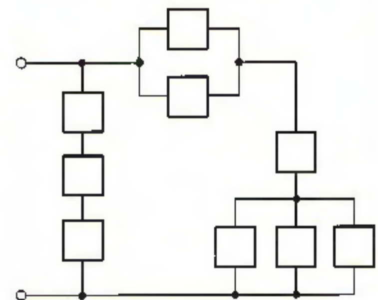


FIGURA 7.65

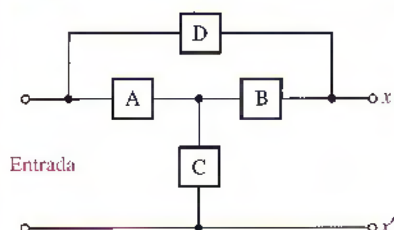


FIGURA 7.66

44. En la figura 7.66, sean los elementos A, B, C y D: (*a*) inductores de 1 H, 2 H, 3 H y 4 H, respectivamente, y calcular la inductancia de entrada con x-x' primero en circuito abierto y luego en cortocircuito; (*b*) capacitores de 1 F, 2 F, 3 F y 4 F, respectivamente, y determinar la capacitancia de entrada con x-x' primero en circuito abierto y luego en cortocircuito.

45. Dada una caja llena de capacitores de 1 nF y mediante el empleo del menor número de capacitores posible, mostrar cómo se puede obtener una capacitancia equivalente de (*a*) 2.25 nF; (*b*) 0.75 nF; (*c*) 0.45 nF.

7.4 Consecuencias de la linealidad

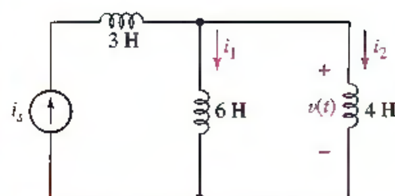


FIGURA 7.67

46. En el circuito de la figura 7.67, sea $i_s = 60e^{-200t}$ mA con $i_1(0) = 20$ mA. (*a*) Proporcionar $v(t)$ para cualquier t. (*b*) Determinar $i_1(t)$ para $t \geq 0$. (*c*) Encontrar $i_2(t)$ para $t \geq 0$.

47. Sea $v_s = 100e^{-80t}$ V y $v_1(0) = 20$ V en el circuito de la figura 7.68. (*a*) Calcular $i(t)$ para cualquier t. (*b*) Determinar $v_1(t)$ para $t \geq 0$. (*c*) Proporcionar $v_2(t)$ para $t \geq 0$.

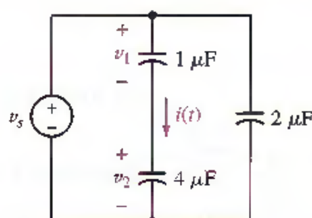


FIGURA 7.68

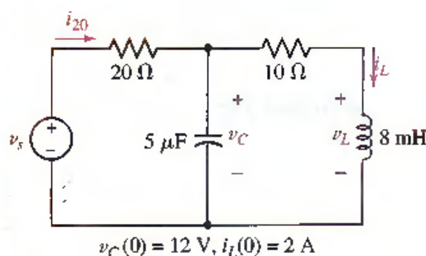


FIGURA 7.69

48. (*a*) Escribir las ecuaciones nodales del circuito de la figura 7.69. (*b*) Escribir las ecuaciones de malla del mismo circuito.

49. Si se supone que todas las fuentes del circuito de la figura 7.70 se conectaron y operaron durante mucho tiempo, aplicar el principio de superposición para calcular $v_C(t)$ y $v_L(t)$.

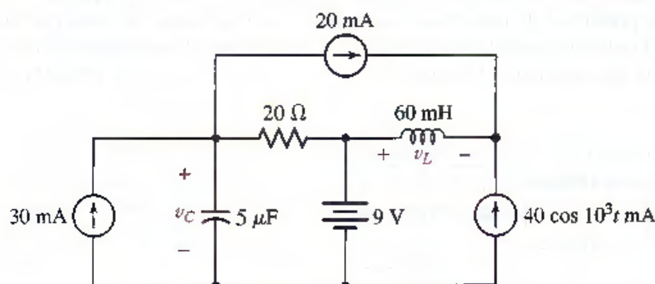


FIGURA 7.70

50. En el circuito de la figura 7.71, suponer que no hay energía almacenada en $t = 0$, y escribir un conjunto completo de ecuaciones nodales.

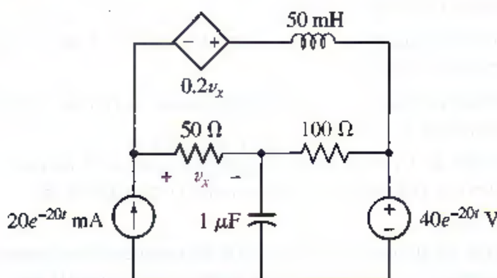


FIGURA 7.71

7.5 Circuitos de amp op simples con capacitores

51. Intercambiar la ubicación de R y C en el circuito de la figura 7.30, y suponga que $R_i = \infty$, $R_o = 0$, y $A = \infty$ para el amp op. (*a*) Determinar $v_{sal}(t)$ como función de $v_s(t)$. (*b*) Obtener una ecuación que relacione $v_o(t)$ y $v_s(t)$ si A no se supone infinita.

52. Un dosificador de iones es un dispositivo que se usa para inyectar átomos ionizados en silicio a fin de modificar sus características eléctricas para la subsecuente fabricación de diodos y transistores. Los iones que inciden sobre el blanco de silicio producen una corriente que se dirige a través de una resistencia de un valor conocido con precisión. La corriente es directamente proporcional a la intensidad de los iones ($i = 1.602 \times 10^{-19} \times$ número de iones incidentes por segundo). Si se utiliza una resistencia de 1.000 MΩ para detectar la corriente, diseñar un circuito para proporcionar una salida directamente proporcional al número total de iones que inciden en el silicio durante el proceso de dosificación (conocida como *dosis*).

53. En el circuito de la figura 7.30, sea $R = 0.5\,\text{M}\Omega$, $C = 2\,\mu\text{F}$, $R_i = \infty$, y $R_o = 0$. Suponer que se desea que la salida sea $v_{sal} = \cos 10t - 1$ V. Obtener $v_s(t)$ si (*a*) $A = 2\,000$ y (*b*) A es infinita.

54. Se coloca un sensor de velocidad en una rueda giratoria. Diseñar un circuito que proporcione una tensión positiva cuya magnitud sea igual a la aceleración (revoluciones por minuto) de la rueda. Suponer que la salida del sensor de velocidad es 1 mV/rpm y que la rueda gira a menos de 3 500 rpm.

55. (*a*) En el circuito de la figura 7.72, intercambie la resistencia y el inductor, y obtener la expresión de v_{sal} en términos de v_s. (*b*) Explicar por qué un circuito de este tipo no se usaría por lo general en la práctica.

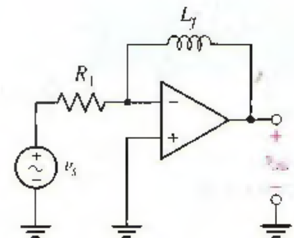


FIGURA 7.72

56. Un medidor de exposiciones conectado a una cámara proporciona una salida que es directamente proporcional a la intensidad de luz incidente, de tal forma que 1 mV = 1 mcd (milicandela). Diseñar un circuito que proporcione una tensión de salida proporcional a la intensidad integrada, de tal manera que 1 V = 1 mcd-s.

57. El proceso de fabricación de cierto tipo de vidrio requiere que la velocidad de enfriado no exceda 100°C/min. Se encuentra disponible una tensión proporcional a la temperatura actual de fundido del vidrio, de tal forma que 1mV = 1°C en un intervalo de 500 a 2 000°C. Diseñar un circuito cuya tensión de salida represente la velocidad de enfriamiento, de tal forma que 1 V = 100°C/min.

58. En un tanque de combustible se instala un sensor de nivel a fin de medir el combustible que queda en él. El sensor se calibra de tal forma que 1 volt = 10 litros. Diseñar un circuito cuya salida de tensión proporcione una lectura de la velocidad del consumo de combustible en litros por segundo, de tal forma que 1 V = 1 l/s.

59. Se van a efectuar pruebas a una batería con el fin de determinar la cantidad de energía que puede entregar a una carga de 1 Ω. Se encuentran disponibles dos señales: una de tensión para el cuadrado de la tensión de la batería (1 mV = 1 V^2) y otra de tensión que indica el cuadrado del flujo de corriente hacia afuera de la batería (1 mV = 1 A^2). Diseñar un circuito cuya tensión de salida sea proporcional a la energía entregada total, de tal forma que 1 mV = 1 J de energía que se entrega a la carga.

60. Los ingenieros de prueba de una nave experimental desean supervisar la desaceleración durante el aterrizaje, ya que les preocupa que los sistemas de suspensión de los neumáticos experimenten mucho esfuerzo. Si pudieran proporcionarle una señal de tensión de las llantas de la nariz de la nave que estuviera calibrada de tal forma que 1 mV = 1 mph, diseñar un circuito cuya tensión de salida sea proporcional a la velocidad de desaceleración (de tal forma que 1 V = 1 km/s^2).

7.6 Dualidad

61. (*a*) Dibujar el dual exacto del circuito de la figura 7.69. Especificar las variables duales y las condiciones iniciales duales. (*b*) Escribir las ecuaciones nodales del circuito dual. (*c*) Determinar las ecuaciones de malla del circuito dual.

62. Dibujar el dual exacto del circuito que se ilustra en la figura 7.51. Dibujar el circuito en una forma limpia y clara con esquinas cuadradas, un nodo de referencia reconocible y con ningún cruce.

63. Dibujar el dual exacto del circuito de la figura 7.73. ¡Mantenerlo limpio!

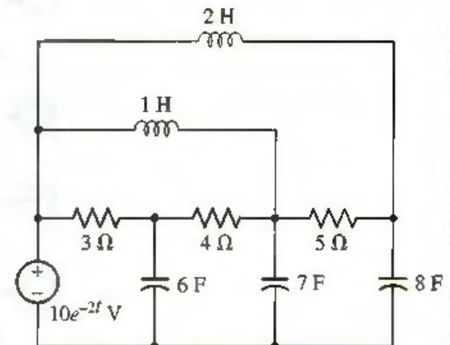
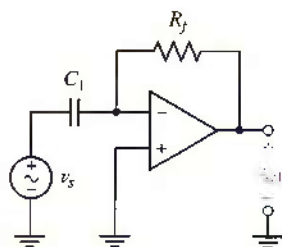
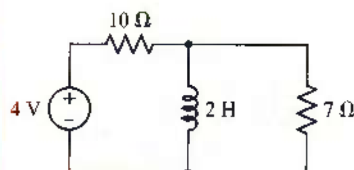


FIGURA 7.73



■ FIGURA 7.74



■ FIGURA 7.75

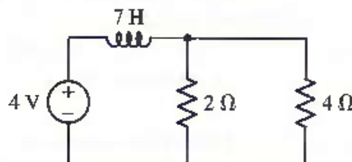
64. (*a*) Dibujar el dual exacto del circuito que se indica en el ejercicio 47, incluyendo las variables. (*b*) Escribir el dual del enunciado del problema del ejercicio 47. (*c*) Resolver el nuevo ejercicio 47.

65. Determinar el dual del circuito de la figura 7.74 y obtener la expresión de i_{sal} en términos de i_s. (Sugerencia: utilizar el modelo detallado para un amp op.)

7.7 Construcción de modelos de capacitores e inductores con PSpice

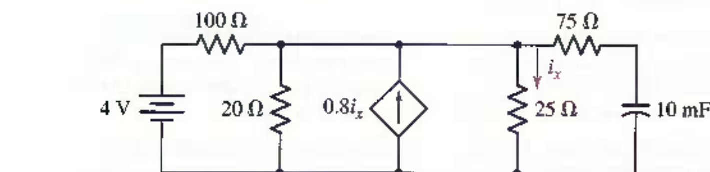
66. Calcular la energía almacenada en el inductor de la figura 7.75. Verificar la solución mediante el uso de PSpice; elaborar un esquema marcado adecuadamente con los resultados de la simulación.

67. Calcular la energía almacenada en el inductor de la figura 7.76. Verificar la solución mediante el uso de PSpice; proponer un esquema marcado adecuadamente con los resultados de la simulación.



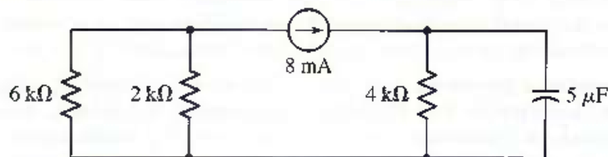
■ FIGURA 7.76

68. Calcuar la energía almacenada en el capacitor de la figura 7.77. Verificar la solución mediante el uso de PSpice; elaborar un esquema marcado adecuadamente con los resultados de la simulación.



■ FIGURA 7.77

69. Calcular la energía almacenada en el capacitor de la figura 7.78. Verificar la solución mediante el uso de PSpice; proponer un esquema marcado adecuadamente con los resultados de la simulación.



■ FIGURA 7.78

70. En al amp op diferencial de la figura 7.31, asignar los valores $C_1 = 5$ nF y $R_f = 100$ MΩ. (*a*) Predecir la salida si $v_s(t) = 3$ sen $10t$ V. (*b*) Verificar la solución simulándola con PSpice. Proponer un esquema marcado adecuadamente con los resultados de la simulación.

71. Utilizar PSpice para verificar que la energía almacenada en un capacitor de 33 μF es 221 μJ en $t = 10^{-2}$ s cuando se conecta a una fuente de tensión $v(t) = 5\cos 75t$ V. (Sugerencia: Utilizar la componente VSIN.)

72. Emplear PSpice para verificar que la energía almacenada en un inductor de 100 pH es igual a 669 pJ en $t = 0.01$ s cuando se conecta a una fuente de corriente $i(t) = 5$ cos $75t$ A. (Sugerencia: emplear la componente ISIN.)

73. En el circuito de la figura 7.72, seleccionar R_1 y L_f de modo que la salida sea el doble de la derivada de la tensión de entrada, si $v_s = A\cos 2\pi 10^3 t$ V. Verificar el diseño mediante PSpice.

74. Resolver el ejercicio 7.71, pero esta vez con $v(t) = 5\cos 75t - 7$ V.

75. Resolver el ejercicio 7.72, pero esta vez con $i(t) = 5\cos 75t - 7$ A.

CAPÍTULO 8

Circuitos *RL* y *RC* básicos

INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se presentaron ecuaciones que gobiernan la respuesta de varios circuitos en inductancia y capacitancia, pero no se resolvió ninguna de ellas. En este momento se puede proceder a la solución de los circuitos más simples, restringiendo la atención a aquellos que contienen sólo resistores e inductores, o sólo resistores y capacitores.

Si bien los circuitos que se analizarán tienen una apariencia muy elemental, también son de importancia práctica. Las redes de esta forma se emplean en amplificadores electrónicos, sistemas de control automático, amplificadores operacionales, equipo de comunicaciones y en otras muchas aplicaciones. La familiarización con estos circuitos simples permitirá predecir con qué exactitud puede la salida de un amplificador seguir una entrada que cambia con rapidez con el tiempo, o predecir cuán rápidamente cambiará la velocidad de un motor como respuesta a un cambio en su corriente de campo. Nuestro conocimiento del desempeño de los circuitos *RL* y *RC* simples permitirá sugerir modificaciones para el amplificador o el motor a fin de obtener una respuesta más deseable.

8.1 EL CIRCUITO *RL* SIN FUENTE

El análisis de circuitos que contienen inductores y/o capacitores depende de la formulación y solución de ecuaciones integrodiferenciales que caracterizan a los circuitos. Se llamará *ecuación diferencial lineal homogénea* al tipo especial de ecuación que se obtiene, la cual es simplemente una ecuación diferencial en la que cada término es de primer grado en la variable dependiente o en una de sus derivadas. Se obtiene una solución cuando se encuentra la expresión

CONCEPTOS CLAVE

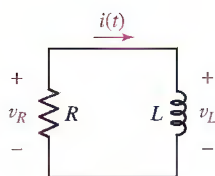
- Constantes de tiempo *RL* y *RC*.
- Respuesta natural y forzada.
- Determinación de la respuesta en función del tiempo de una excitación de CD.
- Cómo determinar las condiciones iniciales y su efecto en la respuesta del circuito.
- Análisis de circuitos con funciones de entrada escalón y con interruptores.
- Construcción de formas de onda pulsantes mediante funciones escalón unitario.
- Respuesta de circuitos conmutados secuencialmente.



de la variable dependiente que satisface la ecuación diferencial y también la distribución de energía preescrita en los inductores o capacitores en el instante preestablecido, por lo general $t = 0$.

La solución de la ecuación diferencial representa una respuesta del circuito y se conoce con muchos nombres. Puesto que depende de la "naturaleza" general del circuito (los tipos de elementos, sus tamaños, la interconexión de los elementos), se denomina a menudo como ***respuesta natural***. Sin embargo, todo circuito real que se construya no puede almacenar energía por siempre; necesariamente, las resistencias asociadas con los inductores y capacitores a la larga convertirán toda la energía almacenada en calor. La respuesta debe al final extinguirse (o sea desaparecer), razón por la cual con frecuencia se le conoce como ***respuesta transitoria***. Por último, también es necesario familiarizarse con la aportación de los matemáticos a la nomenclatura: asignan el nombre de *función complementaria* a la solución de una ecuación diferencial lineal homogénea.

Cuando se analizan fuentes independientes que actúan sobre un circuito, parte de la respuesta recordará la naturaleza de la fuente particular (o función forzada) que se utiliza; dicha parte, denominada *solución particular, respuesta de estado permanente* o ***respuesta forzada***, se "complementa" con la respuesta complementaria producida en el circuito sin fuente. La respuesta completa del circuito estará dada entonces por la suma de la función complementaria y la solución particular. En otras palabras, la respuesta completa consiste en la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada. La respuesta sin fuente podría llamarse respuesta *natural*, respuesta *transitoria*, respuesta *libre* o *función complementaria*, pero debido a su naturaleza más descriptiva a menudo se denomina respuesta *natural*.



■ **FIGURA 8.1** Circuito *RL* en serie para el que se va a determinar $i(t)$ sujeto a la condición inicial $i(0) = I_0$.

¡Quizá parezca bastante extraño analizar una corriente variable en el tiempo que fluye en un circuito sin fuentes! Tenga presente que sólo se conoce la corriente en el tiempo específico $t = 0$; no se le conoce antes de ese tiempo. En ese sentido, tampoco se sabe cómo se veía el circuito antes de $t = 0$. Para que circule una corriente, sería necesaria la presencia de una fuente en algún punto, pero no se ha proporcionado información al respecto. Por fortuna, ello no se requiere para analizar el circuito indicado.

Se examinarán varios métodos diferentes de solución de estas ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la manipulación matemática no significa analizar los circuitos. El mayor interés se encuentra en las propias soluciones, en su significado y su interpretación, así que se tratará de familiarizar lo suficiente al lector con la forma de la respuesta de modo que se puedan elaborar respuestas para los nuevos circuitos con sólo un simple razonamiento. Si bien se necesitan métodos analíticos complicados cuando fallan los enfoques más simples, una intuición bien desarrollada constituye un recurso invaluable en este tipo de situaciones.

El estudio comenzará con el análisis transitorio considerando el simple circuito *RL* en serie que se presenta en la figura 8.1. Se va a designar la corriente variable en el tiempo como $i(t)$; se representará el valor de $i(t)$ en $t = 0$ como I_0; en otras palabras, $i(0) = I_0$. Por lo tanto, se tiene

$$Ri + v_L = Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

o

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad [1]$$

La meta es una expresión de $i(t)$ que satisfaga esta ecuación y también tenga el valor I_0 en $t = 0$. La solución se obtiene mediante varios métodos diferentes.

Método directo

Un método muy directo para resolver una ecuación diferencial consiste en expresarla de manera que se separen las variables y luego se integre cada miembro

de la ecuación. Las variables en la ecuación [1] son i y t, y resulta evidente que la ecuación se podría multiplicar por dt, dividirse entre i y arreglarse con base en las variables separadas:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt \qquad [2]$$

En razón de que la corriente es I_0 en $t = 0$ e $i(t)$ en el tiempo t, se igualarían las dos integrales definidas que se obtienen al integrar cada miembro entre los límites correspondientes:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di'}{i'} = \int_0^t -\frac{R}{L}\,dt'$$

Efectuando la integración indicada,

$$\ln i'\Big|_{I_0}^{i} = -\frac{R}{L}t'\Big|_0^t$$

la cual tiene como resultado

$$\ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L}(t - 0)$$

Después de un poco de manipulación, se puede ver que la corriente $i(t)$ está dada por

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \qquad [3]$$



Se comprueba la solución si se demuestra primero que la sustitución de la ecuación [3] en la ecuación [1] produce la identidad $0 = 0$, y después que la sustitución de $t = 0$ en la ecuación [3] tiene como resultado $i(0) = I_0$. Ambos pasos son necesarios; la solución debe satisfacer la ecuación diferencial que caracteriza al circuito y también la condición inicial.

EJEMPLO 8.1

Si el inductor de la figura 8.2 tiene una corriente i_L H 2 A en t H 0, encontrar la expresión de $i_L(t)$ válida para $t > 0$, y su valor en t H 200 „ s.

Este tipo de circuito es idéntico al que se vio con anterioridad, por lo que se espera que la corriente que circula por el inductor sea de la forma

$$i_L(t) = I_0 e^{-R/L^t}$$

donde $R = 200\ \Omega$, $L = 50$ mH e I_0 es la corriente inicial que circula a través del inductor en $t = 0$. Por ende,

$$i_L(t) = 2e^{-4\,000t}$$

Sustituyendo $t = 200 \times 10^{-6}$ s, se puede ver que $i_L(t) = 898.7$ mA, que es menor que la mitad del valor inicial.

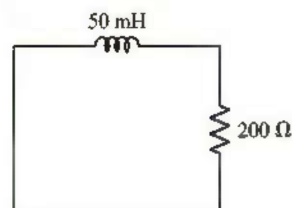


FIGURA 8.2 Circuito *RL* simple en el que la energía se almacena en el inductor en $t = 0$.

PRÁCTICA

8.1 Determinar la corriente i_R que circula a través de la resistencia de la figura 8.3 en $t = 1$ ns si $i_R(0) = 6$ A.

Respuesta: 812 mA.

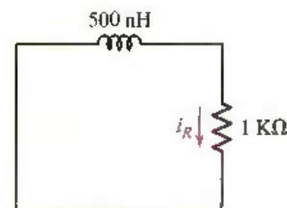


FIGURA 8.3 Circuito para el problema de práctica 8.1.

Método alterno

La solución también se podría obtener por medio de una ligera variación del método anterior. Luego de separar variables, se tendría la integral indefinida de cada lado de la ecuación [2] si también se incluye una constante de integración. De tal modo,

$$\int \frac{di}{i} = -\int \frac{R}{L} dt + K$$

y la integración origina

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + K \qquad [4]$$

La constante K no puede evaluarse mediante la sustitución de la ecuación [4] en la ecuación diferencial original [1]; resultará la identidad $0 = 0$, pues la ecuación [4] es una solución de la ecuación [1] para *cualquier* valor de K (compruébelo usted mismo). La constante de integración debe elegirse para satisfacer la condición inicial $i(0) = I_0$. Así, en $t = 0$, la ecuación [4] se convierte en

$$\ln I_0 = K$$

y se emplea este valor de K en la ecuación [4] para obtener la respuesta deseada:

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln I_0$$

o

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

como se hizo antes.

Método general

Cualquiera de estos métodos se utiliza cuando las variables son separables, aunque ésta no es siempre la situación. En los casos restantes se confiará en un método muy poderoso, cuyo éxito dependerá de nuestra intuición o experiencia. Sólo se adivinará o se supondrá una forma de solución y luego se probarán los supuestos, primero mediante la sustitución en la ecuación diferencial y luego a través de la aplicación de las condiciones iniciales dadas. Debido a que no se puede adivinar la expresión numérica exacta de la solución, se considerará una solución que contenga varias constantes desconocidas y se eligirán los valores para ellas con el fin de satisfacer la ecuación diferencial y las condiciones iniciales. Muchas de las ecuaciones diferenciales que se encuentran en el análisis de circuitos tienen una solución que puede representarse mediante la función exponencial o la suma de varias funciones exponenciales. Se supondrá una solución de la ecuación [1] en forma exponencial,

$$i(t) = A\,e^{s_1 t} \qquad [5]$$

donde A y s_1 son constantes que se deben determinar. Después de sustituir esta solución supuesta en la ecuación [1], se tiene:

$$As_1 e^{s_1 t} + A\frac{R}{L}e^{s_1 t} = 0$$

o

$$\left(s_1 + \frac{R}{L}\right) Ae^{s_1 t} = 0 \qquad [6]$$

Con el fin de satisfacer la ecuación para todos los valores del tiempo, se requiere que $A = 0$, o $s_1 = -\infty$, o $s_1 = -R/L$. Pero si $A = 0$ o si $s_1 = -\infty$, entonces toda respuesta es nula; ninguna puede ser una solución para el problema en cuestión. Por lo tanto, se debe elegir:

$$s_1 = -\frac{R}{L} \qquad [7]$$

así que la solución supuesta toma la forma

$$i(t) = Ae^{-Rt/L}$$

La constante restante debe evaluarse aplicando la condición inicial $i(0) = I_0$. De tal modo, $A = I_0$, y la forma final de la solución supuesta es (otra vez)

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

En la figura 8.4 se muestra un resumen del método básico.

En realidad, puede tomarse una ruta más directa. Para obtener la ecuación [7], se resuelve

$$s_1 + \frac{R}{L} = 0 \qquad [8]$$

que se conoce como ***ecuación característica.*** Esta última se obtiene directamente de la ecuación diferencial, sin que sea necesaria la sustitución en la solución de prueba. Considerar la ecuación diferencial general de primer orden

$$a\frac{df}{dt} + bf = 0$$

donde a y b son constantes. Se sustituye s^1 en df/dt y s^0 en f, lo cual da como resultado

$$a\frac{df}{dt} + bf = (as + b)f = 0$$

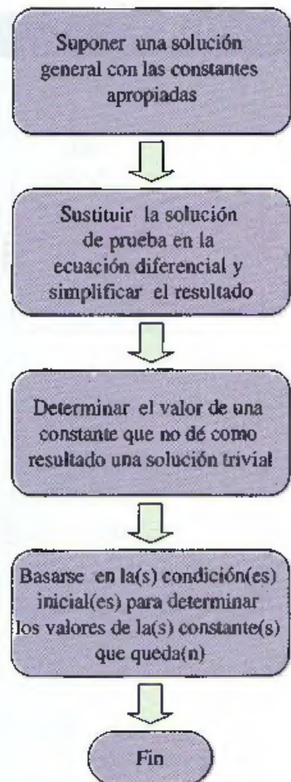
A partir de aquí se puede obtener directamente la ecuación característica

$$as + b = 0$$

la cual tiene una sola raíz $s = -b/a$. Entonces, la solución de la ecuación diferencial es

$$f = Ae^{-bt/a}$$

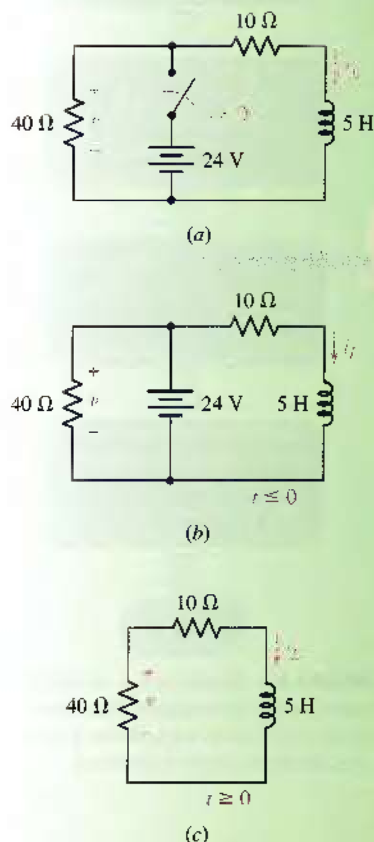
El procedimiento básico se puede extender fácilmente a ecuaciones diferenciales de segundo orden, como se estudiará en el capítulo 9.



■ **FIGURA 8.4** Diagrama de flujo del método general para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden donde se puede adivinar la forma de la solución con base en la experiencia.

EJEMPLO 8.2

En el circuito de la figura 8.5*a*, calcular la tensión marcada como v en *t* H 200 ms.



■ **FIGURA 8.5** (*a*) Circuito RL simple con un interruptor disparado en el tiempo $t = 0$. (*b*) El circuito como se encuentra antes de $t = 0$. (*c*) El circuito después de que el interruptor es activado y se ha quitado la fuente de 24 V.

▸ ***Identificar el objetivo del problema.***

En realidad, el diagrama de la figura 8.5*a* representa *dos circuitos* diferentes: uno con el interruptor cerrado (figura 8.5*b*) y otro con el interruptor abierto (figura 8.5*c*). Determinar $v(0.2)$ en el circuito que se muestra en la figura 8.5*c*.

▸ ***Recopilar la información conocida.***

Primero se debe verificar que ambos circuitos se encuentren dibujados y marcados correctamente. A continuación se elabora el supuesto de que el circuito de la figura 8.5*b* se conectó por un largo periodo, para que todo transitorio se haya disipado. Se puede hacer dicho supuesto bajo estas circunstancias a menos que se ordene lo contrario.

▸ ***Elaborar un plan.***

El circuito de la figura 8.5*c* puede analizarse escribiendo una ecuación KVL. A fin de cuentas, se desea una ecuación diferencial con v y t sólo como variables; para realizar esta tarea, pueden ser necesarias ecuaciones adicionales y algunas sustituciones. A continuación se resolverá la ecuación diferencial para encontrar $v(t)$.

▸ ***Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.***

Con referencia a la figura 8.5*c*, se puede escribir

$$-v + 10i_L + 5\frac{di_L}{dt} = 0$$

Sustituyendo $i_L = -v/40$, se observa que

$$\frac{5}{40}\frac{dv}{dt} + \left(\frac{10}{40} + 1\right)v = 0$$

o, más simplemente,

$$\frac{dv}{dt} + 10v = 0 \qquad [9]$$

▸ ***Determinar si se requiere de información adicional.***

A partir de la experiencia previa, se sabe que una expresión completa de v requerirá el conocimiento de v en un momento específico, donde $t = 0$ es el más conveniente. Podría uno sentirse tentado a mirar la figura 8.5*b* y escribir $v(0) = 24$ V, lo cual es válido *sólo justo antes de que el interruptor abre*. La tensión en la resistencia puede cambiar a cualquier valor en el instante en el que se opera; únicamente permanecerá sin sufrir ningún cambio la corriente que circula por el inductor.

En el circuito de la figura 8.5*b*, $i_L = 24/10 = 2.4$ A, puesto que el inductor actúa como un corto circuito ante una corriente directa. Por lo tanto, $i_L(0) = 2.4$ A en el circuito de la figura 8.5*c*, es también un punto clave en el análisis de este tipo de circuitos. Por lo tanto, en el circuito de la figura 8.5*c*, $v(0) = (40)(-2.4) = -96$ V.

▸ ***Intentar resolver.***

Puede tomarse en cuenta cualquiera de las tres técnicas básicas de solución. Con base en la experiencia, iniciar escribiendo la ecuación característica

correspondiente a la ecuación [9]:

$$s + 10 = 0$$

Resolviendo, se puede ver que $s = -10$, por lo que

$$v(t) = Ae^{-10t} \quad [10]$$

(la cual, una vez sustituida en el lado izquierdo de la ecuación [9], da como resultado

$$-10Ae^{-10t} + 10Ae^{-10t} = 0$$

como se esperaba).

Se encuentra el valor de A fijando el valor de $t = 0$ en la ecuación [10] y haciendo uso del hecho que $v(0) = -96$ V. Por lo tanto,

$$v(t) = -96e^{-10t} \quad [11]$$

y $v(0.2) = -12.99$ V, de un máximo de -96 V.

Verificar la solución. ¿Es razonable o esperada?

También se pudo haber encontrado la corriente del inductor dándose cuenta de que el inductor "ve" una resistencia de 50 Ω en el circuito de la figura 8.5*c*, lo cual proporcionaría una constante de tiempo de $\tau = 50/5 = 10$ s. Asociado con el hecho de que se conoce $i_L(0) = 2.4$ A, se puede escribir,

$$i_L(t) = 2.4e^{-10t} \text{ A}, \quad t > 0$$

A partir de la ley de Ohm, $v(t) = -40i_L(t) = -96e^{-10t}$, que es idéntica a la ecuación [11]. No es coincidencia que la corriente del inductor y la tensión en la resistencia tengan la misma dependencia exponencial.

PRÁCTICA

8.2 Determinar la tensión v en el inductor del circuito de la figura 8.6 para $t > 0$.

Respuesta: $-25e^{-2t}$V.

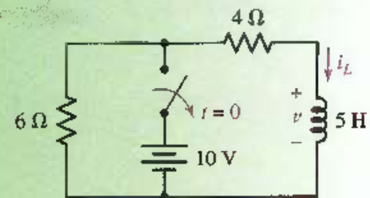


FIGURA 8.6 Circuito del problema de práctica 8.2.

Determinación de la cantidad de energía

Antes de enfocar la atención en la interpretación de la respuesta, se volverá a observar el circuito de la figura 8.1 y se verificarán las relaciones de potencia y de energía. La potencia que se está disipando en la resistencia es

$$p_R = i^2R = I_0^2Re^{-2Rt/L}$$

y se puede encontrar la energía total que se convierte en calor en la resistencia mediante la integración de la potencia instantánea desde un tiempo cero hasta el infinito:

$$w_R = \int_0^\infty p_R\,dt = I_0^2R\int_0^\infty e^{-2Rt/L}\,dt$$

$$= I_0^2R\left(\frac{-L}{2R}\right)e^{-2Rt/L}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}L\,I_0^2$$

Éste es el resultado que se espera, ya que la energía total almacenada inicialmente en el inductor es $\frac{1}{2}LI_0^2$, y no existe ninguna energía almacenada en el inductor en el infinito, puesto que su corriente desciende hasta cero de un momento a otro. Por lo tanto, toda la energía inicial se consume en la resistencia por disipación.

8.2 PROPIEDADES DE LA RESPUESTA EXPONENCIAL

Se considerará la naturaleza de la respuesta del circuito *RL* en serie. Se sabe que la corriente del inductor se representa por medio de

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

En $t = 0$, la corriente tiene un valor I_0, pero cuando el tiempo aumenta, la corriente disminuye y se aproxima a cero. La forma de este decaimiento exponencial se observa en la gráfica de $i(t)/I_0$ como función de t que se exhibe en la figura 8.7. Puesto que la función que se graficará es $e^{-Rt/L}$, la curva no cambiará si R/L se mantiene constante. En consecuencia, debe obtenerse la misma curva para cada circuito RL en serie que tenga la misma razón R/L o L/R. Se verá cómo afecta esta razón la forma de la curva.

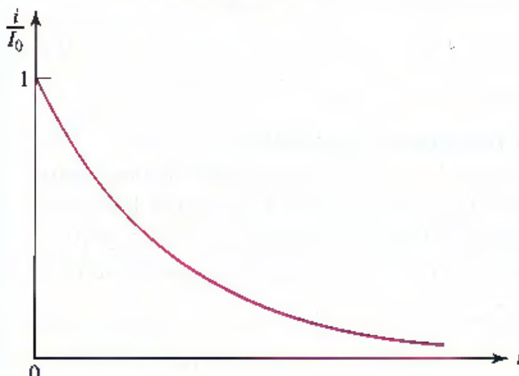


FIGURA 8.7 Gráfica de $e^{-Rt/L}$ en función de t.

Si se duplica la razón entre L y R, el exponente no cambiará si t se duplica también. En otras palabras, la respuesta original ocurrirá en un tiempo posterior, así que la nueva curva se obtiene moviendo cada punto de la curva original dos veces más hacia la derecha. Con esta razón L/R más grande, la corriente tarda más en decaer hasta cualquier fracción dada de su valor original. Se podría decir que el "ancho" de la curva se duplica, o que el ancho es proporcional a L/R. Sin embargo, se dificulta definir el término ancho, debido a que cada curva se extiende ¡desde $t = 0$ hasta ∞! En vez de eso, se debe considerar el tiempo que se requeriría para que la corriente decrezca hasta cero *si continúa disminuyendo a su tasa inicial.*

La tasa inicial de decaimiento se calcula evaluando la derivada en el tiempo cero:

$$\left.\frac{d}{dt}\frac{i}{I_0}\right|_{t=0} = \left.-\frac{R}{L}e^{-Rt/L}\right|_{t=0} = -\frac{R}{L}$$

Se designa el valor del tiempo que tarda i/I_0 en disminuir desde la unidad hasta cero, suponiendo una tasa de decaimiento constante, mediante la letra griega τ (tau). De tal modo,

$$\left(\frac{R}{L}\right)\tau = 1$$

o

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \qquad [12]$$

La proporción L/R se mide en segundos, pues el exponente $-Rt/L$ debe ser adimensional. El valor del tiempo τ se denomina ***constante de tiempo*** y se muestra de manera gráfica en la figura 8.8. Es posible encontrar en forma gráfica la constante de tiempo de un circuito *RL* en serie a partir de la curva de respuesta; sólo se requiere dibujar la tangente a la curva en $t = 0$ y determinar la intersección de dicha tangente con el eje de tiempo. A menudo, esta operación constituye una manera conveniente de aproximar la constante de tiempo a partir de la imagen exhibida en un osciloscopio.

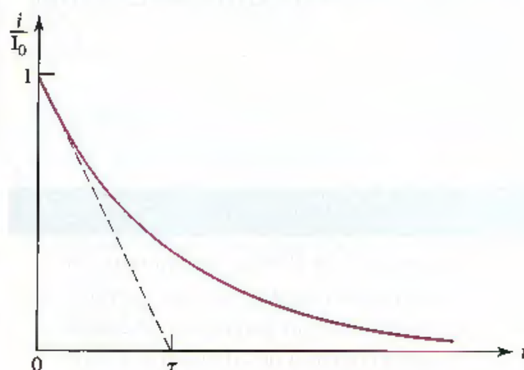


FIGURA 8.8 La constante de tiempo τ de un circuito *RL* en serie es *L/R*, la cual constituye el tiempo requerido para que la curva de respuesta disminuya hasta cero, si ésta aminora a una tasa constante igual a su tasa de decaimiento inicial.

Una interpretación igual de importante de la constante de tiempo τ se obtiene determinando el valor *de* $i(t)/I_0$ at $t = \tau$. Se tiene

$$\frac{i(\tau)}{I_0} = e^{-1} = 0.3679 \qquad \text{o} \qquad i(\tau) = 0.3679 I_0$$

Así, en una constante de tiempo la respuesta disminuyó hasta 36.8% de su valor inicial; el valor de τ también se determina en forma gráfica a partir de este hecho, como se indica en la figura 8.9. Resulta conveniente medir el decaimiento de la corriente en intervalos de una constante de tiempo; además, al recurrir a una calculadora manual o a una tabla de exponenciales negativas se indica que $i(t)/I_0$ es 0.3679 en $t = \tau$, 0.1353 en $t = 2\tau$, 0.04979 en $t = 3\tau$, 0.01832 en $t = 4\tau$ y 0.006738 en $t = 5\tau$. En algunos puntos, entre tres a cinco constantes de tiempo después del tiempo cero, se coincidiría en que la corriente

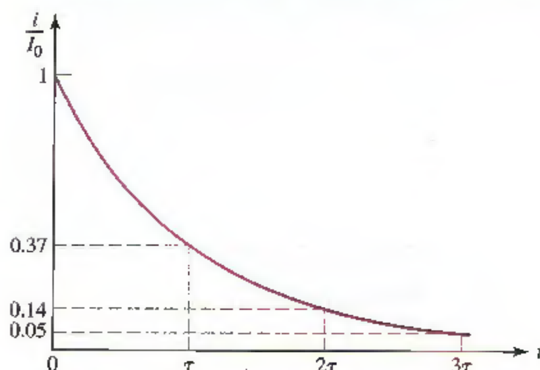


FIGURA 8.9 La corriente en un circuito *RL* en serie se reduce hasta 37% de su valor inicial en $t = \tau$, 14% en $t = 2\tau$ y 5% en $t = 3\tau$.



es una fracción ínfima de lo que era al principio. En consecuencia, si se preguntara *¿cuánto tarda la corriente en decaer hasta cero?*, la respuesta podría ser *cerca de cinco constantes de tiempo*. En este punto, ¡la corriente es menor a 1% de su valor original!

PRÁCTICA

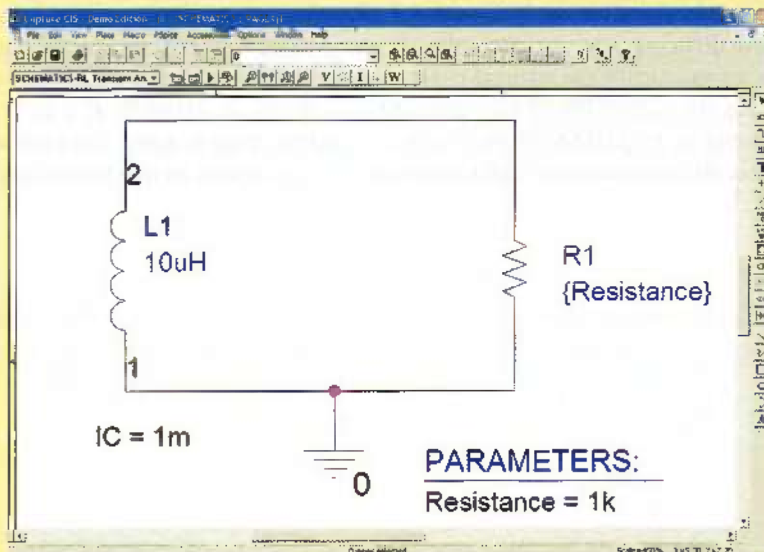
8.3 En un circuito *RL* en serie sin fuente, calcular el valor numérico de la razón: (*a*) $i(2\tau)/i(\tau)$, (*b*) $i(0.5\tau)/i(0)$, y (*c*) t/τ si $i(t)/i(0) = 0.2$; (*d*) t/τ si $i(0) - i(t) = i(0)\ln 2$.

Respuesta: 0.368; 0.607; 1.609; 1.181.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

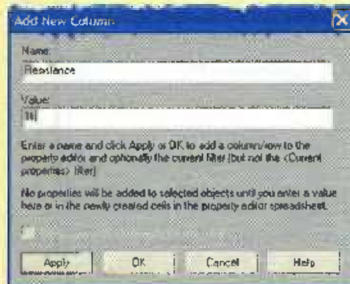
La capacidad de realizar un análisis transitorio de PSpice resulta muy útil cuando se considera la respuesta de circuitos sin fuente. En este ejemplo, se usa una característica especial que permite variar un parámetro de componente, similar a la forma en que variamos la tensión de cd en otras simulaciones. Este objetivo se logra si se le agrega la componente **PARAM** al esquema, el cual puede colocarse en cualquier parte, pues no se alambra en el circuito. El circuito *RL* completo se muestra en la figura 8.10 e incluye una corriente de inductor inicial de 1 mA.

Con la finalidad de relacionar el valor de la resistencia con el parámetro de barrido propuesto, se deben llevar a cabo tres tareas. Primero, se proporciona un nombre al parámetro, al cual se decide llamar *Resistencia* para efectos de simplicidad. Lo anterior se logra mediante un doble clic en la etiqueta **PARAMETERS:** anotado en el esquema. Luego, si se hace clic en los resultados de **New Column** aparece la ventana de diálogo que se mues-

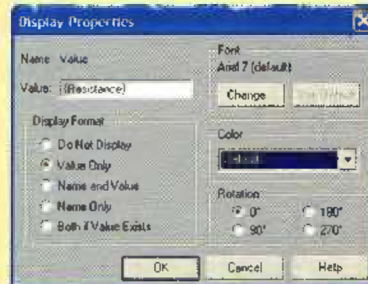


■ **FIGURA 8.10** Circuito *RL* simple dibujado empleando la herramienta de captura de esquemas.

tra en la figura 8.11*a*, en la cual se ingresa *Resistance* en **Name** y un valor de 1 k en **Value.** La segunda tarea consiste en enlazar el valor de R1 al parámetro de barrido, lo cual se logra haciendo doble clic en el valor por omisión de R1 en el esquema, y aparece la ventana de diálogo de la figura 8.11*b*. En **Value** se ingresa simplemente *{Resistance}*. (Observar que es necesario escribirlo entre llaves.)



(*a*)

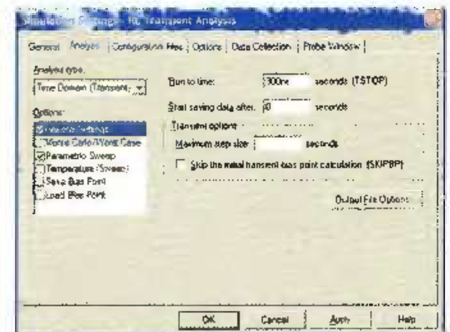


(*b*)

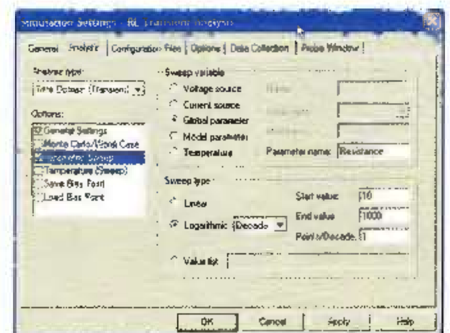
■ **FIGURA 8.11** (*a*) Ventana de diálogo Add New Column en el Property Editor de PARAM. (*b*) Ventana de diálogo para asignar valor a resistencias.

La tercera tarea consiste en configurar la simulación, lo que incluye la configuración de los parámetros para el análisis de transitorios, así como los valores que se desean para R1. En **PSpice** se selecciona **New Simulation Profile** (figura 8.12*a*), en la cual se selecciona **Time Domain (Transient)** de **Analysis type,** 300 ns de **Run to time,** y se marca la selección **Parametric Sweep box** en **Options.** La última opción aparece en el cuadro de diálogo que se muestra en la figura 8.12*b*, en la que se selecciona **Global parameter** de **Sweep variable** y se ingresa *Resistance* en **Parameter name.** La última selección que se requiere es marcar **Logarithmic** en **Sweep type, un Start value** de 10, un **End value** de 1 000 y 1 **Points/Decade;** de forma alterna, se pudieron haber listado los valores deseados de resistencia utilizando **Value list.**

Después de correr la simulación, aparece la caja de notificación que se muestra en la figura 8.13, que presenta los grupos de datos disponibles de la

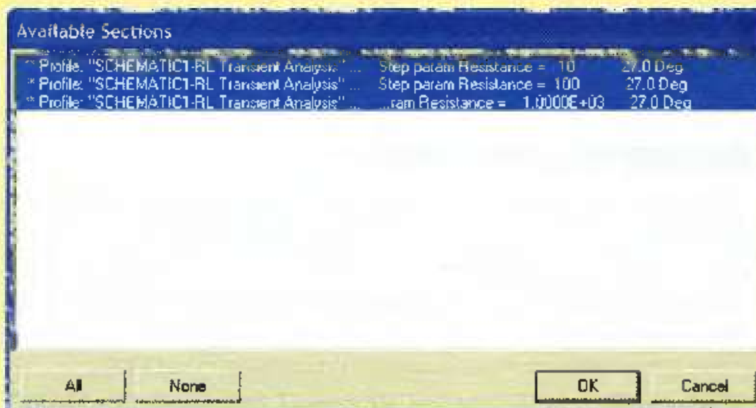


(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 8.12** (*a*) Ventana de diálogo de simulación. (*b*) Ventana de diálogo de parámetros de barrido.



■ **FIGURA 8.13** Ventana de diálogo de las secciones de datos disponibles.

(Continúa en la siguiente página)

gráfica (**Resistance** = 10, 100 y 1 000 en este caso). Se selecciona un conjunto de datos en particular realzándolo; se seleccionan los tres en este ejemplo, lo que resulta en la salida Probe de la figura 8.14.

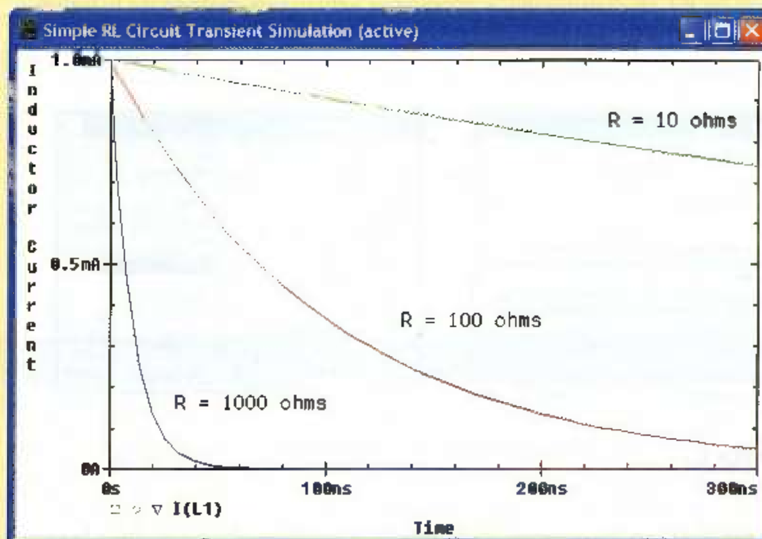


FIGURA 8.14 Salida de Probe de los tres valores de resistencias.

¿Por qué un valor más grande de la constante de tiempo L/R da origen a una curva de respuesta que decae con más suavidad? Se analizará el efecto de cada elemento.

En términos de la constante de tiempo τ, se escribiría simplemente la respuesta del circuito RL en serie como

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

Un aumento de L permite un mayor almacenamiento de energía de la misma corriente inicial, así que esta energía más grande requiere un tiempo más largo para que se disipe en la resistencia. De igual forma se aumentaría L/R al reducir R. En este caso, la potencia que fluye hacia la resistencia es menor para la misma corriente inicial; también en este caso se requiere un tiempo mayor para disipar la energía almacenada. Dicho efecto se observa con claridad en el resultado de simulación de la figura 8.14.

8.3 CIRCUITO *RC* SIN FUENTE

Los circuitos que se basan en combinaciones resistencia-capacitor son más comunes que sus análogos resistencia-inductor. Las principales razones consisten en las menores pérdidas que se generan en un capacitor físico, el menor costo y el hecho de que el modelo matemático simple concuerda mejor con el comportamiento real del dispositivo, así como su tamaño y peso menores (que son dos aspectos muy importantes en las aplicaciones de circuitos integrados).

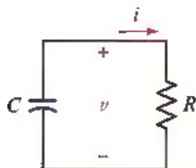


FIGURA 8.15 Circuito *RC* en paralelo para el que $v(t)$ se va a determinar, sujeto a la condición inicial $v(0) = V_0$.

Se verá en qué grado el análisis del circuito *RC* en paralelo (¿o está en serie?) que se muestra en la figura 8.15 corresponde al del circuito *RL*. En el capacitor seleccionado se supondrá una energía almacenada inicial de

$$v(0) = V_0$$

La corriente total que sale del nodo de la parte superior del esquema de circuito debe ser cero, por lo que se debería escribir

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

La división entre C da como expresión

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \qquad [13]$$

La ecuación [13] tiene una forma familiar; mientras que la comparación con la ecuación [1]

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad [1]$$

muestra que la sustitución de i por v y L/R por RC da una ecuación idéntica a la que se consideró antes. Así debe ser, pues el circuito RC que se analizará ahora resulta el dual del circuito RL considerado primero. Dicha dualidad obliga a que $v(t)$ en el circuito RC e $i(t)$ en el circuito RL tengan expresiones idénticas, si la resistencia de un circuito es igual al recíproco de la resistencia del otro circuito y si L es numéricamente igual a C. En consecuencia, la respuesta del circuito RL,

$$i(t) = i(0)e^{-Rt/L} = I_0e^{-Rt/L}$$

permite escribir de inmediato

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = V_0e^{-t/RC} \qquad [14]$$

para el circuito RC.

Suponiendo que se hubiese elegido la corriente i como la variable del circuito RC en vez de la tensión v. Al aplicar la ley de Kirchhoff de tensión,

$$\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' - v_0(t_0) + Ri = 0$$

se obtiene una ecuación integral que se opone a la ecuación diferencial. Sin embargo, al tomar la derivada del tiempo de ambos lados de esta ecuación,

$$\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0 \qquad [15]$$

y sustituyendo i por v/R, se obtiene de nuevo la ecuación [13]:

$$\frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} = 0$$

La ecuación [15] podría utilizarse como punto de partida, pero la aplicación de los principios de dualidad no habría sido tan natural.

Se analizará la naturaleza física de la respuesta de tensión del circuito RC según se expresa por medio de la ecuación [14]. En $t = 0$ se obtiene la condición inicial correcta, y a medida que t se vuelve infinita, la tensión tiende a cero. Este último resultado concuerda con la idea de que si cualquier tensión se conserva en el capacitor, la energía continuaría fluyendo hacia la resistencia y se disiparía como calor. *En consecuencia, se requiere una tensión final nula.* La constante de tiempo del circuito RC se determinaría mediante las relaciones de dualidad con respecto a la expresión de la constante de tiempo del circuito RL o

sólo con observar el tiempo en el que la respuesta disminuyó hasta 37% de su valor inicial:

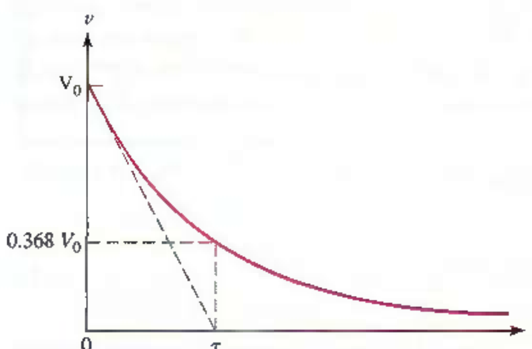
$$\frac{\tau}{RC} = 1$$

por lo que:

$$\boxed{\tau = RC} \qquad [16]$$

La familiaridad que se tiene con la exponencial negativa y la importancia de la constante de tiempo τ permite bosquejar con rapidez la curva de respuesta (fig. 8.16). Valores más grandes de R o C proporcionan mayores constantes de tiempo y una disipación más lenta de la energía almacenada. Una resistencia mayor disipará una potencia más pequeña con una tensión determinada entre sus extremos, por lo que requiere mayor tiempo para convertir la energía almacenada en calor; una capacitancia más grande almacena mayor energía con una tensión determinada en ella, lo que también en este caso requiere un tiempo mayor para disipar su energía inicial.





■ **FIGURA 8.16** La tensión $v(t)$ en el capacitor del circuito *RC* en paralelo se grafica como una función del tiempo. El valor inicial de $v(t)$ es V_0.

EJEMPLO 8.3

Encontrar la tensión marcada v en *t* H 200 „ s del circuito de la figura 8.17*a*.

Para encontrar la tensión que se pide, será necesario dibujar y analizar dos circuitos separados: uno antes de que se dispare el interruptor (figura 8.17*b*), y otro después (figura 8.17*c*).

El único propósito de analizar el circuito de la figura 8.17*b* es obtener una tensión inicial del capacitor; se supone que cualquier transitorio en ese circuito desapareció hace mucho tiempo y quedó un circuito de cd puro. Si no existe ninguna corriente que circule a través del capacitor o la resistencia de 4 Ω, entonces,

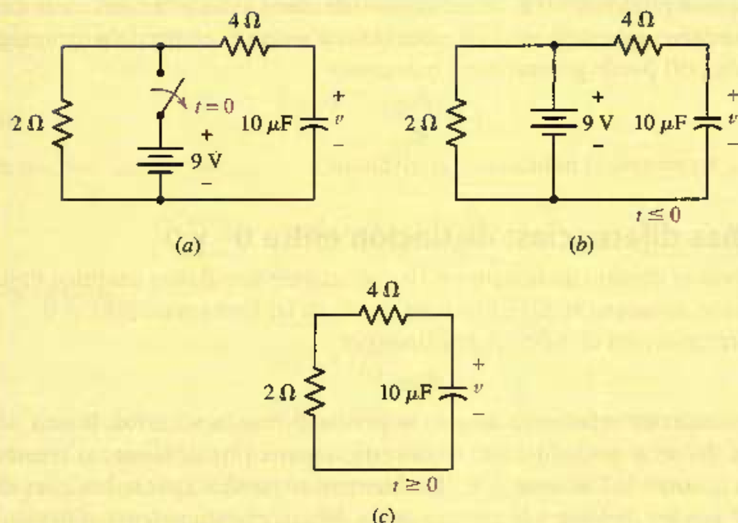
$$v(0) = 9\ \text{V} \qquad [17]$$

Enseguida se enfoca la atención en el circuito de la figura 8.17*c*, reconociendo que

$$\tau = RC = (2 + 4)(10 \times 10^{-6}) = 60 \times 10^{-6}\ \text{s}$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación [14],

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = v(0)e^{-t/60\times10^{-6}} \qquad [18]$$



■ **FIGURA 8.17** (*a*) Circuito *RC* simple con un interruptor disparado en el tiempo $t = 0$. (*b*) El circuito antes de $t = 0$. (*c*) El circuito después de que se dispara el interruptor y se quita la fuente de 9 V.

La tensión en el capacitor debe ser igual en ambos circuitos en $t = 0$; en ninguna otra tensión o corriente se pone dicha restricción. Sustituyendo la ecuación [17] en la [18],

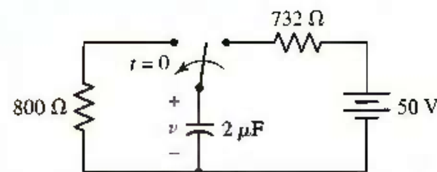
$$v(t) = 9e^{-t/60 \times 10^{-6}} \text{ V}$$

por lo que $v(200 \times 10^{-6}) = 321.1$ mV (menos de 4% de su máximo valor).

PRÁCTICA

8.4 Determinar $v(0)$ y $v(2 \text{ ms})$ del circuito de la figura 8.18.

Respuesta: 50 V, 14.33 V.



■ **FIGURA 8.18**

8.4 UNA PERSPECTIVA MÁS GENERAL

Como se ha visto en los ejemplos 8.2 y 8.3, no resulta difícil trasladar los resultados que se obtuvieron para el circuito *RL* en serie a un circuito que contenga cualquier número de resistencias y un inductor. De modo similar, se generalizan los resultados del circuito *RC* para un circuito con cualquier número de resistencias y un capacitor. Incluso es posible considerar circuitos que contengan fuentes dependientes.

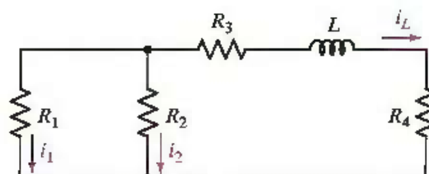
Circuitos *RL* generales

Como ejemplo, examinar el circuito que se ilustra en la figura 8.19. La resistencia equivalente que el inductor enfrenta es

$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

y por lo tanto la constante de tiempo vale

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \qquad [19]$$



■ **FIGURA 8.19** Circuito sin fuente que contiene un inductor y varias resistencias que se analiza mediante la determinación de la constante de tiempo $\tau = L/R_{eq}$.

También se puede enunciar esto como

$$\tau = \frac{L}{R_{TH}},$$

donde R_{TH} es la resistencia equivalente de Thévenin "vista" por el inductor L.

También se puede observar que si varios inductores están presentes en un circuito y pueden combinarse mediante arreglos en serie y/o en paralelo, entonces la ecuación [19] puede generalizarse más como

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} \qquad [20]$$

donde L_{eq} representa la inductancia equivalente.

Pequeñas diferencias: distinción entre 0^C y 0^i

Si se regresa al circuito de la figura 8.19 y se supone que alguna cantidad finita de energía se almacena en el inductor en $t = 0$, de tal forma que $i_L(0) \neq 0$.

La corriente i_L en el inductor está dada por

$$i_L = i_L(0)e^{-t/\tau}$$

así que lo anterior representa lo que se podría llamar la solución básica del problema. Es muy probable que se necesite alguna otra corriente o tensión aparte de i_L como la corriente i_2 en R_2. Siempre se pueden aplicar las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm a la parte resistiva del circuito sin ninguna dificultad, pero la división de corriente proporciona la respuesta más rápida en este circuito:

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}[i_L(0)e^{-t/\tau}]$$

También se puede conocer el valor inicial de alguna corriente aparte de la del inductor. En razón de que *la corriente en una resistencia puede cambiar de manera instantánea,* se indicará el instante posterior a cualquier cambio que podría ocurrir en $t = 0$ mediante el uso del símbolo 0^+; en un lenguaje más matemático, $i_1(0^+)$ es el límite de la derecha de $i_1(t)$ a medida que t tiende a cero.[1] Por lo tanto, si se proporciona el valor inicial de i_1 como $i_1(0^+)$, entonces el valor inicial de i_2 es

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}$$

A partir de tales valores, se obtiene el valor inicial necesario de $i_L(0)$:

$$i_L(0^+) = -[i_1(0^+) + i_2(0^+)] = -\frac{R_1 + R_2}{R_2}i_1(0^+)$$

Observe que $i_L(0^+)$ es siempre igual a $i_L(0^-)$. Lo anterior no es necesariamente válido para la tensión en el inductor o para la tensión o corriente en la resistencia, ya que pueden cambiar en el tiempo cero.

así que la expresión de i_2 se convierte en

$$i_2 = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}e^{-t/\tau}$$

Se verá si se obtiene esta última expresión de modo más directo. En razón de que la corriente en el inductor decae de manera exponencial como $e^{-t/\tau}$, *toda corriente que circula por el circuito debe seguir el mismo comportamiento funcional.* Lo anterior resulta claro al considerar la corriente en el inductor como una fuente de corriente que se aplica a una red resistiva. Cada corriente y tensión en la red resistiva debe tener la misma dependencia de tiempo. Por lo tanto, mediante estas ideas se puede expresar i_2 como:

$$i_2 = Ae^{-t/\tau}$$

donde

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

(1) Observar que *sólo* es una conveniencia de notación. Cuando se contrapone con $t = 0^+$ o su compañera $t = 0^-$ en una ecuación, simplemente se emplea el valor cero. La notación permite diferenciar con claridad entre los tiempos anterior y posterior al acontecimiento, tal como la apertura o cierre del interruptor, o en un suministro de potencia que se activa o desactiva.

y A debe determinarse a partir del conocimiento del valor inicial de i_2. Puesto que se conoce $i_1(0^+)$, la tensión a través de R_1 y de R_2 se determina como

$$R_2 i_2(0^+) = R_1 i_1(0^+)$$

lo que nos conduce a

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}$$

Por lo tanto,

$$i_2(t) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}e^{-t/\tau}$$

Una secuencia similar de pasos proporcionará una solución rápida a un gran número de problemas. Se reconoce primero la dependencia del tiempo de la respuesta como un decaimiento exponencial, se determina la constante de tiempo apropiada combinando resistencias, se escribe la solución con una amplitud desconocida y luego se determina la amplitud a partir de una condición inicial.

Esta misma técnica se aplica a cualquier circuito con un inductor y cualquier número de resistencias, así como a circuitos especiales que contengan dos o más inductores, y también dos o más resistencias que se puedan simplificar mediante la combinación de resistencias o inductancias en un inductor y en una resistencia.

EJEMPLO 8.4

Determinar tanto i_1 como i_L del circuito de la figura 8.20*a* para $t > 0$.

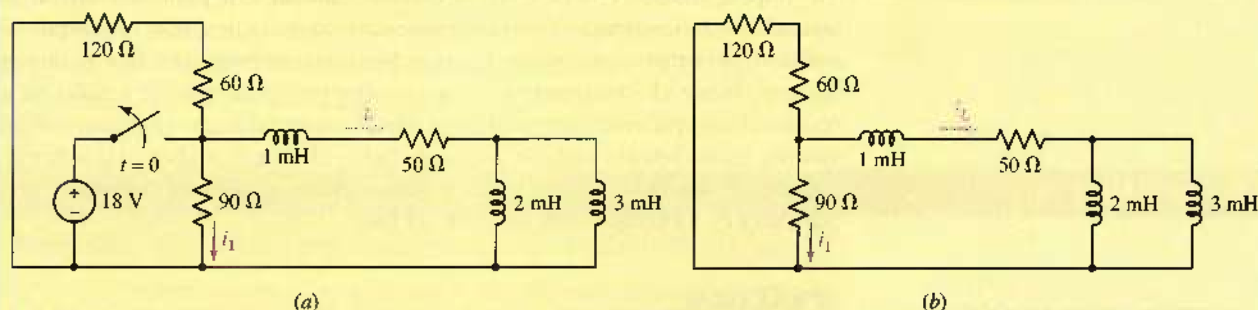


FIGURA 8.20 (*a*) Circuito con resistencias e inductores múltiples. (*b*) Después de $t = 0$, el circuito se simplifica a una resistencia equivalente de 110 Ω en serie con $L_{eq} = 2.2$ mH.

Después de $t = 0$, cuando la fuente de tensión se desconecta como se muestra en la figura 8.20*b*, se calcula con facilidad una inductancia equivalente,

$$L_{eq} = \frac{2 \times 3}{2+3} + 1 = 2.2 \text{ mH}$$

una resistencia equivalente, en serie con la inductancia equivalente,

$$R_{eq} = \frac{90(60+120)}{90+180} + 50 = 110\ \Omega$$

(Continúa en la siguiente página)

y una constante de tiempo

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{2.2 \times 10^{-3}}{110} = 20\ \mu s$$

De tal modo, la forma de la respuesta natural es $Ke^{-50\,000t}$, donde K es una constante desconocida. Si se considera al circuito justo antes de la apertura del interruptor ($t = 0^-$), $i_L = 18/50$ A. En razón de que $i_L(0^+) = i_L(0^-)$, se sabe que $i_L = 18/50$ A o 360 mA en $t = 0^+$, por lo que

$$i_L = \begin{cases} 360 \text{ mA}, & t < 0 \\ 360e^{-50\,000t} \text{ mA}, & t \geq 0 \end{cases}$$

No existe ninguna restricción sobre i_1 para que cambie instantáneamente en $t = 0$, por lo que su valor en $t = 0^-$ (18/90 A o 200 mA) no es relevante para encontrar i_1 en $t > 0$. En lugar de eso, se debe encontrar $i_1(0^+)$ a través del conocimiento de $i_L(0^+)$. Mediante la división de corriente, se tiene

$$i_1(0^+) = -i_L(0^+)\frac{120+60}{120+60+90} = -240 \text{ mA}$$

Por consiguiente,

$$i_1 = \begin{cases} 200 \text{ mA}, & t < 0 \\ -240e^{-50\,000t} \text{ mA}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Se puede verificar el análisis mediante PSpice y el modelo de interruptor **Sw_tOpen,** aunque se debe recordar que, en realidad, esta parte son solamente dos valores de resistencias: uno correspondiente a antes de que el interruptor se active en el tiempo especificado (el valor por omisión es de 10 mΩ) y el otro es después de que el interruptor se active (el valor por omisión es de 1 MΩ). Si la resistencia equivalente del resto del circuito es comparable con cualquiera de los valores, éstos deberán editarse mediante doble clic en el símbolo del interruptor del diagrama del circuito. Observar que también hay un modelo de interruptor que cierra en un tiempo específico: **Sw_tClose.**

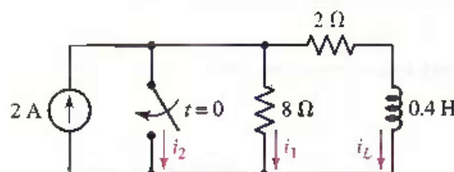


FIGURA 8.21

PRÁCTICA

8.5 Para $t = 0.15$ s en el circuito de la figura 8.21, encontrar el valor de (*a*) i_L; (*b*) i_1; (*c*) i_2.

Respuesta: 0.756 A; 0; 1.244 A.

Ahora se considerará la tarea de determinar la respuesta natural de cualquier circuito que pueda representarse mediante un inductor equivalente en serie con una resistencia equivalente. *Un circuito que contenga varias resistencias e inductores no siempre posee una forma que permite que las resistencias o los inductores se combinen en elementos equivalentes individuales.* En tales casos, no hay un solo término exponencial negativo o una sola constante de tiempo asociados con el circuito, sino que habrá, en general, varios términos exponenciales negativos, cuyo número será igual al de inductores que quedan luego de haber

efectuado todas las combinaciones posibles de inductores. En el capítulo 9 se estudia esta situación de manera más detallada.

Circuitos RC generales

Muchos de los circuitos *RC* para los que se desearía encontrar una respuesta natural contienen más de una sola resistencia y un solo capacitor. Del mismo modo en que se hizo con los circuitos *RL*, se analizan primero los casos en los que el circuito dado puede reducirse a un circuito equivalente consistente en sólo una resistencia y un capacitor.

Suponga primero que se abordará un circuito que nada más contiene un capacitor, pero un número cualquiera de resistencias. Se puede sustituir la red resistiva de dos terminales que se encuentra en las terminales del capacitor por una resistencia equivalente, y luego se podría escribir de inmediato la expresión de la tensión del capacitor. En dichas circunstancias, el circuito tiene una constante de tiempo efectiva dada por

$$\tau = R_{eq}C$$

donde R_{eq} es la resistencia equivalente de la red. Una perspectiva alterna es que R_{eq} sea en realidad la resistencia equivalente de Thévenin "vista" por el capacitor.

Si el circuito tiene más de un capacitor, pero puede reemplazarse de alguna forma mediante combinaciones en serie y/o en paralelo con una capacitancia C_{eq}, entonces el circuito tendrá una constante de tiempo efectiva dada por

$$\tau = RC_{eq}$$

expresándose el caso general como,

$$\tau = R_{eq}C_{eq}$$



Sin embargo, vale la pena mencionar que los capacitores en paralelo sustituidos por una capacitancia equivalente tendrían que contar con condiciones iniciales idénticas.

EJEMPLO **8.5**

Determinar $v(0^C)$ e $i_1(0^C)$ del circuito de la figura 8.22*a* si $v(0^{'})$ H V_0.

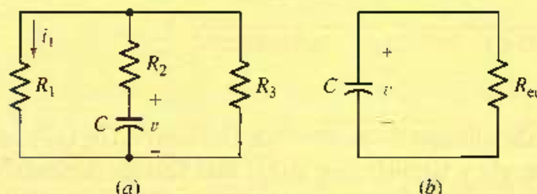


FIGURA 8.22 (*a*) Circuito que contiene un capacitor y varias resistencias. (*b*) Las resistencias se sustituyen por una sola resistencia equivalente; la constante de tiempo es ahora simplemente $\tau = R_{eq}C$.

Primero se simplifica el circuito de la figura 8.22*a* como se muestra en la figura 8.22*b*, lo que permite escribir

$$v = V_0 e^{-t/R_{eq}C}$$

(Continúa en la siguiente página)

donde

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0 \qquad \text{y} \qquad R_{eq} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

Toda corriente y toda tensión en la parte resistiva de la red debe tener la forma $Ae^{-t/R_{eq}C}$, donde A es el valor correspondiente a las condiciones iniciales de esa corriente o tensión. Así, la corriente en R_1, por ejemplo, se expresaría como:

$$i_1 = i_1(0^+)e^{-t/\tau}$$

donde

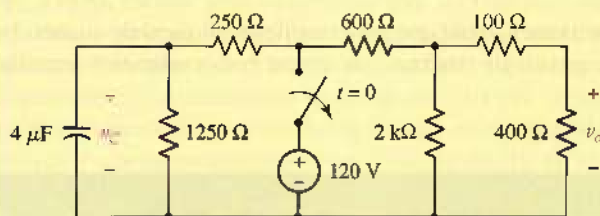
$$\tau = \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\right)C$$

e $i_1(0^+)$ queda por determinarse a partir de la condición inicial. Cualquier corriente que fluya en el circuito cuando $t = 0^+$ debe provenir del capacitor. Por lo tanto, ya que v no puede cambiar de forma instantánea, $v(0^+) = v(0^-) = V_0$ y

$$i_1(0^+) = \frac{V_0}{R_2 + R_1R_3/(R_1 + R_3)} \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

PRÁCTICA

8.6 Calcular los valores de v_C y de v_o del circuito de la figura 8.23 para t igual a: (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) 1.3 ms.



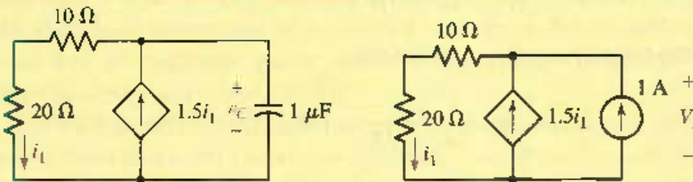
■ **FIGURA 8.23**

Respuesta: 100 V, 38.4 V; 100 V, 25.6 V; 59.5 V, 15.22 V.

El método puede aplicarse a circuitos que cuenten con un elemento de almacenamiento de energía y también con una o más fuentes dependientes. En dichos casos, se puede escribir una ecuación KCL o KVL apropiada junto con cualquiera otra ecuación de soporte que sea necesaria, reducir todo a una sola ecuación diferencial y extraer la ecuación característica para encontrar la constante de tiempo. De forma alternativa, se puede empezar a buscar la resistencia equivalente de Thévenin de la red conectada al capacitor o inductor y utilizarla en el cálculo de la constante de tiempo *RL* o *RC* apropiada, a menos que la fuente dependiente esté controlada por una tensión o corriente asociada con el elemento de almacenamiento de energía, en cuyo caso no podrá utilizarse el método de Thévenin. En el ejemplo siguiente se estudia esta cuestión con mayor detalle.

EJEMPLO 8.6

En el circuito de la figura 8.24*a*, encontrar la tensión marcada v_C para $t > 0$ si $v_C(0^-) = 2$ V.



■ **FIGURA 8.24** (*a*) Circuito *RC* simple que contiene una fuente dependiente no controlada por una tensión o corriente de capacitor. (*b*) Circuito para encontrar el equivalente de Thévenin de la red conectada al capacitor.

La fuente dependiente no está controlada por una tensión o corriente de capacitor, por lo que se puede comenzar por buscar el equivalente de Thévenin de la red a la izquierda del capacitor. Si se conecta una fuente de referencia de 1 A, como en la figura 8.24*b*,

$$V_x = (1 + 1.5i_1)(30)$$

donde

$$i_1 = \left(\frac{1}{20}\right)\frac{20}{10 + 20}V_x = \frac{V_x}{30}$$

Mediante un poco de álgebra se puede ver que $V_x = -60$ V, por lo que la red tiene una resistencia equivalente de Thévenin de $-60\ \Omega$ (inusual, pero no imposible cuando se trabaja con una fuente dependiente). Por lo tanto, el circuito tiene una constante de tiempo *negativa*

$$\tau = -60(1 \times 10^{-6}) = -60\ \mu\text{s}$$

Por lo tanto, la tensión en el capacitor es,

$$v_C(t) = Ae^{t/60\times10^{-6}}\ \text{V}$$

donde $A = v_C(0^+) = v_C(0^-) = 2$ V. Por ende,

$$\boxed{v_C(t) = 2e^{t/60\times10^{-6}}\ \text{V}} \qquad [21]$$

lo cual, sorprendentemente, es inestable: crece de manera exponencial con el tiempo. Esto no puede continuar de forma indefinida; uno o más elementos del circuito fallarán en un momento u otro.

De manera alternativa, se podría escribir una ecuación KCL simple para el nodo superior de la figura 8.24*a*

$$v_C = 30\left(1.5i_1 - 10^{-6}\frac{dv_C}{dt}\right) \qquad [22]$$

donde

$$i_1 = \frac{v_C}{30} \qquad [23]$$

(Continúa en la siguiente página)

Sustituyendo la ecuación [23] en la [22] y con un poco de álgebra, se obtiene

$$\frac{dv_C}{dt} - \frac{1}{60 \times 10^{-6}} v_C = 0$$

la cual tiene como ecuación característica

$$s - \frac{1}{60 \times 10^{-6}} = 0$$

Por lo tanto,

$$s = \frac{1}{60 \times 10^{-6}}$$

y, así

$$v_C(t) = Ae^{t/60 \times 10^{-6}} \text{ V}$$

como se calculó con anterioridad. La sustitución de $A = v_C(0^+) = 2$ da como resultado la ecuación [21], que es la expresión del cálculo de la tensión del capacitor para $t > 0$.

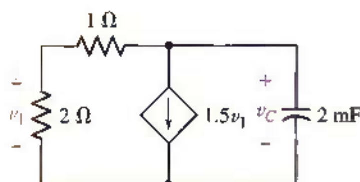


FIGURA 8.25 Circuito del problema de práctica 8.7.

PRÁCTICA

8.7 (*a*) Considerando el circuito de la figura 8.25, determinar la tensión $v_C(t)$ para $t > 0$ si $v_C(0^-) = 11$ V. (*b*) ¿Es "estable" este circuito?

Respuesta: (*a*) $v_C(t) = 11e^{-2\times10^3 t/3}$ V, $t > 0$. (*b*) Sí, decae (exponencialmente) en lugar de crecer conforme transcurre el tiempo.

Algunos circuitos que contienen varios resistencias y capacitores se podrían sustituir por un circuito equivalente que contenga sólo una resistencia y un capacitor; se requiere que el circuito original pueda descomponerse en dos partes, una que incluya todas las resistencias y la otra todos los capacitores, de modo que ambas partes sólo se conecten mediante dos conductores ideales. Sin embargo, éste por lo general no es el caso, así que con mucha probabilidad se requerirán las constantes de tiempo múltiples, a fin de describir circuitos con varias resistencias y capacitores.

Como comentario, se debe ser precavido ante ciertas situaciones que impliquen sólo elementos ideales que se conectan en conjunto de manera repentina. Por ejemplo, es posible imaginar que se conectan dos capacitores ideales en serie que tengan tensiones desiguales previas a $t = 0$. Lo anterior plantea un problema al usar modelo matemático de un capacitor ideal; sin embargo, los capacitores reales tienen resistencias asociadas, a través de las cuales se disipa energía.

8.5 LA FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

Se ha estudiado la repuesta de los circuitos *RL* y *RC* cuando no se presentan fuentes o funciones forzadas; se denomina *respuesta natural* debido a que su forma depende sólo de la naturaleza del circuito. La razón de que se obtenga alguna respuesta surge de la presencia de almacenamiento de energía inicial dentro

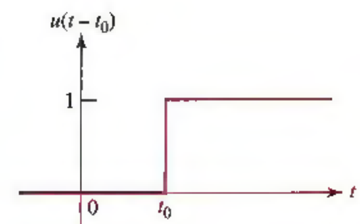
de los elementos inductivos o capacitivos en el circuito. En algunos casos se pueden encontrar circuitos que contienen fuentes e interruptores; se informó que ciertas operaciones de conmutación se efectuaron en $t = 0$ con el fin de eliminar todas las fuentes del circuito, al tiempo que se dejan cantidades de energía almacenadas aquí y allá. En otras palabras, se han resuelto problemas en los que las fuentes de energía se eliminan en forma repentina del circuito; se debe considerar ahora el tipo de respuesta que se producirá cuando las fuentes de energía se *apliquen* de forma súbita a un circuito.

El enfoque será en la respuesta que aparece cuando las fuentes de energía que se aplican de repente son fuentes de cd. Puesto que al parecer todo dispositivo eléctrico se energiza al menos una vez y debido a que la mayoría se activa y desactiva muchas veces en el curso de su vida útil, el estudio se aplica a muchos casos prácticos. Aun cuando por el momento se restringe a fuentes de cd, se presentan innumerables casos en los que dichos ejemplos más simples corresponden al funcionamiento de dispositivos prácticos. Por ejemplo, el primer circuito que se analizará podría representar la formación de la corriente cuando se arranca un motor de cd. La generación y el uso de los pulsos de tensión rectangulares necesarios para representar un número o un comando en un microprocesador proporciona muchos ejemplos en el campo de la circuitería electrónica o transistorizada. Se presentan circuitos similares en los circuitos de sincronización y barrido de los receptores de televisión, en sistemas de comunicación que utilizan modulación por pulsos y en los sistemas de radar, por nombrar unos cuantos ejemplos.

Se ha hablado de la "aplicación repentina" de una fuente de energía, y por esta frase se entiende que su aplicación es en el tiempo cero.[2] Por lo tanto, la operación de un interruptor en serie con una batería es equivalente a la función forzada que es nula hasta el instante en que se cierra el interruptor, y es igual de ahí en adelante a la tensión de la batería. La función forzada tiene un rompimiento, o discontinuidad, en el instante en el que se cierra el interruptor. Ciertas funciones forzadas especiales que son discontinuas o tienen derivadas discontinuas se denominan ***funciones singulares***, las más importantes de las cuales son la ***función escalón unitario*** y la ***función impulso unitario.***

Se define la función forzada de escalón unitario como una función del tiempo que es nula para todos los valores de su argumento que son menores que cero y que es la unidad para todos los valores positivos de su argumento. Sea $(t - t_0)$ el argumento y representemos la función de escalón unitario por u, entonces $u(t - t_0)$ debe ser cero para todos los valores de t menores que t_0, y será la unidad para todos los valores de t mayores que t_0. En $t = t_0$, $u(t - t_0)$ cambia en forma abrupta desde 0 hasta 1. Su valor en $t = t_0$ no está definido, pero se conoce en todos los instantes de tiempo que están arbitrariamente cerca de $t = t_0$. A menudo se indica lo anterior escribiendo $u(t_0^-) = 0$ y $u(t_0^+) = 1$. La definición matemática concisa de la función forzada de escalón unitario es

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$



■ **FIGURA 8.26** Función forzada de escalón unitario $u(t - t_0)$.

y la función se muestra de manera gráfica en la figura 8.26. Observar que una recta vertical de longitud unitaria se presenta en $t = t_0$. A pesar de que este "aumento" no es, de manera estricta, una parte de la definición del escalón unitario, suele mostrarse en cada dibujo.

(2) Desde luego, esto no es físicamente posible. Sin embargo, si es muy corta la escala de tiempo en la cual ocurre un suceso de este tipo comparada con las demás escalas de tiempo relevantes que describen la operación del circuito, el señalamiento aludido es más o menos cierto, así como matemáticamente conveniente.

Se observa también que el escalón unitario no necesita ser una función del tiempo. Por ejemplo, $u(x - x_0)$ podría usarse para denotar una función de escalón unitario, donde x podría ser una distancia en metros, por ejemplo, o una frecuencia.

A menudo en el análisis de circuitos una discontinuidad o una acción de conmutación ocurre en un instante, el cual se define como $t = 0$. En ese caso, en $t_0 = 0$, se representa la función forzada de escalón unitario correspondiente mediante $u(t - 0)$, o en forma más simple $u(t)$. Esto se ilustra en la figura 8.27. Así,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

■ **FIGURA 8.27** La función forzada de escalón unitario $u(t)$ se muestra como una función de t.

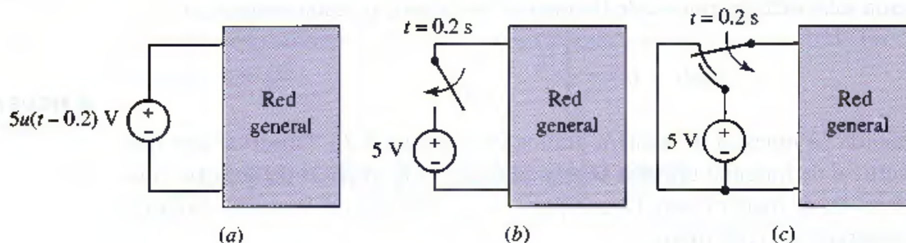
La función forzada de escalón unitario es en sí misma adimensional. Si se desea representar una tensión, se requiere multiplicar $u(t - t_0)$ por alguna tensión constante, como 5 V. De tal modo, $v(t) = 5u(t - 0.2)$ V constituye una fuente de tensión ideal que es cero antes de $t = 0.2$ s y una constante de 5 V después de $t = 0.2$ s. La función forzada se muestra en la figura 8.28*a* conectada a una red general.

Fuentes físicas y la función de escalón unitario

Ahora es necesario preguntarse de modo lógico cuál fuente física es la equivalente a esta función forzada discontinua. Por equivalente, se entiende simplemente que las características de tensión-corriente de las dos redes son idénticas. En la fuente de tensión de escalón de la figura 8.28*a*, la característica de tensión-corriente es bastante simple: la tensión es cero antes de $t = 0.2$ s, de 5 V después de $t = 0.2$ s, y la corriente puede tener cualquier valor (finito) en cualquier intervalo de tiempo. Un primer pensamiento podría llevar a intentar un equivalente como el que se muestra en la figura 8.28*b*, una fuente de cd de 5 V en serie con un interruptor que se cierra en $t = 0.2$ s. Sin embargo, no es equivalente para $t < 0.2$ s, debido a que la tensión entre la batería y el interruptor no está especificada por completo en dicho intervalo. La fuente "equivalente" es un circuito abierto y la tensión en ella quizás sea cualquiera. Después de $t = 0.2$ s, las redes son equivalentes y si es el único intervalo que interesa, y si las corrientes iniciales que fluyen de las dos redes son idénticas en $t = 0.2$ s, entonces la figura 8.28*b* se convierte en un equivalente útil de la figura 8.28*a*.



Con el fin de obtener un equivalente exacto de la función forzada de escalón unitario, se podría instalar un interruptor de dos vías y un polo. Antes de $t = 0.2$ s, el interruptor sirve para asegurar la tensión cero entre las terminales de entrada de la red general. Después de $t = 0.2$ s, el interruptor se cierra para proporcionar una tensión de entrada constante de 5 V. En $t = 0.2$ s, la tensión es indeterminada (como en la función forzada de escalón), y la batería se encuentra por el



■ **FIGURA 8.28** (*a*) Una función forzada de escalón de tensión se muestra como la fuente de una red general. (*b*) Un circuito simple que a pesar de que no es el equivalente del inciso (*a*) se podría utilizar en muchos casos como su equivalente. (*c*) Equivalente exacto del inciso (*a*).

momento en cortocircuito (¡por suerte se está trabajando con modelos matemáticos!). El equivalente exacto de la figura 8.28*a* se ilustra en la figura 8.28*c*.

La figura 8.29*a* presenta una función forzada de corriente de escalón que activa a una red general. Si se intenta sustituir este circuito por una fuente de cd en paralelo con un interruptor (que se abre en $t = t_0$), se debe reconocer que los circuitos son equivalentes después de $t = t_0$, pero que las respuestas posteriores a ese instante son semejantes sólo si las condiciones iniciales resultan iguales. El circuito de la figura 8.29*b* implica que no existe tensión entre las terminales de la fuente de corriente durante $t < t_0$. Éste no es el caso del circuito de la figura 8.29*a*. Sin embargo, a menudo se podrían usar los circuitos de las figuras 8.29*a* y *b* de manera indistinta. El equivalente exacto de la figura 8.29*a* es el dual de la figura 8.28*c*; no es posible construir el equivalente exacto de la figura 8.29b sólo con las funciones forzadas de escalón de corriente y de tensión.[3]

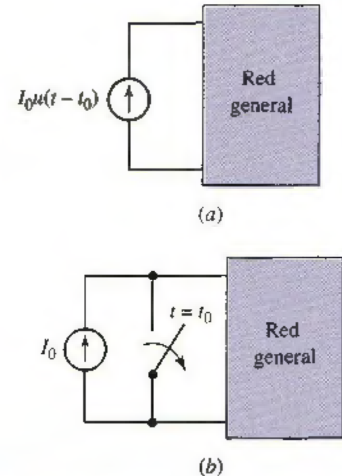


FIGURA 8.29 (*a*) Función forzada de escalón de corrientes que se aplica a una red general. (*b*) Circuito simple que, aunque no es el equivalente exacto del inciso (*a*), se podría emplear como su equivalente en muchos casos.

La función pulso rectangular

Algunas funciones forzadas muy útiles se obtienen mediante la manipulación de la función forzada de escalón unitario. Se definirá un pulso de tensión rectangular mediante las siguientes condiciones:

$$v(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V_0 & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

El pulso se dibuja en la figura 8.30. ¿Es factible representarlo en términos de la función forzada de escalón unitario? Se analizará la diferencia de los dos escalones unitarios, $u(t - t_0) - u(t - t_1)$. La diferencia entre las dos funciones escalón que se muestran en la figura 8.31*a* es un pulso rectangular. La fuente $V_0u(t - t_0) - V_0u(t - t_1)$ suministra la tensión deseada que se indica en la figura 8.31*b*.

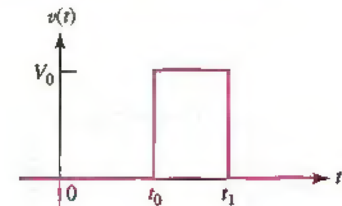


FIGURA 8.30 Función forzada que resulta útil (pulso de tensión rectangular).

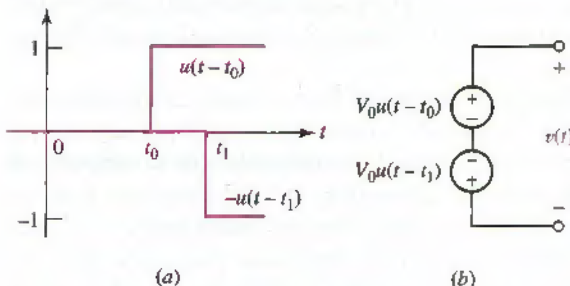


FIGURA 8.31 (*a*) Escalones unitarios $u(t - t_0)$ y $-u(t - t_1)$. (*b*) Fuente que produce el pulso de tensión rectangular de la figura 8.30.

Si se tiene una fuente de tensión senoidal $V_m \operatorname{sen} \omega t$ que se conecta de manera repentina a una red en $t = t_0$, entonces una función de tensión apropiada sería $v(t) = V_m u(t - t_0) \operatorname{sen} \omega t$. Si se desea representar un estallido de energía del transmisor de un automóvil controlado por radio que opera a 47 MHz (295 Mrad/s), se podría desactivar la fuente senoidal de 70 ns después mediante una segunda función forzada de escalón unitario.[4] Por lo tanto, el pulso de tensión es

$$v(t) = V_m[u(t - t_0) - u(t - t_0 - 7 \times 10^{-8})]\operatorname{sen}(295 \times 10^6 t)$$

Esta función forzada se dibuja en la figura 8.32.

(3) El equivalente puede dibujarse si se conoce la corriente que circula por el interruptor antes de $t = t_0$.
(4) Al parecer, uno es muy diestro en los controles de este automóvil. ¿Un tiempo de reacción de 0.1 μs?

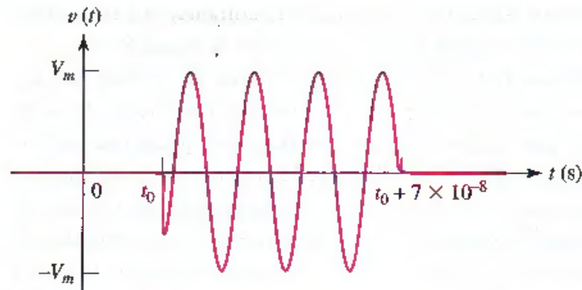


FIGURA 8.32 Pulso de radiofrecuencia de 47 MHz, descrito por $v(t) = V_m[u(t - t_0) - u(t - t_0 - 7 \times 10^{-8})]\ \text{sen}(295 \times 10^6 t)$.

PRÁCTICA

8.8 Evaluar lo siguiente en $t = 0.8$: (*a*) $3u(t) - 2u(-t) + 0.8u(1 - t)$; (*b*) $[4u(t)]u(-t)$; (*c*) $2u(t)\,\text{sen}\,\pi t$.

Respuesta: 3.8; 0; 1.176.

8.6 ACCIONAMIENTO DE CIRCUITOS *RL*

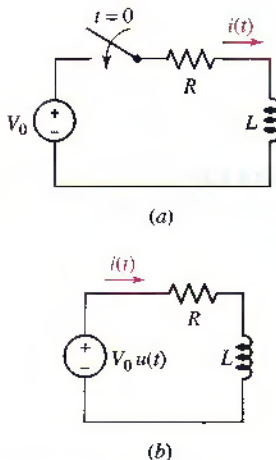


FIGURA 8.33 (*a*) El circuito dado. (*b*) Circuito equivalente que posee la misma respuesta *i*(*t*) para cualquier tiempo.

Con el nivel de conocimiento adquirido hasta ahora se puede someter una red simple a la aplicación repentina de una fuente de cd. El circuito está compuesto por una batería cuya tensión es V_0 en serie con un interruptor, una resistencia *R*, y un inductor *L*. El interruptor se cierra en $t = 0$, como se indica en el esquema del circuito de la figura 8.33*a*. Resulta evidente que la corriente *i*(*t*) es nula antes de $t = 0$, en consecuencia, se puede sustituir la batería y el interruptor por una función forzada de escalón de tensión $V_0u(t)$, que no produce tampoco respuesta antes de $t = 0$. Después de $t = 0$, los dos circuitos son idénticos. Por consiguiente, se busca la corriente *i*(*t*) en el circuito de la figura 8.33*a* o en el circuito equivalente de la figura 8.33*b*.

Se determinará *i*(*t*) en este tiempo escribiendo la ecuación de circuito apropiada y resolviéndola después por separación de variables e integración. Luego de que se obtenga la respuesta y se investiguen las dos partes de las que se compone, se verá que hay un significado físico de cada uno de ambos términos. Con un entendimiento más intuitivo de la forma en que se origina cada término, se podrán obtener soluciones más rápidas y de mayor significado para cada problema que implique la aplicación repentina de cualquier fuente. Se procederá con el método de solución más formal.

Al aplicar la ley de Kirchhoff de tensión al circuito de la figura 8.33*b*, se tiene

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0u(t)$$

Puesto que la función forzada de escalón unitario es discontinua en $t = 0$, se considerará primero la solución para $t < 0$ y luego para $t > 0$. La aplicación de tensión cero obliga a una respuesta cero, puesto que $t = -\infty$, por lo que

$$i(t) = 0 \qquad t < 0$$

En el tiempo positivo, sin embargo, *u*(*t*) es unitaria y se debe resolver la ecuación

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 \qquad t > 0$$

Las variables se separan mediante pasos algebraicos simples, que dan como resultado

$$\frac{L\,di}{V_0 - Ri} = dt$$

y cada lado puede integrarse en forma directa:

$$-\frac{L}{R}\ln(V_0 - Ri) = t + k$$

Para evaluar k, debe referirse a una condición inicial. Antes de $t = 0$, $i(t)$ es cero, y por ello $i(0^-) = 0$. Puesto que no se puede cambiar la corriente en un inductor por una cantidad finita en el tiempo cero sin que se asocie con una tensión infinita, se debe tener $i(0^+) = 0$. Dejando $i = 0$ en $t = 0$, se obtiene

$$-\frac{L}{R}\ln V_0 = k$$

y, por lo tanto:

$$-\frac{L}{R}[\ln(V_0 - Ri) - \ln V_0] = t$$

Reordenando, se tiene

$$\frac{V_0 - Ri}{V_0} = e^{-Rt/L}$$

o sea

$$i = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L} \qquad t > 0 \qquad [24]$$

Así, una expresión de la respuesta válida para cualquier t sería

$$i = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}\right)u(t) \qquad [25]$$

Procedimiento directo

Ésta es la solución deseada, pero no se obtuvo de la forma más simple. Para establecer un procedimiento más directo, se tratará de interpretar los dos términos que aparecen en la ecuación [25]. El término exponencial tiene la forma funcional de la respuesta natural del circuito *RL*; es una exponencial negativa, tiende a cero cuando aumenta el tiempo y se caracteriza por la constante de tiempo L/R. De esta manera, la forma funcional de esta parte de la respuesta resulta idéntica a la que se obtuvo en el circuito sin fuente. Sin embargo, la amplitud del término exponencial depende de la tensión de la fuente V_0. Se podría generalizar entonces que la respuesta será la suma de dos términos, donde uno de ellos tiene una forma funcional idéntica a la de la respuesta sin fuente, pero cuenta con una amplitud que depende de la función forzada. Pero, ¿qué pasa con el otro término?

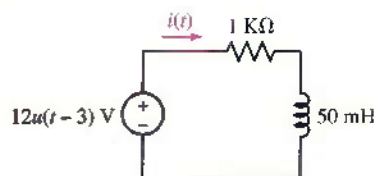
La ecuación [25] incluye también un término constante, V_0/R. ¿Por qué se presenta? La respuesta es simple: la respuesta natural tiende a cero cuando la energía se disipa de manera gradual, pero la respuesta total no tiende a cero. A la larga, el circuito se comporta como una resistencia y un inductor en serie con una batería. Puesto que el inductor funciona como un cortocircuito para la cd, la única corriente que circula en este caso es V_0/R. Dicha corriente es una parte de

la respuesta que se atribuye de manera directa a la función forzada y se conocerá con el nombre de *respuesta forzada*. Ésta es la respuesta que se presenta durante mucho tiempo después de que se cierra el interruptor.

La respuesta completa se compone de dos partes: *la respuesta natural y la forzada* La primera es una característica del circuito y no de las fuentes. Su forma se podría encontrar considerando el circuito sin fuente y tiene una amplitud que depende de la amplitud inicial de la fuente y del almacenamiento de energía inicial. La respuesta forzada tiene las características de la función forzada; se determina al considerar que todos los interruptores se cerraron desde hace mucho tiempo. En razón de que por ahora interesan sólo los interruptores y las fuentes de cd, la respuesta forzada es meramente la solución de un problema de circuito de cd.

EJEMPLO 8.7

En el circuito de la figura 8.34, encontrar $i(t)$ para t H 1 , 3↑ , 3ᶜ , y 100 „ s después de que el valor de la fuente haya cambiado.



■ **FIGURA 8.34** Circuito *RL* simple controlado por una función forzada de escalón de tensión.

Después de que ha transcurrido un tiempo considerable desde que los transitorios desaparecieron ($t \to \infty$), el circuito es un simple circuito de cd controlado por una fuente de tensión de 12 V. El inductor aparenta ser un cortocircuito, por lo que

$$i(\infty) = \frac{12}{1\,000} = 12 \text{ mA}$$

¿Qué significa $i(3^-)$? Esto es simplemente una conveniencia de notación para indicar el instante antes de que la fuente de tensión cambie de valor. Para $t < 3$, $u(t-3) = 0$. Por ende, también, $i(3^-) = 0$.

En $t = 3^+$, la función forzada $12u(t-3) = 12$ V. Sin embargo, debido a que la corriente que circula por el inductor no puede modificarse en un tiempo cero, $i(3^+) = i(3^-) = 0$.

El método más directo para el análisis del circuito en $t > 3$ s es reescribir la ecuación [25] como

$$i(t') = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt'/L}\right)u(t')$$

y observar que esta ecuación se aplique al circuito también si se corre el eje del tiempo de tal forma que

$$t' = t - 3$$

Por ende, con $V_0/R = 12$ mA y $R/L = 20\,000 \text{ s}^{-1}$,

$$i(t-3) = \left(12 - 12e^{-20\,000(t-3)}\right)u(t-3) \text{ mA} \qquad [26]$$

que puede escribirse de una manera más simple como

$$i(t) = \left(12 - 12e^{-20\,000(t-3)}\right)u(t-3) \text{ mA} \qquad [27]$$

puesto que la función impulso unitario obliga a un valor de cero en $t < 3$, como se necesitaba. Sustituyendo $t = 3.0001$ s en la ecuación [26] o [27], se puede observar que $i = 10.38$ mA en un tiempo igual a 100 μs después de que haya cambiado el valor de la fuente.

PRÁCTICA

8.9 La fuente de tensión $60 - 40u(t)$ V está en serie con una resistencia de 10 Ω y un inductor de 50 mH. Determinar las magnitudes de la corriente y la tensión en el inductor en un tiempo t igual a: (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) ∞; (*d*) 3 ms.

Respuesta: 6 A, 0 V; 6 A, 40 V; 2 A, 0 V; 4.20 A, 22.0 V.

Desarrollo de un entendimiento intuitivo

La razón de las dos respuestas, forzada y natural, quizá se vea a partir de argumentos físicos. Se sabe que, a la larga, el circuito adoptará la respuesta forzada. Sin embargo, en el instante en que se cierren los interruptores, las corrientes de inductor iniciales (o en circuitos *RC* las tensiones en los capacitores) tendrán valores que dependerán sólo de la energía almacenada en dichos elementos. No se puede esperar que tales corrientes o tensiones sean las mismas que las demandadas por la respuesta forzada. Por consiguiente, debe haber un periodo transitorio durante el cual las corrientes y las tensiones cambien de sus valores iniciales dados a los valores finales requeridos. La parte de la respuesta que proporciona una transición desde los valores iniciales hasta los finales es la respuesta natural (llamada a menudo respuesta *transitoria* como ya se hizo notar). Si se describe la respuesta de un circuito *RL* simple sin fuente en estos términos, entonces se podrá afirmar que la respuesta forzada es nula y que la respuesta natural sirve para conectar la respuesta inicial dictada por la energía almacenada con el valor cero de la respuesta forzada.

La descripción sólo resulta apropiada en el caso de circuitos en los que, a la larga, la respuesta natural se desvanece. Lo anterior ocurre siempre en circuitos físicos donde se asocia cierta resistencia con cada elemento, aunque existen varios circuitos "patológicos" en los que la respuesta natural no desaparece cuando el tiempo se vuelve infinito. Por ejemplo, los circuitos en los cuales las corrientes atrapadas circulan por lazos inductivos, o las tensiones están atrapadas en cadenas de capacitores en serie.

8.7 RESPUESTAS NATURAL Y FORZADA

Hay una excelente razón matemática para considerar que la respuesta completa deba tener dos partes (la respuesta forzada y la respuesta natural). La razón se basa en el hecho de que la solución de cualquier ecuación diferencial lineal puede expresarse como la suma de dos partes: *solución complementaria* (respuesta natural) y la *solución particular* (respuesta forzada). Sin entrar en detalles sobre la teoría general de las ecuaciones diferenciales, se procederá a examinar una ecuación general del tipo que se estudió en la sección anterior:

$$\frac{di}{dt} + Pi = Q$$

o

$$di + Pi\,dt = Q\,dt \qquad [28]$$

Se podría identificar Q como una función forzada y expresarla como $Q(t)$ para subrayar su dependencia general del tiempo. Se simplifica la explicación si se

supone que P es una constante positiva. Después, se supondrá que Q es constante, restringiendo de ese modo el uso de funciones forzadas de cd.

En cualquier texto usual de ecuaciones diferenciales, se demuestra que si ambos lados de la ecuación [28] se multiplican por un factor de integración apropiado, cada uno se convierte en una diferencial exacta que se integra en forma directa para obtener la solución. No se están separando las variables, sólo se ordenarán de modo que sea posible la integración. En la ecuación anterior, el factor de integración es $e^{\int P\,dt}$ o simplemente e^{Pt}, pues P es una constante. Si se multiplica cada lado de la ecuación por tal factor de integración se obtiene

$$e^{Pt}\,di + iPe^{Pt}\,dt = Qe^{Pt}\,dt \qquad [29]$$

La forma del lado izquierdo se simplifica al reconocer que es una diferencial exacta de ie^{Pt}:

$$d(ie^{Pt}) = e^{Pt}\,di + iPe^{Pt}\,dt$$

y, por ello, la ecuación [29] se convierte en

$$d(ie^{Pt}) = Qe^{Pt}\,dt$$

Al integrar cada lado,

$$ie^{Pt} = \int Qe^{Pt}\,dt + A$$

donde A es una constante de integración. La multiplicación por e^{-Pt} proporciona la solución para $i(t)$,

$$i = e^{-Pt}\int Qe^{Pt}\,dt + Ae^{-Pt} \qquad [30]$$

Si se conoce la función forzada $Q(t)$ se obtiene la forma funcional de $i(t)$ al evaluar la integral. Sin embargo, no se evaluará tal integral en cada problema, pues interesa más utilizar la ecuación [30] para deducir varias conclusiones generales.

La respuesta natural

Se observa primero que en un circuito sin fuente, Q debe ser cero y la solución consiste en la respuesta natural

$$i_n = Ae^{-Pt} \qquad [31]$$

Se puede ver que la constante P nunca es negativa en un circuito sólo con resistencias, inductores y capacitores; su valor depende nada más de los elementos pasivos del circuito[5] y de su interconexión en el circuito. Por lo tanto, *la respuesta natural se aproxima a cero cuando el tiempo aumenta sin límite.* Éste debe ser el caso del circuito *RL* simple debido a que la energía inicial se disipa de modo gradual en la resistencia, en forma de calor. También hay circuitos idealizados en los que P es cero; en tales circuitos la respuesta natural no se desvanece.

En consecuencia, se verá que uno de los dos términos que conforman la respuesta completa tiene la forma de la respuesta natural; incluye una amplitud

(5) Si el circuito incluye una fuente dependiente o una resistencia negativa, P podría ser negativa.

que dependerá (aunque a menudo *no* será igual) del valor inicial de la respuesta completa, y por ello también del valor inicial de la función forzada.

La respuesta forzada

A continuación se puede ver que el primer término de la ecuación [30] depende de la forma funcional de $Q(t)$, la función forzada. Siempre que se tiene un circuito en el que la respuesta natural se desvanece conforme t se vuelve infinita, el primer término debe describir por completo la forma de la respuesta después de que desapareció la respuesta natural. Por lo general este término recibe el nombre de respuesta forzada; también se conoce como *respuesta de estado permanente, solución particular* o *integral particular.*

Por ahora, se decide considerar sólo los problemas que implican la aplicación repentina de fuentes de cd, así que $Q(t)$ será entonces una constante para todos los valores del tiempo. Si se desea, se evalúa ahora la integral en la ecuación [30] para obtener la respuesta forzada

$$i_f = \frac{Q}{P} \qquad [32]$$

y la respuesta completa

$$i(t) = \frac{Q}{P} + Ae^{-Pt} \qquad [33]$$

En el caso del circuito RL en serie, Q/P representa la corriente constante V_0/R y $1/P$ la constante de tiempo τ. Se observa que la respuesta forzada podría haberse obtenido sin evaluar la integral, debido a que debe ser la respuesta completa en el tiempo infinito; corresponde sólo a la tensión de la fuente dividida por la resistencia en serie. Ello quiere decir que la respuesta forzada se obtiene por inspección del circuito final.

Determinación de la respuesta completa

Se utiliza el circuito simple RL en serie para ilustrar la forma de determinar la respuesta completa mediante la adición de las respuestas natural y forzada. El circuito de la figura 8.35 ya se analizó, pero por un método más largo. La respuesta deseada es la corriente $i(t)$, así que se expresa primero esta corriente como la suma de la corriente natural y de la corriente forzada, esto es,

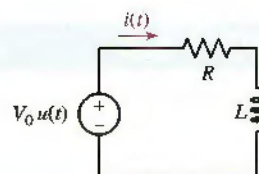


FIGURA 8.35 Circuito RL en serie que se emplea para ilustrar el método mediante el cual la respuesta completa se obtiene como la suma de las respuestas natural y forzada.

$$i = i_n + i_f$$

La forma funcional de la respuesta natural debe ser la misma que la que se obtuvo sin fuente alguna. Por lo tanto, se sustituye la fuente de tensión de escalón por un cortocircuito y se reconoce el lazo en serie RL anterior. De tal modo,

$$i_n = Ae^{-Rt/L}$$



donde la amplitud A aún debe determinarse; además, debido a que la condición inicial se aplica a la respuesta *completa,* no se puede suponer simplemente $A = i(0)$.

A continuación se analiza la respuesta forzada. En este problema particular la respuesta forzada debe ser constante, debido a que la fuente es una constante V_0 para todos los valores positivos de tiempo. Por lo tanto, después de que la respuesta natural se desvanece, no hay tensión en el inductor; por consiguiente, aparece una tensión V_0 en los extremos de R, de modo que la respuesta forzada es simplemente

$$i_f = \frac{V_0}{R}$$

Observar que la respuesta forzada está por completo determinada; no hay una amplitud desconocida. A continuación se combinan las dos respuestas para obtener

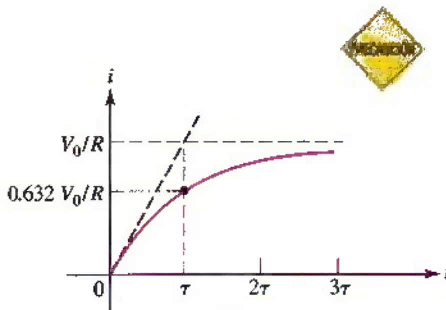
$$i = Ae^{-Rt/L} + \frac{V_0}{R}$$

y se aplica la condición inicial para evaluar A. La corriente es cero antes de $t = 0$, además, no es posible que cambie de valor en forma instantánea, puesto que es la corriente que fluye por un inductor. En consecuencia, la corriente es nula inmediatamente después de $t = 0$, y

$$0 = A + \frac{V_0}{R}$$

y por lo tanto,

$$i = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad [34]$$



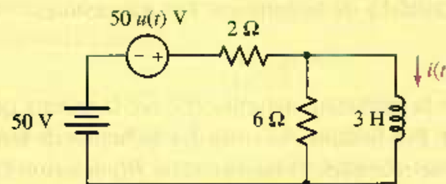
■ **FIGURA 8.36** Gráfica de la corriente que fluye por el inductor de la figura 8.35. Extendiendo la línea tangente al origen de los ejes se alcanza la respuesta forzada en $t = \tau$.

Observar con todo cuidado que A no es el valor inicial de i, pues $A = -V_0/R$, en tanto que $i(0) = 0$. Al considerar los circuitos sin fuente, se encuentra que A fue el valor inicial de la respuesta. Sin embargo, cuando se presentan funciones forzadas, se debe determinar primero el valor inicial de la respuesta y luego sustituirlo en la ecuación de la respuesta completa para determinar A.

Dicha respuesta se grafica en la figura 8.36 y se observa cómo se forma la corriente a partir de su valor inicial de cero, hasta su valor final de V_0/R. La transición se lleva a cabo de manera efectiva en un tiempo 3τ. Si nuestro circuito representa la bobina de campo de un gran motor de cd, resultaría factible tener $L = 10$ H, $R = 20\ \Omega$, lo cual da como resultado $\tau = 0.5$ s. La corriente de campo se establece de ese modo en cerca de 1.5 s. En el caso de un tiempo correspondiente a una constante de tiempo, la corriente alcanza 63.2% de su valor final.

EJEMPLO 8.8

Determinar $i(t)$ para todos los valores de tiempo en el circuito de la figura 8.37.



■ **FIGURA 8.37** Circuito del ejemplo 8.8.

El circuito contiene una fuente de tensión de cd así como una fuente de tensión de escalón. Sería posible que se opte por sustituir todo lo que está a la izquierda del inductor por el equivalente de Thévenin, pero mejor sólo se va a reconocer la forma de tal equivalente como una resistencia en serie con alguna fuente de tensión. El circuito contiene nada más un elemento de almacenamiento de energía: el inductor. Se puede ver primero que

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3}{1.5} = 2\text{ s}$$

y si se recuerda que

$$i = i_f + i_n$$

Por lo tanto, la respuesta natural es una exponencial negativa como se vio antes:

$$i_n = Ke^{-t/2}\ \text{A} \qquad t > 0$$

Debido a que la función forzada es una fuente de cd, la respuesta forzada será una corriente constante. El inductor actúa como un cortocircuito en la cd, de modo que

$$i_f = \tfrac{100}{2} = 50\ \text{A}$$

Por lo tanto,

$$i = 50 + Ke^{-0.5t} \qquad \text{A} \qquad t > 0$$

Para evaluar K, se debe establecer el valor inicial de la corriente del inductor. Antes de $t = 0$, la corriente es igual a 25 A y no puede cambiar en forma instantánea; en consecuencia,

$$25 = 50 + K$$

o

$$K = -25$$

Por consiguiente,

$$i = 50 - 25e^{-0.5t} \qquad \text{A} \qquad t > 0$$

Se completa la solución al establecer también

$$i = 25\ \text{A} \qquad t < 0$$

o escribiendo una expresión simple válida para cualquier t,

$$i = 25 + 25(1 - e^{-0.5t})u(t) \qquad \text{A}$$

La respuesta completa se dibuja en la figura 8.38. Observar cómo la respuesta natural sirve para conectar la respuesta correspondiente a $t < 0$ con la respuesta forzada constante.

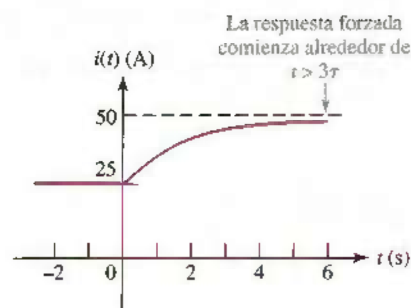


FIGURA 8.38 La respuesta $i(t)$ del circuito que se muestra en la figura 8.37 se dibuja para valores de tiempo menores y mayores que cero.

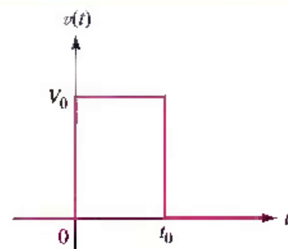
PRÁCTICA

8.10 Una fuente de tensión $v_s = 20u(t)$ V está en serie con una resistencia de 200 Ω y un inductor de 4 H. Determinar la magnitud de la corriente del inductor en t igual a: (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) 8 ms; (*d*) 15 ms.

Respuesta: 0; 0; 33.0 mA; 52.8 mA.

Como ejemplo final de este método mediante el cual se considera casi por observación la respuesta completa de cualquier circuito sujeto a un transitorio, examinar una vez más el circuito *RL* en serie, pero en esta ocasión sujeto a un pulso de tensión.

EJEMPLO 8.9



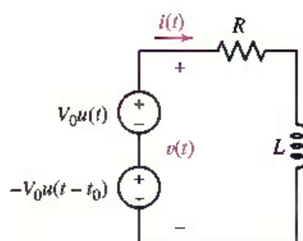


FIGURA 8.39 (*a*) Pulso de tensión rectangular que se utilizará como la función forzada en un circuito *RL* en serie simple. (*b*) Circuito *RL* en serie que muestra la representación de la función forzada mediante la combinación en serie de dos fuentes independientes de tensión de escalón. Se desea obtener la corriente $i(t)$.

Determinar la respuesta de corriente en un circuito *RL* en serie simple cuando la función forzada se compone de un pulso de tensión rectangular de amplitud V_0 y duración t_0.

Se representa la función forzada como la suma de dos fuentes de tensión de escalón $V_0u(t)$ y $-V_0u(t-t_0)$, como se indica en la figura 8.39*a* y *b*, asimismo, se planea obtener la respuesta mediante el principio de superposición. Considerar que $i_1(t)$ designa la parte de $i(t)$ que se debe a la fuente superior $V_0u(t)$ que actúa sola, y que $i_2(t)$ designa la parte debida al desempeño individual de $-V_0u(t-t_0)$. Entonces:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

El objetivo consiste en escribir ahora cada una de las respuestas parciales i_1 e i_2 como la suma de la respuesta natural y de la forzada. La respuesta $i_1(t)$ resulta familiar, pues este problema fue resuelto en la ecuación [34]:

$$i_1(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}), \qquad t > 0$$

Observar que dicha solución sólo es válida para $t > 0$, como se indica; $i_1 = 0$ para $t < 0$.

Se hace necesario ahora dirigir la atención hacia la otra fuente y su respuesta $i_2(t)$. Sólo difieren la polaridad de la fuente y el tiempo de su aplicación. Por lo tanto, no hay necesidad de determinar la forma de la respuesta natural y de la respuesta forzada; la solución de $i_1(t)$ es

$$i_2(t) = -\frac{V_0}{R}[1 - e^{-R(t-t_0)/L}], \qquad t > t_0$$

donde el intervalo aplicable de t, $t > t_0$, debe indicarse también en este caso; e $i_2 = 0$ para $t < t_0$.

Ahora se suman las dos soluciones, pero se debe hacer con cuidado, puesto que cada una es válida para un intervalo de tiempo diferente. De tal modo:

$$i(t) = 0, \qquad t < 0 \qquad [35]$$

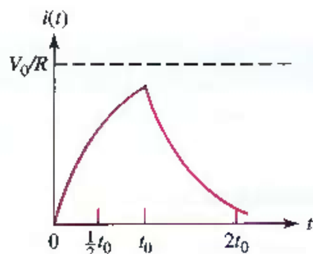
$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}), \qquad 0 < t < t_0 \qquad [36]$$

y

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) - \frac{V_0}{R}(1 - e^{-R(t-t_0)/L}), \qquad t > t_0$$

o, de manera más compacta,

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}(e^{Rt_0/L} - 1), \qquad t > t_0 \qquad [37]$$



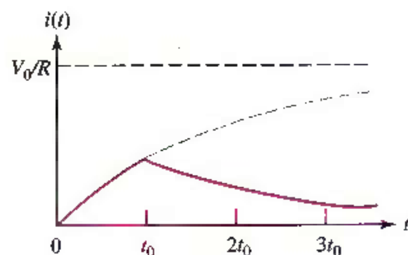


FIGURA 8.40 Dos curvas de respuestas posibles se presentan para el circuito de la figura 8.39*b*. (*a*) τ se selecciona como $t_0/2$. (*b*) τ se elige como $2t_0$.

Aunque las ecuaciones [35] a [37] describen totalmente la respuesta del circuito de la figura 8.39*b* a la forma de onda del pulso de la figura 8.39*a*, la forma de onda de corriente en sí misma es sensible tanto a la constante de tiempo τ del circuito como a la duración del pulso de tensión t_0. En la figura 8.40 se muestran dos posibles curvas.

La curva de la izquierda se grafica para el caso en el que la constante de tiempo equivale nada más a la mitad de la longitud de la pulsación aplicada; por lo tanto, la porción ascendente de la exponencial casi alcanza a V_0/R antes de que comience el decaimiento de la exponencial. La situación opuesta se muestra a la derecha; ahí, la constante de tiempo es el doble de t_0, así que la respuesta nunca tiene oportunidad de llegar a amplitudes mayores.

El procedimiento que se utiliza para determinar la respuesta de un circuito *RL* luego de que se activan o desactivan (dentro o fuera del circuito) fuentes de cd en algún instante de tiempo se resume como sigue. Suponer que el circuito se reduce hasta una resistencia equivalente R_{eq} en serie con una inductancia equivalente L_{eq} cuando todas las fuentes independientes se igualan a cero. La respuesta que se busca se representa mediante $f(t)$.

1. Con todas las fuentes independientes suprimidas, simplificar el circuito para determinar R_{eq}, L_{eq} y la constante de tiempo $\tau = L_{eq}/R_{eq}$.
2. Considerando a L_{eq} como un circuito cerrado, utilizar métodos de análisis de cd para calcular $i_L(0^-)$, la corriente en el inductor justo antes de la discontinuidad.
3. Considerando a L_{eq} una vez más como un circuito abierto, aplicar los métodos de análisis de cd para determinar la respuesta forzada. Éste es el valor aproximado de $f(t)$ cuando $t \to \infty$; se representa mediante $f(\infty)$.
4. Escribir la respuesta total como la suma de las respuestas forzada y natural: $f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$.
5. Determinar $f(0^+)$ mediante la condición de que $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. Si se desea, L_{eq} se podría reemplazar por una fuente de corriente $i_L(0^+)$ [un circuito abierto si $i_L(0^+) = 0$] para este cálculo. Con excepción de las corrientes en el inductor (y las tensiones en el capacitor), otras tensiones y corrientes en el circuito pueden cambiar de manera abrupta.
6. $f(0^+) = f(\infty) + A$ and $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]\, e^{-t/\tau}$, o respuesta total = valor final + (valor inicial − valor final) $e^{-t/\tau}$.

PRÁCTICA

8.11 El circuito de la figura 8.41 ha estado durante largo tiempo en la forma que se muestra. El interruptor se abre en $t = 0$. Calcular i_R en t igual a: (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) ∞; (*d*) 1.5 ms.

Respuesta: 0; 10 mA; 4 mA; 5.34 mA.

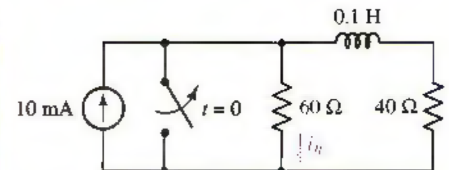


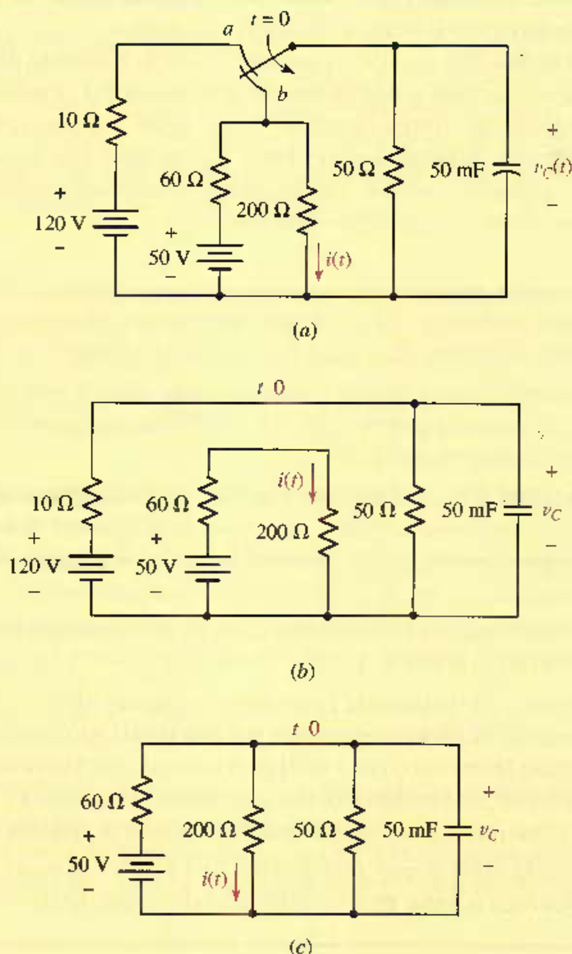
FIGURA 8.41

8.8 ACCIONAMIENTO DE CIRCUITOS *RC*

La respuesta completa de cualquier circuito *RC* también se obtiene como la suma de las respuestas natural y forzada. Debido a que el procedimiento es casi idéntico al que se estudió a detalle en el caso de los circuitos *RL*, el mejor método en esta etapa se ilustra mediante un ejemplo completo que sea relevante, donde el objetivo no sea solamente una cantidad relacionada con el capacitor, sino también la corriente asociada con una resistencia.

EJEMPLO 8.10

Determinar la tensión en el capacitor $v_C(t)$ y la corriente $i(t)$ en la resistencia de 200 ˜ de la figura 8.42 para cualquier tiempo.



■ **FIGURA 8.42** (*a*) Circuito *RC* en el que se obtienen las respuestas completas v_C e i sumando una respuesta forzada y una natural. (*b*) Circuito para $t \le 0$. (*c*) Circuito para $t \ge 0$.

Se comienza considerando el estado del circuito en $t < 0$, correspondiente al interruptor en la posición como se representa en la figura *b*. Como es usual, se supone que no hay transitorios presentes, por lo que sólo es relevante para encontrar $v_C(0^-)$ una respuesta forzada debido a la fuente de 120 V. En consecuencia, la simple división de tensión produce la tensión inicial

$$v_C(0) = \frac{50}{50+10}(120) = 100 \text{ V}$$

Puesto que la tensión del capacitor no puede cambiar en forma instantánea, esta tensión también es válida en $t = 0^-$ y $t = 0^+$.

El interruptor se mueve ahora hacia *b*, de modo que la respuesta completa es

$$v_C = v_{Cf} + v_{Cn}$$

El circuito correspondiente se dibujó nuevamente por conveniencia en la figura 8.42*c*. La forma de la respuesta natural se obtiene mediante la sustitución de la fuente de 50 V por un cortocircuito luego de evaluar la resistencia equivalente para encontrar la constante de tiempo (en otras palabras, se trata de determinar la resistencia equivalente de Thévenin "vista" desde las terminales del capacitor):

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{200} + \frac{1}{60}} = 24\ \Omega$$

De modo que:

$$v_{Cn} = Ae^{-t/R_{\text{eq}}C} = Ae^{-t/1.2}$$

Para evaluar la respuesta forzada con el interruptor en *b*, se espera hasta que todas las tensiones y corrientes hayan dejado de cambiar; por lo tanto, se considera al capacitor como un circuito abierto y se aplica una vez más la división de tensión:

$$v_{C_f} = 50\left(\frac{200 \parallel 50}{60 + 200 \parallel 50}\right)$$

$$= 50\left(\frac{(50)(200)/250}{60 + (50)(200)/250}\right) = 20\text{ V}$$

Por lo tanto,

$$v_C = 20 + Ae^{-t/1.2} \qquad \text{V}$$

y de la condición inicial ya obtenida,

$$100 = 20 + A$$

o

$$v_C = 20 + 80e^{-t/1.2} \qquad \text{V}, \qquad t \geq 0$$

y

$$v_C = 100\text{ V}, \qquad t < 0$$

La respuesta se grafica en la figura 8.43*a*; también en este caso se ve que la respuesta natural forma una transición desde la respuesta inicial hasta la final.

A continuación se aborda $i(t)$. La respuesta no necesita permanecer constante durante el periodo de conmutación. Con el contacto en *a*, resulta evidente que $i = 50/260 = 192.3$ miliamperes. Cuando el interruptor se mueve a la posición *b*, la respuesta forzada para esta corriente se convierte en

$$i_f = \frac{50}{60 + (50)(200)/(50+200)}\left(\frac{50}{50+200}\right) = 0.1 \text{ amperes}$$

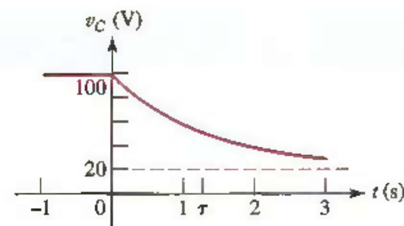
La forma de la respuesta natural es la misma a la que ya se determinó para la tensión en el capacitor:

$$i_n = Ae^{-t/1.2}$$

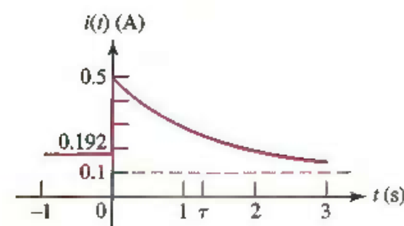
Al combinar las respuestas natural y forzada, se obtiene

$$i = 0.1 + Ae^{-t/1.2} \qquad \text{amperes}$$

(Continúa en la siguiente página)



(*a*)



(*b*)

FIGURA 8.43 Las respuestas (*a*) v_C y (*b*) *i* se grafican como funciones del tiempo para el circuito de la figura 8.42.

Para evaluar A, se necesita conocer $i(0^+)$, la cual se calcula fijando la atención en el elemento de almacenamiento de energía (el capacitor). El hecho de que v_C deba permanecer en 100 V durante el intervalo de conmutación es la condición directriz gobernante que establece las demás corrientes y tensiones en $t = 0^+$. Puesto que $v_C(0^+) = 100$ V, y como el capacitor está en paralelo con la resistencia de 200 Ω, se encuentra que $i(0^+) = 0.5$ ampere, $A = 0.4$ ampere, por lo cual

$$i(t) = 0.1923 \text{ ampere} \qquad t < 0$$

$$i(t) = 0.1 + 0.4e^{-t/1.2} \qquad \text{ampere} \qquad t > 0$$

o

$$i(t) = 0.1923 + (-0.0923 + 0.4e^{-t/1.2})u(t) \qquad \text{amperes}$$

donde la última expresión es correcta para cualquier t.

La respuesta completa para cualquier t también se escribe de manera concisa utilizando $u(-t)$, correspondiendo así a la unidad para $t < 0$ y 0 para $t > 0$. Así,

$$i(t) = 0.1923u(-t) + (0.1 + 0.4e^{-t/1.2})u(t) \qquad \text{amperes}$$

Esta respuesta se presenta en la figura 8.43*b*. Observar que sólo se necesitan cuatro números para escribir la forma funcional de la respuesta de este circuito de un solo elemento de almacenamiento de energía, o para hacer la gráfica: el valor constante antes de la conmutación (0.1923 ampere), el valor instantáneo justo después de la conmutación (0.5 ampere), la respuesta forzada constante (0.1 ampere) y la constante de tiempo (1.2 s). En este caso, la función exponencial negativa apropiada resulta fácil de escribir o graficar.

PRÁCTICA

8.12 En el caso del circuito de la figura 8.44, determinar $v_C(t)$ en t igual a: (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) ∞; (*d*) 0.08 s.

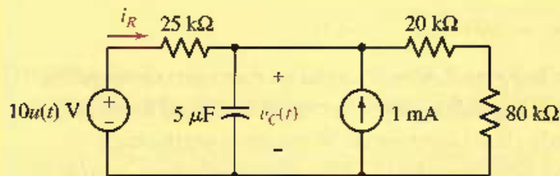


FIGURA 8.44

Respuesta: 20 V; 20 V; 28 V; 24.4 V.

Se concluye con la lista de los duales de los enunciados dados al final de la sección 8.7.

El procedimiento que se utiliza para encontrar la respuesta de un circuito *RC* después de que las fuentes de cd se activan o desactivan, incorporándolas o eliminándolas del circuito, en algún instante, por ejemplo $t = 0$, se resume como sigue. Se hace el supuesto de que el circuito se reduce a una sola resistencia equivalente R_{eq} en paralelo con una sola capacitancia equivalente C_{eq} cuando todas las fuentes independientes se igualan a cero. La respuesta que se busca se representa por medio de $f(t)$.

1. Con todas las fuentes independientes suprimidas, simplificar el circuito para determinar R_{eq}, C_{eq} y la constante de tiempo $\tau = R_{eq}C_{eq}$.
2. Considerar a C_{eq} como un circuito abierto, y utilizar métodos de análisis de cd para calcular $v_C(0^-)$, la tensión del capacitor justo antes de la discontinuidad.
3. Considerar a C_{eq} una vez más como un circuito abierto, y aplicar los métodos de análisis de cd para determinar la respuesta forzada. Éste es el valor aproximado de $f(t)$ cuando $t \to \infty$; se representará mediante $f(\infty)$.
4. Escribir la respuesta total como la suma de las respuestas forzada y natural: $f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$.
5. Determinar $f(0^+)$ mediante la condición de que $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. Si se desea, C_{eq} se podría reemplazar por una fuente de tensión $v_C(0^+)$ [un cortocircuito si $v_C(0^+) = 0$] para este cálculo. Con excepción de las tensiones en el capacitor (y las corrientes en el inductor), tal vez otras tensiones y corrientes en el circuito cambien de manera abrupta.
6. $f(0^+) = f(\infty) + A$ y $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$, o respuesta total = valor final + (valor inicial − valor final) $e^{-t/\tau}$.

Como se ha visto, los mismos pasos básicos que se aplican al análisis de los circuitos *RL* pueden también aplicarse a los circuitos *RC*. Hasta el momento, el interés se ha enfocado sólo en el análisis de circuitos con funciones de cd forzadas, a pesar del hecho de que la ecuación [30] es válida para funciones más generales como $Q(t) = 9\cos(5t - 7°)$ o $Q(t) = 2e^{-5t}$. Antes de concluir esta sección, se explora uno de estos escenarios.

EJEMPLO 8.11

Determinar la expresión de $v(t)$ en el circuito de la figura 8.45 que sea válida en $t > 0$.

Con base en la experiencia, se espera una respuesta completa de la forma

$$v(t) = v_f + v_n$$

donde es probable que v_f haga recordar la función forzada y v_n tendrá la forma $Ae^{-t/\tau}$.

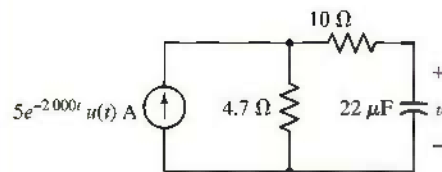
¿Qué es la constante τ? del circuito? Se sustituye la fuente con un circuito abierto y se encuentra la resistencia equivalente de Thévenin en paralelo con el capacitor:

$$R_{eq} = 4.7 + 10 = 14.7\ \Omega$$

Por lo tanto, la constante de tiempo es $\tau = R_{eq}C = 323.4\ \mu s$, o lo que es lo mismo, $1/\tau = 3.092 \times 10^3\ s^{-1}$.

Existen varias formas de proceder, a pesar de que quizás la más directa es llevar a cabo una transformación de fuente, lo que genera una fuente de tensión de $23.5e^{-2\,000t}u(t)$ V en serie con la resistencia de 14.7 Ω y el capacitor de 22 μF. (*Observe que este fenómeno no modifica la constante de tiempo.*)

(Continúa en la siguiente página)



■ **FIGURA 8.45** Circuito *RC* simple controlado por una función forzada con decaimiento exponencial.

Si se escribe una simple ecuación LKT para $t > 0$, se tiene que

$$23.5e^{-2\,000t} = (14.7)(22 \times 10^{-6})\frac{dv}{dt} + v$$

Con un poco de simplificación se obtiene,

$$\frac{dv}{dt} + 3.092 \times 10^3 v = 72.67 \times 10^3\, e^{-2\,000t}$$

lo cual, cuando se compara con las ecuaciones [28] y [30], permite que se exprese la respuesta completa como

$$v(t) = e^{-Pt}\int Qe^{Pt}dt + Ae^{-Pt}$$

donde, en este caso, $P = 1/\tau = 3.092 \times 10^3$ and $Q(t) = 72.67 \times 10^3 e^{-2\,000t}$. Por lo tanto, se puede observar que

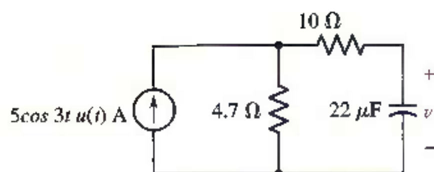
$$v(t) = e^{-3\,092t}\int 72.67 \times 10^3 e^{-2000t} e^{3\,092t}dt + Ae^{-3\,092t}\ \text{V}$$

Llevando a cabo la integración que se indica,

$$v(t) = 66.55e^{-2000t} + Ae^{-3\,092t}\ \text{V} \qquad [38]$$

La única fuente está controlada por una función escalón con un valor de cero para $t < 0$, por lo que se sabe que $v(0^-) = 0$. Puesto que v es una tensión de capacitor, $v(0^+) = v(0^-)$, y por lo tanto se encuentra de manera muy sencilla la condición inicial $v(0) = 0$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación [38], se encuentra que $A = -66.55$ V, por lo que

$$v(t) = 66.55(e^{-2000t} - e^{-3\,092t})\ \text{V}, \qquad t > 0$$



■ **FIGURA 8.46** Circuito *RC* simple controlado por una función forzada senoidal.

PRÁCTICA

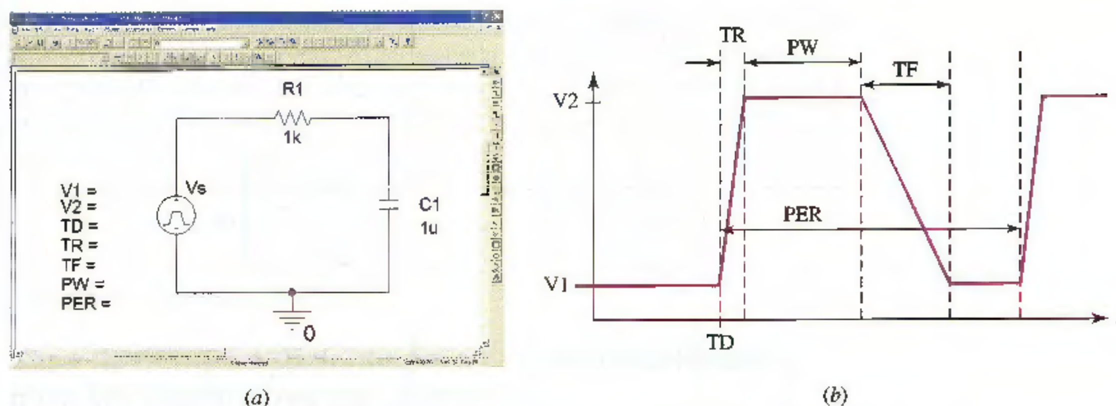
8.13 Determinar la tensión v en el capacitor del circuito de la figura 8.46 para $t > 0$.

Respuesta: $23.5\cos 3t + 22.8 \times 10^{-3}\,\text{sen}3t - 23.5e^{-3092t}$V.

8.9 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DE CIRCUITOS CONMUTADOS SECUENCIALMENTE

En el ejemplo 8.9 se estudia de manera breve la respuesta de un circuito *RL* a una forma de onda de pulsos en la que una fuente se conmutó hacia y después se conmutó fuera del circuito. Este tipo de situación es muy común en la práctica, ya que algunos circuitos están diseñados para energizarse sólo una vez (por ejemplo, los circuitos disparadores de las bolsas con aire para protección de los pasajeros en los automóviles). En la predicción de la respuesta de los circuitos *RL* y *RC* simples que están sujetos a pulsos o a series de pulsos —a menudo conocidos como ***circuitos conmutados secuencialmente***— la clave es el tamaño de la constante de tiempo del circuito en relación con los diferentes tiempos que definen la secuencia del pulso. El principio fundamental detrás del análisis es si el elemento de almacenamiento de energía tiene tiempo para cargarse por completo antes de que termine el pulso y si cuenta con el tiempo para descargarse totalmente antes de que comience el segundo pulso.

Considerar el circuito que se muestra en la figura 8.47*a*, el cual está conectado a una fuente de tensión pulsada que puede ser descrita por siete parámetros separados que se definen en la figura 8.47*b*. La forma de onda está acotada por dos valores, **V1** y **V2.** El tiempo t_r que se requiere para cambiar de **V1** a **V2** se llama ***tiempo de elevación (TR)***, y el tiempo t_f que se requiere para cambiar de



(*a*) (*b*)

FIGURA 8.47 (*a*) Esquema de un circuito *RC* simple conectado a una forma de onda de tensión pulsada. (*b*) Diagrama de las definiciones de los parámetros del **VPULSE** de SPICE.

V2 a **V1** se llama ***tiempo de bajada (TF)***. La duración W_p del pulso se conoce como ***ancho de pulso (PW)***, y el ***periodo*** T de la forma de onda **(PER)** es el tiempo que le toma al pulso repetir. Observar también que el SPICE permite un retraso de tiempo **(TD)** antes de que el tren de pulsos comience, lo cual puede ser de utilidad para que las respuestas de los transitorios iniciales decaigan en algunas configuraciones con circuitos.

Para los propósitos de este estudio, se establece un retraso de tiempo cero, $V1 = 0$ y $V2 = 9$ V. La constante de tiempo del circuito es $\tau = RC = 1$ ms, por lo que se establecen los tiempos de subida y de bajada como 1 ns. A pesar de que SPICE no aceptará que una tensión cambie en un tiempo cero puesto que resuelve las ecuaciones diferenciales utilizando intervalos de tiempo discretos, comparado con la constante del tiempo de 1 ns del circuito es una aproximación a "instantánea".

Se considerarán los cuatro casos básicos que se encuentran resumidos en la tabla 8.1. En los primeros dos casos, al ancho del pulso W_p es mucho mayor que la constante de tiempo τ del circuito, por lo que se espera que los transitorios que resulten del comienzo del pulso se desvanezcan antes de que termine el pulso. En los últimos dos casos, es válido el caso contrario: el ancho del pulso es tan corto que el capacitor no tiene tiempo de cargarse totalmente antes de que termine el pulso. Un problema similar se presenta cuando se considera la respuesta del circuito cuando el tiempo entre pulsos $(T - W_p)$ es corto (caso II) o largo (caso III) en comparación con la constante de tiempo del circuito.

TABLA 8.1 Cuatro casos distintos de ancho de pulso y de periodo en relación con la constante de tiempo del circuito de 1 ms

Caso	Ancho del pulso W_p	Periodo T
I	10 ms ($\tau \ll W_p$)	20 ms ($\tau \ll T - W_p$)
II	10 ms ($\tau \ll W_p$)	10.1 ms ($\tau \gg T - W_p$)
III	0.1 ms ($\tau \gg W_p$)	10.1 ms ($\tau \ll T - W_p$)
IV	0.1 ms ($\tau \gg W_p$)	0.2 ms ($\tau \gg T - W_p$)

En la figura 8.48 se ha bosquejado de manera cualitativa la respuesta del circuito para cada uno de los cuatro casos seleccionando de forma arbitraria la tensión del capacitor como una cantidad de interés, ya que se espera que cualquier tensión o corriente tenga la misma dependencia con respecto al

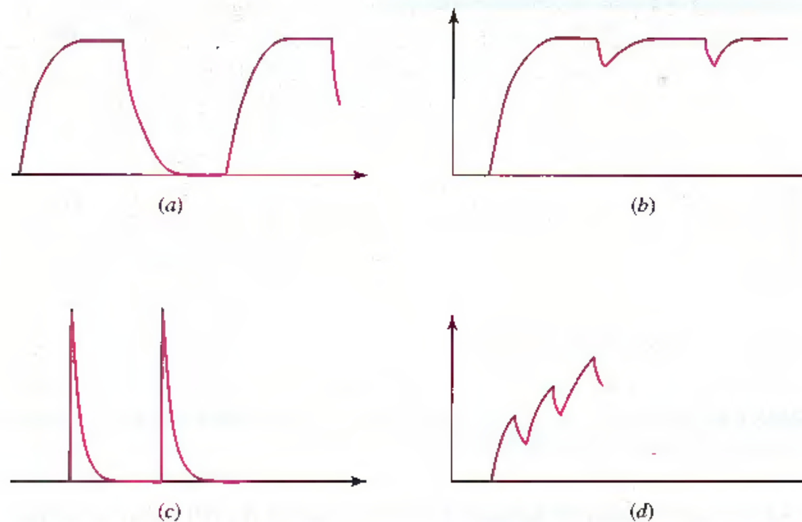


FIGURA 8.48 Tensión del capacitor del circuito *RC* con un ancho de pulso y periodo descritos en (*a*) caso I; (*b*) caso II; (*c*) caso III, y (*d*) caso IV.

tiempo. En el caso I, el capacitor tiene tiempo para cargarse y descargarse totalmente (figura 8.48*a*), mientras que en el caso II (figura 8.48*b*), cuando se reduce el tiempo entre pulsos, se le termina el tiempo para descargarse totalmente. Por el contrario, el capacitor no tiene tiempo para cargarse totalmente tanto en el caso III (figura 8.48*c*) como en el caso IV (figura 8.49*d*).

Caso I: Tiempo suficiente para cargarse y descargarse totalmente

Por supuesto, se pueden obtener valores exactos para la respuesta en cada caso mediante una serie de análisis. Primero se considera el caso I. En razón de que el capacitor cuenta con el tiempo para cargarse totalmente, la respuesta forzada corresponderá a la tensión de control de 9 V de cd. La respuesta completa al primer pulso es, por lo tanto,

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1000t}\ \text{V}$$

Con $v_C(0) = 0$, $A = -9$ V y, por ende,

$$v_C(t) = 9(1 - e^{-1000t})\ \text{V} \qquad [39]$$

en el intervalo de $0 < t < 10$ ms. En $t = 10$ ms, la tensión de la fuente decae de forma repentina hasta 0 V, y el capacitor comienza a descargarse a través de la resistencia. En este intervalo de tiempo se está tratando con un circuito *RC* simple "sin fuentes" y se puede escribir la respuesta como

$$v_C(t) = Be^{-1000(t-0.01)}, \quad 10 < t < 20\ \text{ms} \qquad [40]$$

donde $B = 8.99959$ V hallado al sustituir $t = 10$ ms en la ecuación [39]; con base en la práctica, se puede redondear este resultado a 9 V si se observa que el valor calculado es congruente con el supuesto de que el transitorio inicial se desvanece antes de que termine el pulso.

En $t = 20$ ms, la fuente de tensión salta de inmediato de nuevo a 9 V. La tensión en el capacitor, exactamente antes de este evento, se obtiene mediante la sustitución de $t = 20$ ms en al ecuación [40], lo que lleva a $v_C(20\ \text{ms}) = 408.6\ \mu\text{V}$, un valor prácticamente igual a cero comparado con el valor pico de 9 V.

Si se conserva la convención de redondear a cuatro dígitos significativos, la tensión en el capacitor al comienzo del segundo pulso es cero, que es la misma que en el punto de comienzo. Por ende, las ecuaciones [39] y [40] forman las bases de la respuesta de todos los pulsos subsecuentes, por lo cual se puede escribir

$$v_C(t) = \begin{cases} 9(1 - e^{-1000t})\ \text{V}, & 0 \leq t \leq 10\ \text{ms} \\ 9e^{-1000(t-0.01)}\ \text{V}, & 10 < t \leq 20\ \text{ms} \\ 9(1 - e^{-1000(t-0.02)})\ \text{V}, & 20 < t \leq 30\ \text{ms} \\ 9e^{-1000(t-0.03)}\ \text{V}, & 30 < t \leq 40\ \text{ms} \end{cases}$$

y así sucesivamente.

Caso II: Tiempo suficiente para cargarse totalmente pero sin descargarse por completo

A continuación se estudia lo que sucede si el capacitor no se alcanza a descargar totalmente (caso II). La ecuación [39] aún describe la situación en el intervalo $0 < t < 10$ ms, y la ecuación [40] describe la tensión del capacitor en el intervalo entre pulsos, los cuales se han reducido a $10 < t < 10.1$ ms.

Exactamente antes de la aparición del segundo pulso en $t = 10.1$ ms, v_C es ahora de 8.144 V; el capacitor sólo había tenido 0.1 ms para descargarse y, por lo tanto, aún retiene 82% de su máxima energía cuando comienza el pulso siguiente. Por lo tanto, en el intervalo siguiente,

$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \text{V}, \qquad 10.1 < t < 20.1\ \text{ms}$$

donde $v_C(10.1\ \text{ms}) = 9 + C = 8.144$ V, por lo que $C = -0.856$ V y

$$v_C(t) = 9 - 0.856e^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \text{V}, \qquad 10.1 < t < 20.1\ \text{ms}$$

el cual alcanza el valor pico de 9 V mucho más rápido que el pulso anterior.

Caso III: Falta de tiempo para cargarse totalmente pero tiempo suficiente para descargarse por completo

¿Qué pasa si no está claro que el transitorio se disipará antes de que termine el pulso de tensión? En realidad, esta situación se presenta en el caso III. De la misma forma como se escribió en el caso I,

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1000t}\ \text{V} \qquad [41]$$

se aplica a esta situación, pero ahora sólo en el intervalo $0 < t < 0.1$ ms. La condición inicial no ha cambiado, por lo que $A = -9$ V como era antes. Sin embargo ahora, exactamente antes de que el primer pulso termine en $t = 0.1$ ms, se puede ver que $v_C = 0.8565$ V. Esto se encuentra muy lejos del máximo posible de 9 V si se le proporciona al capacitor suficiente tiempo para cargarse totalmente y es un resultado directo si la duración del pulso es de un décimo de la constante de tiempo del circuito.

El capacitor comienza ahora a descargarse, de tal forma que

$$v_C(t) = Be^{-1000(t-1\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.1 < t < 10.1\ \text{ms} \qquad [42]$$

Se ha determinado ya que $v_C(0.1^-\ \text{ms}) = 0.8565$ V, por lo que $v_C(0.1^+\ \text{ms}) = 0.8565$ V y la sustitución en la ecuación [42] da como resultado $B = 0.8565$ V. Justo antes de que aparezca el segundo pulso en $t = 10.1$ ms, la tensión del capacitor ha disminuido a 0 V, prácticamente; ésta es la condición inicial al comienzo del segundo pulso, por lo que la ecuación [41] puede reescribirse como

$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \text{V}, \qquad 10.1 < t < 10.2\ \text{ms} \qquad [43]$$

para describir la respuesta correspondiente.

Caso IV: Falta de tiempo para cargarse totalmente o aún para descargarse por completo

En el último caso, se considera la situación donde el ancho y el periodo del pulso son tan pequeños que el capacitor no puede ni cargarse ni descargarse totalmente en un solo periodo. Con base en la experiencia, se puede escribir

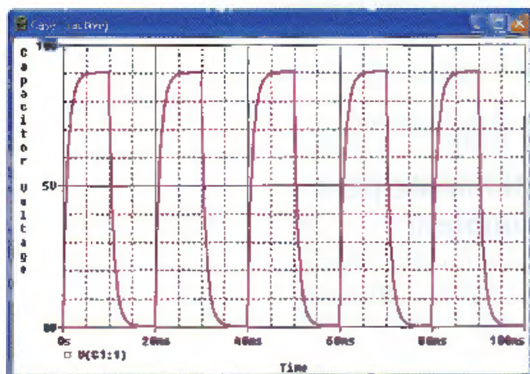
$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1000t} \text{ V}, \qquad 0 < t < 0.1 \text{ ms} \qquad [44]$$

$$v_C(t) = 0.8565e^{-1000(t-1\times10^{-4})} \text{ V}, \qquad 0.1 < t < 0.2 \text{ ms} \qquad [45]$$

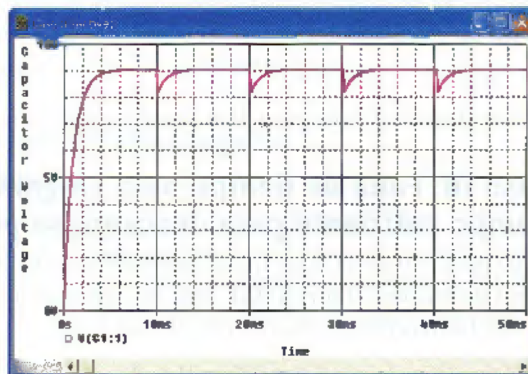
$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1000(t-2\times10^{-4})} \text{ V}, \qquad 0.2 < t < 0.3 \text{ ms} \qquad [46]$$

$$v_C(t) = De^{-1000(t-3\times10^{-4})} \text{ V}, \qquad 0.3 < t < 0.4 \text{ ms} \qquad [47]$$

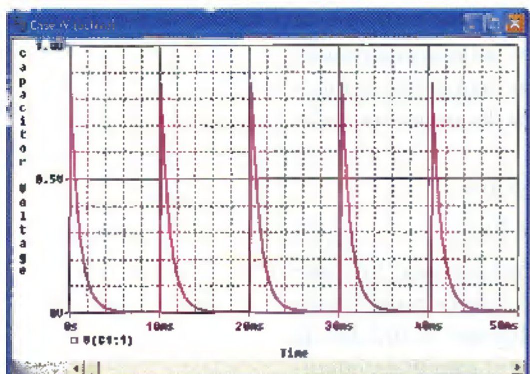
Exactamente antes de que se presente el segundo pulso en $t = 0.2$ ms, la tensión en el capacitor ha decaído a $v_C = 0.7750$ V; sin contar con el tiempo suficiente para descargarse totalmente, retiene una gran fracción de la poca energía que pudo almacenar inicialmente. En el segundo intervalo de $0.2 < t < 0.3$ ms, la sustitución de $v_C(0.2^+) = v_C(0.2^-) = 0.7750$ V en la ecuación [46] da como resultado $C = -8.225$ V. Enseguida, se evalúa la ecuación [46] en $t = 0.3$ ms y se calcula $v_C = 1.558$ V justo antes del final del segundo pulso. Así, $D = 1.558$ V y el capacitor se carga lentamente para incrementar los niveles de tensión en varios pulsos. A estas alturas, sería de utilidad si se graficaran las



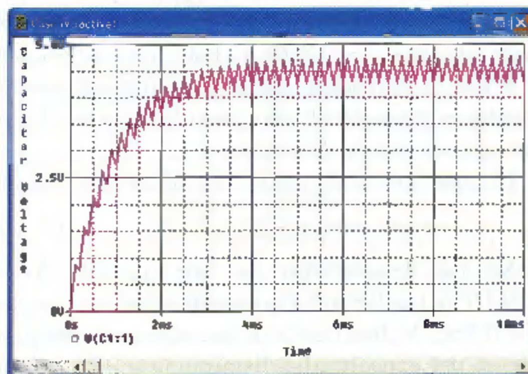
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

FIGURA 8.49 Resultados de la simulación en PSpice correspondientes a: (*a*) caso I; (*b*) caso II; (*c*) caso III; (*d*) caso IV.

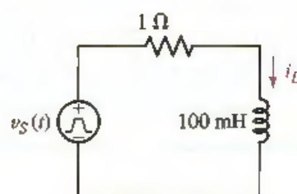
respuestas en detalle, por lo que ahora se muestran en la figura 8.49 los resultados de la simulación en PSpice de los casos I a IV. Observar en la figura 8.49*d*, en particular, que la pequeña respuesta transitoria de carga/descarga similar en forma a la que se muestra en las figuras 8.49a-*c* está sobrepuesta a una respuesta de tipo carga de la forma $(1 - e^{-t/\tau})$. ¡Por lo tanto, el capacitor debe emplear aproximadamente de 3 a 5 constantes de tiempo del circuito para cargarse a su máximo valor en situaciones donde un solo periodo no le alcanza para cargarse o descargarse completamente!

Lo que no se ha hecho todavía es predecir el comportamiento de la respuesta en $t \gg 5\tau$, a pesar de que se podría estar interesado en hacerlo, especialmente si no fuera necesario considerar una secuencia de pulsos muy larga, uno solo a la vez. Se puede observar que la respuesta de la figura 8.49*d* tiene un valor *promedio* de 4.50 V a partir de 4 ms en adelante. Lo anterior es exactamente la mitad del valor que se esperaría si el ancho del pulso de la fuente de tensión permitiera que el capacitor se cargara por completo. En realidad, en el largo plazo este valor promedio puede calcularse multiplicando la tensión del capacitor en cd por el cociente entre ancho del pulso y el periodo.

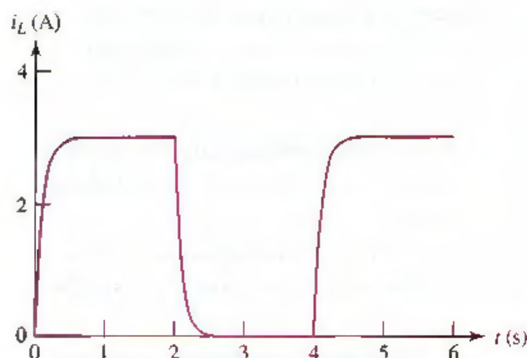
PRÁCTICA

8.14 Graficar $i_L(t)$ en el rango de $0 < t < 6$ s para (*a*) $v_S(t) = 3u(t) - 3u(t-2) + 3u(t-4) - 3u(t-6) + \cdots$; (*b*) $v_S(t) = 3u(t) - 3u(t-2) + 3u(t-2.1) - 3u(t-4.1) + \cdots$.

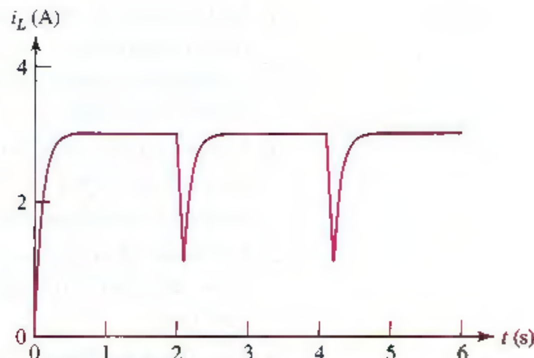
Respuesta: (*b*) Vea la figura 8.50*a*; (*c*) vea la figura 8.50*b*.



(*a*)



(*b*)



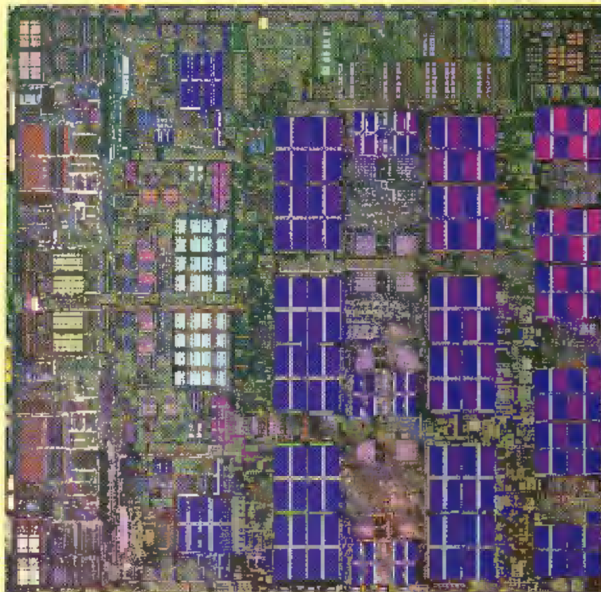
(*c*)

FIGURA 8.50 (*a*) Circuito del problema de práctica 8.14. (*b*) Solución a la parte (*a*). (*c*) Solución a la parte (*b*).

APLICACIÓN PRÁCTICA

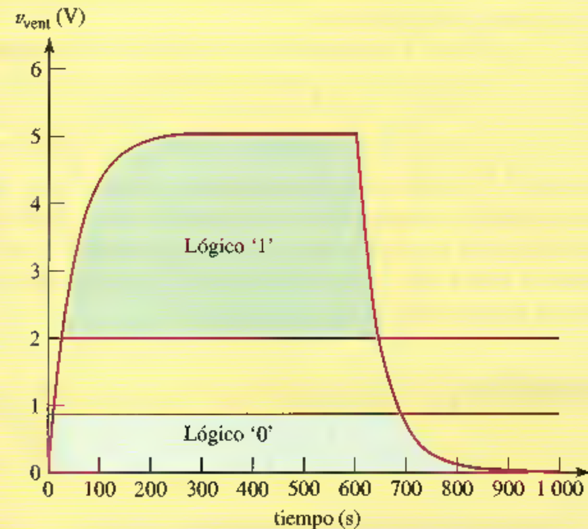
Límites de frecuencia en los circuitos integrados digitales

Los modernos circuitos integrados digitales, tales como la lógica de arreglo programable (PAL) y los microprocesadores (figura 8.51), se componen de circuitos transistorizados interconectados conocidos como *compuertas.*



■ **FIGURA 8.51** Circuito integrado Power de IBM.

Las señales digitales se representan de manera simbólica mediante combinaciones de unos y ceros que son datos o instrucciones (como "sumar" o "restar"). Eléctricamente, se representa un "1" lógico por medio de una tensión "alta", y un "0" lógico por una tensión "baja". En la práctica, hay un intervalo de tensiones que corresponden a cada uno de dichos valores; por ejemplo, en la serie 7 400 de los circuitos integrados lógicos TTL, cualquier tensión entre 2 y 5 V se interpretará como un "1" lógico, y toda tensión entre 0 y 0.8 V se entenderá como un "0" lógico. Las tensiones entre 0.8 y 2 V no corresponden a ningún estado lógico, como se muestra en la figura 8.52.



■ **FIGURA 8.52** Características de carga/descarga de una capacitancia de trayectoria que identifica los rangos de tensión TTL para el "1" lógico y para el "0" lógico.

Un parámetro clave de los circuitos digitales es la velocidad a la que es posible usarlos de manera eficaz. En este sentido, la "velocidad" se refiere a cuán rápido cambia una compuerta de un estado lógico a otro (ya sea de "0" lógico a "1" lógico o viceversa), y el retardo requerido para transmitir la salida de una compuerta a la

RESUMEN Y REPASO

- La respuesta de un circuito con fuentes que se activan o desactivan en forma repentina de un circuito en el que hay capacitores e inductores siempre estará compuesta por dos partes: una respuesta *natural* y una respuesta *forzada*.
- La forma de la respuesta natural (denominada también como *respuesta transitoria*) depende sólo de los valores de las componentes y de la forma en que se alambran entre ellas.
- La forma de la respuesta forzada refleja la de la función forzada. Por lo tanto, una función forzada de cd siempre provoca una respuesta forzada constante.
- Un circuito reducido hasta una sola inductancia equivalente L y una sola resistencia equivalente R tendrá una respuesta natural dada por $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$, donde $\tau = L/R$ representa la constante de tiempo del circuito.

entrada de la siguiente. A pesar de que los transistores contienen capacitancias "incorporadas" que afectan su velocidad de conmutación, son las *trayectorias de interconexión* las que en verdad limitan la velocidad de los circuitos integrados digitales más veloces. Se puede hacer un modelo de la trayectoria de interconexión entre dos compuertas lógicas con un circuito *RC* simple (si bien los tamaños característicos continúan decreciendo en los diseños modernos, se requieren modelos más detallados para predecir con exactitud el desempeño del circuito). Por ejemplo, considerar una trayectoria de 2 000 μm de largo y 2 μm de ancho. Se puede hacer el modelo de esta trayectoria por medio de un circuito integrado común basado en silicio, en donde la capacitancia sea de 0.5 pF y la resistencia corresponda a 100 Ω, como se indica en la figura 8.53.

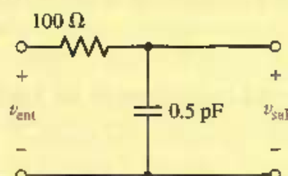


FIGURA 8.53 Modelo de circuito de una trayectoria de circuito integrado.

Suponer que la tensión v_{sal} representa la tensión de salida de una compuerta que cambia de un estado de "0" lógico a un estado de "1" lógico. La tensión v_{ent} aparece en la entrada incluso de otra compuerta; además, interesa el tiempo que tarda v_{ent} en alcanzar el mismo valor que v_{sal}.

Suponiendo que la capacitancia de 0.5 pF que caracteriza a la trayectoria de interconexión está descargada al principio [esto es, $v_{ent}(0) = 0$], al calcularse la constante de tiempo *RC* de la trayectoria como $\tau = RC = 50$ ps, y definiendo $t = 0$ como cuando cambia v_{sal} se obtiene la expresión

$$v_{ent}(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{sal}(0)$$

Dejando $v_{ent}(0) = 0$, se observa que $A = -v_{sal}(0)$ de modo que:

$$v_{ent}(t) = v_{sal}(0)[1 - e^{-t/\tau}]$$

Luego de examinar esta ecuación, se puede observar que v_{ent} alcanzará el valor $v_{sal}(0)$ después de $\sim 5\tau$ o 250 ps. Si la tensión v_{sal} cambia otra vez antes de que finalice este tiempo transitorio, el capacitor no tendrá tiempo suficiente para cargarse. En tales situaciones, v_{ent} será menor que $v_{sal}(0)$. Suponiendo por ejemplo que $v_{sal}(0)$ es igual a la tensión mínima de "1" lógico, esto significa que v_{ent} no corresponde a un "1" lógico. Si v_{sal} cambia de modo repentino a 0 V ("0" lógico), el capacitor empieza a descargarse de manera que v_{ent} se reduce más. Por lo tanto, al conmutar demasiado rápido los estados lógicos no se puede transferir la información de una compuerta a otra.

La mayor velocidad a la que se cambian los estados lógicos es entonces $(5\tau)^{-1}$. Lo anterior se expresa en términos de la frecuencia de operación máxima como

$$f_{máx} = \frac{1}{2(5\tau)} = 2 \text{ GHz}$$

donde el factor 2 representa un periodo de carga/descarga. Si se desea operar el circuito integrado a una frecuencia más alta, de modo que los cálculos se efectúen más rápido, es necesario reducir la capacitancia y/o la resistencia de interconexión.

- Un circuito reducido hasta una sola capacitancia equivalente C y una sola resistencia equivalente R tendrá una respuesta natural dada por $v(t) = V_0e^{-t/\tau}$, donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo del circuito.
- La función de escalón unitario constituye una manera útil para hacer el modelo del cierre o la apertura de un interruptor, siempre que se tenga cuidado de vigilar las condiciones iniciales.
- La respuesta *completa* de un circuito *RL* o *RC* excitado por una fuente de cd tendrá la forma $f(0^+) = f(\infty) + A$ y $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$, o respuesta total = valor final + (valor inicial − valor final)$e^{-t/\tau}$.
- La respuesta completa de un circuito *RL* o *RC* puede determinarse también escribiendo una sola ecuación diferencial de la cantidad de interés y resolviéndola.

- Cuando se trata con circuitos conmutados en secuencia o circuitos conectados en forma de onda pulsantes, el problema primordial es conocer si el elemento de almacenamiento de energía cuenta con suficiente tiempo para cargarse o descargarse totalmente, como una medición relacionada con la constante de tiempo del circuito.

LECTURAS ADICIONALES

Una guía que trata sobre técnicas de solución de ecuaciones diferenciales puede encontrarse en:

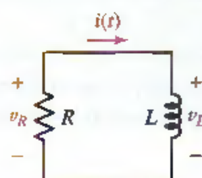
W. E. Boyce y R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,* 7a. ed., Wiley, Nueva York, 2002.

Una descripción a detalle de los transitorios en circuitos eléctricos puede encontrarse en:

E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume 1,* Wiley, Nueva York, 1954. (Fuera de publicación, sin embargo, se puede encontrar en las bibliotecas de muchas universidades.)

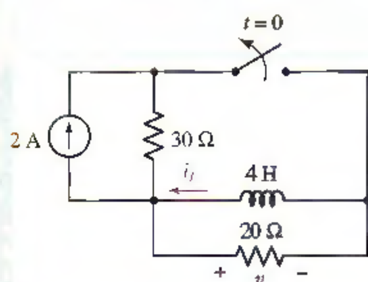
EJERCICIOS

8.1 El circuito *RL* de fuente libre

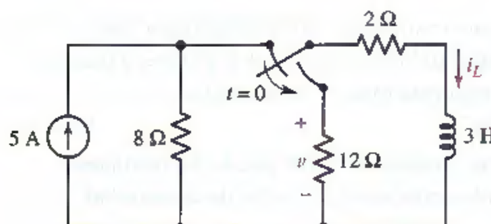


■ **FIGURA 8.54**

1. Considerar el circuito *RL* simple que se muestra en la figura 8.54. Si $R = 4.7\ \text{k}\Omega$, $L = 1\ \mu\text{H}$, e $i(0) = 2$ mA, calcular (*a*) i en $t = 100$ ps; (*b*) i en $t = 212.8$ ps; (*c*) v_R en 75 ps; (*d*) v_L en 75 ps.
2. El circuito que se muestra en la figura 8.54 consta de una resistencia $R = 1\ \Omega$ y una inductancia $L = 2$ H. En $t = 0$, la inductancia almacena 100 mJ de energía. Calcular (*a*) i en $t = 1$ s; (*b*) i en $t = 5$ s; (*c*) i en $t = 10$ s; (*d*) la energía restante en la inductancia en $t = 2$ s.
3. Para el circuito *RL* simple que se muestra en la figura 8.54, se sabe que R es de 100 Ω. Si $i(0) = 2$ mA e $i(50\ \mu\text{s}) = 735.8\ \mu$A, determinar el valor de la inductancia L.
4. En el circuito *RL* simple que se muestra en la figura 8.54, se sabe que L es de 3 mH. Si $i(0) = 1.5$ A e $i(2\ \text{s}) = 551.8$ mA, determinar el valor de la resistencia R.
5. La inductancia de 3 mH en el circuito de la figura 8.54 almacena 1 J de energía en $t = 0$ y 100 mJ en $t = 1$ ms. Calcular R.
6. El interruptor del circuito de la figura 8.55 ha estado cerrado desde que los dinosaurios deambulaban sobre la tierra. Si el interruptor se abre en $t = 0$, determinar (*a*) i_L en el instante después de que cambia el interruptor; (*b*) v en el instante posterior al cambio del interruptor.
7. El interruptor del circuito de la figura 8.56 es de un solo polo con dos movimientos que se dibujan para indicar que cierra un circuito antes de abrir el otro; a menudo, este tipo de interruptor se conoce como interruptor que "establece contacto antes de interrumpirlo". Suponiendo que ha estado en la posición dibujada en la figura durante largo tiempo, determinar el valor de v e i_L (*a*) en el instante justo antes de que cambie el interruptor; (*b*) en el instante justo *después* de que cambie el interruptor.



■ **FIGURA 8.55**



■ **FIGURA 8.56**

8. Después de permanecer por horas en la configuración indicada, el interruptor del circuito de la figura 8.57 se cierra en $t = 0$. En $t = 5\ \mu s$, calcular: (*a*) i_L; (*b*) i_{SW}.

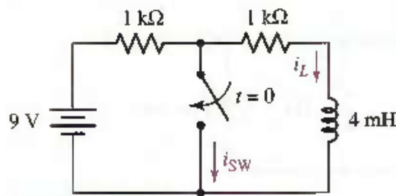


FIGURA 8.57

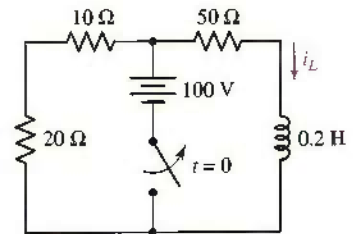


FIGURA 8.58

9. Luego de estar cerrado durante largo tiempo, el interruptor del circuito de la figura 8.58 se abre en $t = 0$. (*a*) Determinar $i_L(t)$ para $t > 0$. (*b*) Evaluar i_L. (*c*) Calcular t_1 si $i_L(t_1) = 0.5 i_L(0)$.

10. En el caso del circuito que se muestra en la figura 8.59, (*a*) escribir la ecuación diferencial que describe la tensión v_R en el resistor para $t > 0$. (*b*) Resolver la ecuación característica. (*c*) Calcular v_R justo *antes* de que se abra el interruptor, exactamente *después* de que se abra el interruptor y en $t = 1$ s.

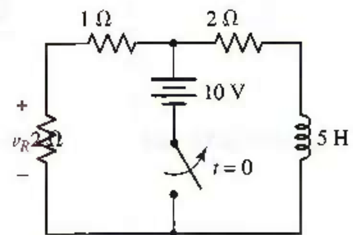


FIGURA 8.59

8.2 Propiedades de la respuesta exponencial

11. La figura 8.7 muestra una gráfica de i/I_0 como una función de t. (*a*) Determinar los valores de t/τ para los cuales i/I_0 es 0.1, 0.01 y 0.001. (*b*) Si se traza una tangente a la curva en el punto donde $t/\tau = 1$, ¿dónde intersecará al eje t?

12. Consultar la respuesta que se muestra en la figura 8.60 y determinar la constante de tiempo del circuito y la corriente inicial que circula por el inductor.

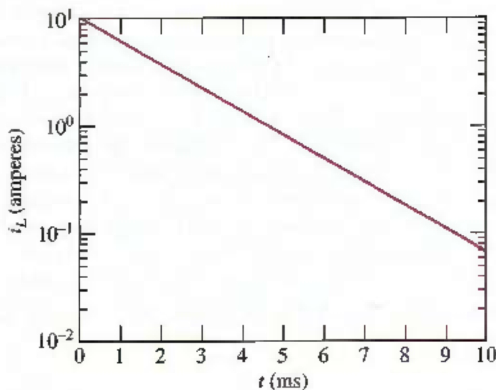


FIGURA 8.60

13. Dibujar la tensión de la resistencia en un circuito *RL* simple caracterizado por una energía inicial de 15 mJ almacenada en el inductor de 10 mH, para $R = 1\ k\Omega$, $R = 10\ k\Omega$ y $R = 100\ k\Omega$. Verificar su solución con una simulación PSpice sencilla.

14. Sean $R = 1\ M\Omega$ y $L = 3.3\ \mu H$ en el circuito de la figura 8.1. (*a*) Calcular la constante de tiempo del circuito. (*b*) Si el inductor tiene una energía inicial de $43\ \mu J$ en $t = 0$, determinar i_L en $t = 5$ ps. (*c*) Verificar su solución con una simulación PSpice.

15. Se envía una señal digital a través de un alambre enrollado sin pérdidas que tiene una inductancia de $125.7\ \mu H$. Determinar el máximo valor permitido de la resistencia equivalente de Thévenin del equipo de recepción, si los transitorios deben durar menos de 100 ns.

16. El interruptor de la figura 8.61 ha estado abierto por mucho tiempo antes de cerrarse en $t = 0$. Para el intervalo de tiempo $-5 < t < 5$ μs, dibujar: (*a*) $i_L(t)$; (*b*) $i_x(t)$.

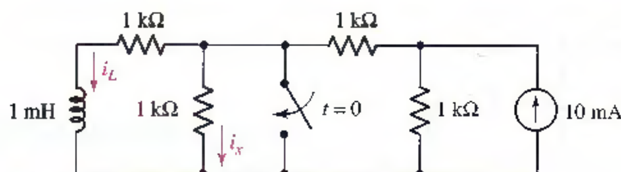


FIGURA 8.61

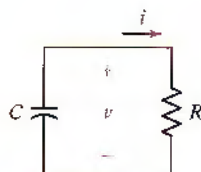


FIGURA 8.62

8.3 El circuito *RC* de fuente libre

17. En el circuito *RC* en paralelo de la figura 8.62, $C = 1$ μF y $R = 100$ MΩ representan las pérdidas en el dieléctrico del capacitor. El capacitor almacena 1 mJ en $t = 0$. (*a*) Determinar la constante de tiempo del circuito. (*b*) Calcular i en 20 s. (*c*) Verificar la solución con una simulación PSpice.
18. Suponer que, en el circuito de la figura 8.62, $R = 1$ Ω, $C = 2$ F e $i(0) = 10$ V. Calcular v en (*a*) $t = 1$ s; (*b*) $t = 2$ s; (*c*) $t = 5$ s; (*d*) $t = 10$ s.
19. Utilizar $R = 1$ kΩ y $C = 4$ mF en el circuito de la figura 8.61. Si $v(0) = 5$ V, calcular (*a*) v en $t = 1$ ms; (*b*) i en $t = 2$ ms; (*c*) la energía que queda en el capacitor en $t = 4$ ms.
20. Se sabe que en el circuito *RC* que se muestra en la figura 8.62, *C* es de 100 pF. (*a*) Si $v(0) = 1.5$ V y $v(2\text{ ns}) = 100$ mV, determinar el valor de la resistencia *R*. (*b*) Verificar la solución con una simulación PSpice.
21. Un receptor estéreo tiene un suministro de potencia que incluye dos grandes capacitores de 50 mF conectados en paralelo. Cuando se interrumpe la alimentación de potencia del receptor, se observa que el LED ámbar que se usa como indicador de "potencia activada" se atenúa poco a poco durante unos cuantos segundos. Como no hay nada interesante en la televisión, decide efectuar un experimento utilizando una cámara de 35 mm con un obturador de velocidad variable y una película barata. Se utilizan cuatro velocidades de disparo: 150 ms, 1 s, 1.5 s y 2.0 s. A medida que aumenta la velocidad del disparador de 150 ms a 1.5 s, la imagen que aparece en la película revelada aumenta en brillo. No se nota ninguna diferencia significativa entre las imágenes tomadas a velocidades de disparador de 1.5 s y 2.0 s, mientras que a una velocidad de 150 ms se observa una imagen con 14% de la intensidad que se obtiene con las más bajas velocidades de cámara. Estimar la resistencia equivalente de Thévenin del circuito conectado al suministro de potencia del receptor.
22. (*a*) Determinar $v_C(t)$ para el tiempo t en el circuito de la figura 8.63. (*b*) ¿En qué tiempo se tiene $v_C = 0.1v_C(0)$?

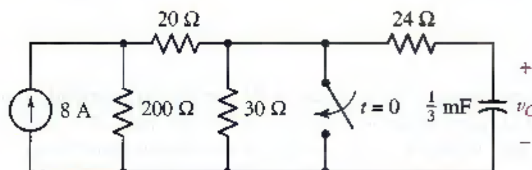
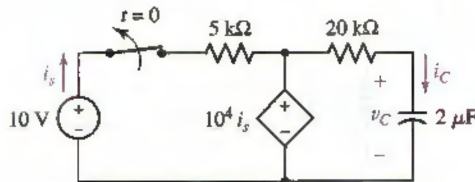


FIGURA 8.63

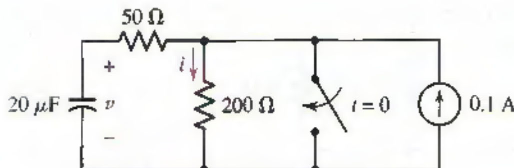
23. Una fuente de corriente de 4 A, una resistencia de 20 Ω y un capacitor de 5 μF están conectados en paralelo. La amplitud de la fuente de corriente disminuye de manera repentina hasta cero (convirtiéndose en una fuente de corriente de 0 A) en $t = 0$. ¿En qué tiempo: (*a*) la tensión del capacitor disminuye hasta la mitad de su valor inicial, y (*b*) la energía almacenada en el capacitor se reduce hasta la mitad de su valor inicial?

24. Determinar $v_C(t)$ e $i_C(t)$ para el circuito de la figura 8.64 y dibujar ambas curvas sobre el mismo eje de tiempo para $-0.1 < t < 0.1$ s.



■ **FIGURA 8.64**

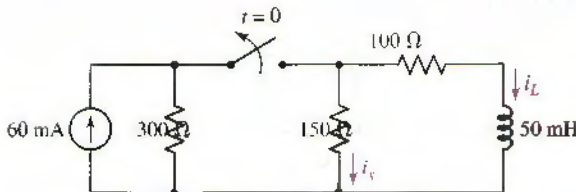
25. En el circuito de la figura 8.65, calcular el valor de la corriente denominada i y la tensión designada v en $t = 0^+$, $t = 1.5$ ms y $t = 3.0$ ms.



■ **FIGURA 8.65**

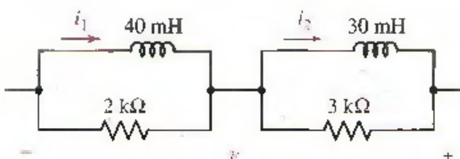
8.4 Una perspectiva más general

26. El interruptor de la figura 8.66 se abre en $t = 0$ después de haber estado cerrado por un tiempo indefinido. Encontrar i_L e i_x en (*a*) $t = 0^-$; (*b*) $t = 0^+$; (*c*) $t = 300$ μs.



■ **FIGURA 8.66**

27. Un inductor de 0.2 H está en paralelo con una resistencia de 100 Ω. La corriente en el inductor es de 4 A en $t = 0$. (*a*) Determine $i_L(t)$ en $t = 0.8$ ms. (*b*) Si se conecta otra resistencia de 100 Ω en paralelo con el inductor en $t = 1$ ms, calcular i_L en $t = 2$ ms.
28. Un inductor de 20 mH está conectado en paralelo con una resistencia de 1 kΩ. Considerar que el valor de la corriente de lazo es de 40 mA en $t = 0$. (*a*) ¿En qué tiempo la corriente será de 10 mA? (*b*) ¿Qué resistencia en serie debe conmutarse en el circuito en $t = 10$ μs, de modo que la corriente sea de 10 mA en $t = 15$ μs?
29. En la red de la figura 8.67, los valores iniciales son $i_1(0) = 20$ mA e $i_2(0) = 15$ mA. (*a*) Determinar $v(0)$. (*b*) Calcular $v(15\ \mu s)$. (*c*) ¿En qué tiempo es $v(t) = 0.1v(0)$?



■ **FIGURA 8.67**

30. Elegir valores para R_1 y R_2 en el circuito de la figura 8.68, de manera que $v_R(0^+) = 10$ V y $v_R(1 \text{ ms}) = 5$ V.

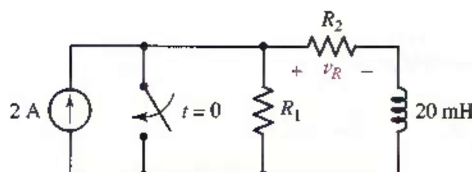


FIGURA 8.68

31. El interruptor del circuito de la figura 8.69 ha estado abierto por mucho tiempo, antes de cerrarse en $t = 0$. (*a*) Determinar $i_L(t)$ para $t > 0$. (*b*) Dibujar $v_x(t)$ para menos $-4 < t < +4$ ms.

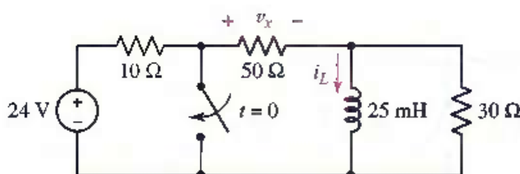


FIGURA 8.69

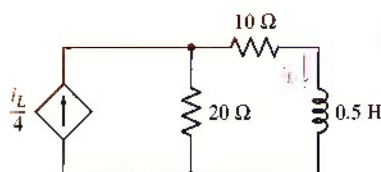


FIGURA 8.70

32. Si $i_L(0) = 10$ A en el circuito de la figura 8.70, encontrar $i_L(t)$ para $t > 0$.

33. Observar el circuito de la figura 8.71 y determinar i_1 en $t = -0.1$, 0.03 y 0.1 s. Elaborar un dibujo de i_1 en función de t, $-0.1 < t < 1$ s.

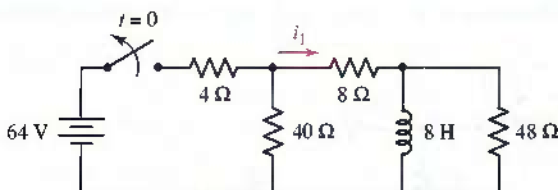


FIGURA 8.71

34. Un circuito está compuesto por un inductor de 0.5 H, una resistencia de 10 Ω y una resistencia de 40 Ω en serie. La corriente en el inductor es de 4 A en $t = 0$. (*a*) Calcular $i_L(15 \text{ ms})$. (*b*) La resistencia de 40 Ω está en cortocircuito en $t = 15$ ms. Calcular $i_L(30 \text{ ms})$.

35. El circuito de la figura 8.72 contiene dos inductores en paralelo, lo que permite que circule una corriente atrapada en torno al lazo inductivo. Sean $i_1(0^-) = 10$ A e $i_2(0^-) = 20$ A. (*a*) Calcular $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ y $i(0^+)$. (*b*) Determinar la constante de tiempo τ para $i(t)$. (*c*) Proporcionar $i(t)$, $t > 0$. (*d*) Obtener $v(t)$. (*e*) Determinar $i_1(t)$ e $i_2(t)$ a partir de $v(t)$ y los valores iniciales. (*f*) Demostrar que la energía almacenada en $t = 0$ es igual a la suma de la energía disipada en la red resistiva entre $t = 0$ y $t = \infty$, más la energía almacenada en los inductores en $t = \infty$.

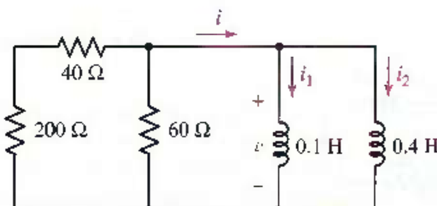
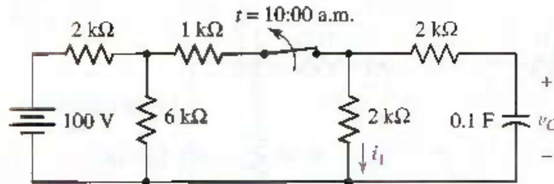


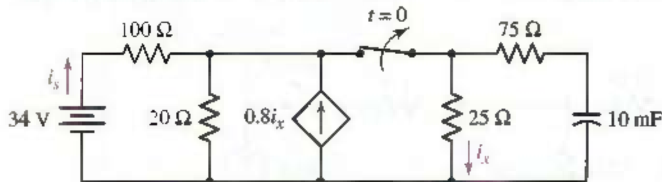
FIGURA 8.72

36. El circuito de la figura 8.73 ha estado en la forma que se indica desde ayer al mediodía. El interruptor se abre exactamente a las 10:00 a.m. Determinar i_1 y v_C a las (*a*) 9:59 a.m.; (*b*) 10:05 a.m. (*c*) Calcular $i_1(t)$ en $t = 1.2\tau$. (*d*) Verificar la solución con PSpice.



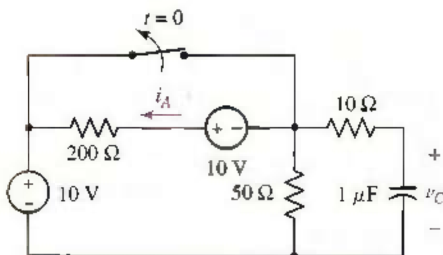
■ **FIGURA 8.73**

37. Luego de estar por mucho tiempo en la configuración que se señala, el interruptor de la figura 8.74 se abre en $t = 0$. Calcular los valores para (*a*) $i_s(0^-)$; (*b*) $i_x(0^-)$; (*c*) $i_x(0^+)$; (*d*) $i_s(0^+)$; (*e*) $i_x(0.4\text{ s})$.



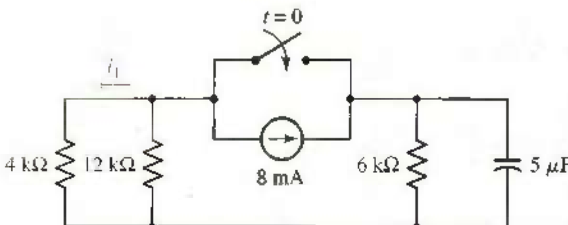
■ **FIGURA 8.74**

38. Luego de permanecer cerrado por mucho tiempo, el interruptor de la figura 8.75 se abre en $t = 0$. (*a*) Encontrar $v_C(t)$ para $t > 0$. (*b*) Calcular $i_A(-100\ \mu\text{s})$ e $i_A(100\ \mu\text{s})$. (*c*) Verificar su solución con PSpice.



■ **FIGURA 8.75**

39. Muchas lunas después de que el circuito de la figura 8.76 se ensambló por primera vez, su interruptor se cierra en $t = 0$. (*a*) Obtener $i_1(t)$ para $t < 0$. (*b*) Encontrar $i_1(t)$ para $t > 0$.



■ **FIGURA 8.76**

40. Mucho tiempo después de que se ensambló el circuito de la figura 8.77, ambos interruptores se abren de forma simultánea en $t = 0$, como se indica. (*a*) Obtener la expresión de v_{sal} correspondiente a $t > 0$. (*b*) Calcular los valores de v_{sal} en $t = 0^+$, 1 μs y 5 μs.

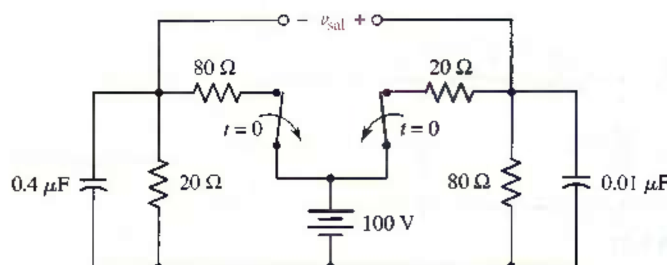


FIGURA 8.77

41. (*a*) Suponer que el circuito de la figura 8.78 ha estado en la forma que aparece durante bastante tiempo. Determinar $v_C(t)$ para cualquier t luego de que se abre el interruptor. (*b*) Calcular $v_C(t)$ en $t = 3$ μs. (*c*) Verificar su solución con PSpice.

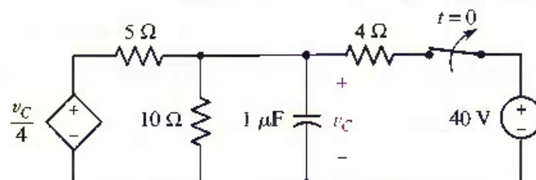


FIGURA 8.78

42. Determinar los valores de R_0 y R_1 en el circuito de la figura 8.79, de modo que $v_C = 50$ V en $t = 0.5$ ms y $v_C = 25$ V en $t = 2$ ms.

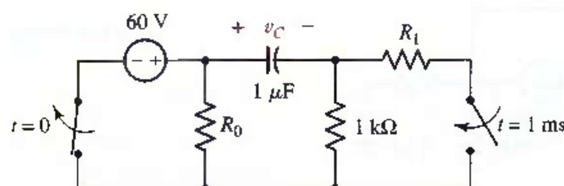


FIGURA 8.79

43. Para el circuito de la figura 8.80 determinar $v_C(t)$ para (*a*) $t < 0$; (*b*) $t > 0$.

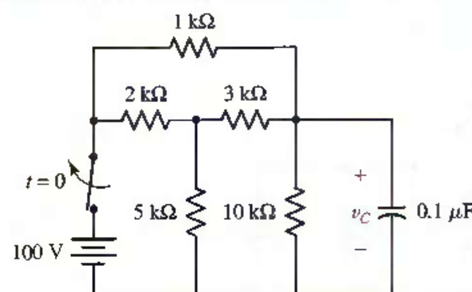
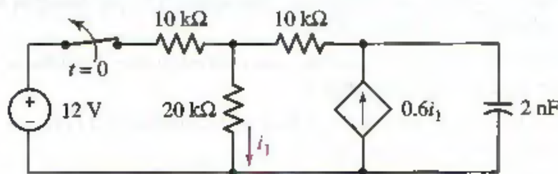


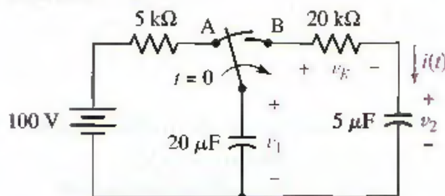
FIGURA 8.80

44. Proporcionar el valor de $i_1(t)$ para $t < 0$ y $t > 0$ en el circuito de la figura 8.81.



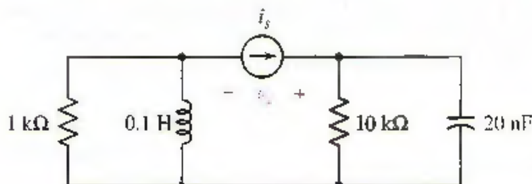
■ **FIGURA 8.81**

45. El interruptor de la figura 8.82 se mueve de A a B en $t = 0$ después de estar en A por mucho tiempo. Esto coloca a los dos capacitores en serie, lo cual permite que en los capacitores queden atrapadas tensiones de cd iguales y opuestas. (*a*) Determinar $v_1(0^-)$ $v_2(0^-)$ y $v_R(0^-)$. (*b*) Calcular $v_1(0^+)$, $v_2(0^+)$ y $v_R(0^+)$. (*c*) Obtener la constante de tiempo de $v_R(t)$. (*d*) Proporcionar $v_R(t)$, $t > 0$. (*e*) Determinar $i(t)$. (*f*) Encontrar $v_1(t)$ y $v_2(t)$) a partir de $i(t)$ y los valores iniciales. (*g*) Demostrar que la energía almacenada en $t = \infty$ más la energía total disipada en la resistencia de 20 kΩ es igual a la energía almacenada en los capacitores en $t = 0$.

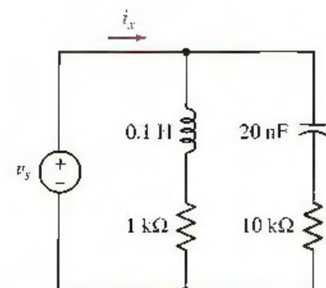


■ **FIGURA 8.82**

46. El valor de i_s en el circuito de la figura 8.83 es 1 mA para $t < 0$, y cero para $t > 0$. Determinar $v_x(t)$ para (*a*) $t < 0$; (*b*) $t > 0$.



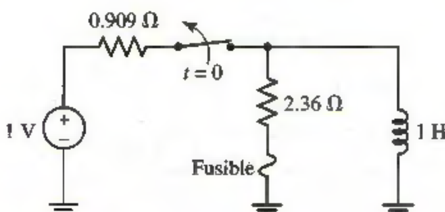
■ **FIGURA 8.83**



■ **FIGURA 8.84**

47. El valor de v_s en el circuito de la figura 8.84 es 20 V para $t < 0$, y cero para $t > 0$. Calcular $i_x(t)$ para (*a*) $t < 0$; (*b*) $t > 0$.

48. El interruptor en la figura 8.85 ha estado cerrado por varias horas, quizá demasiadas. El fusible es un tipo especial de resistencia que se sobrecalienta y funde si la corriente que circula por ella excede 1 A por más de 100 ms (también existen otros tipos de fusibles). La resistencia del fusible es de 3 mΩ. Si se abre el interruptor en $t = 0$, ¿se fundirá? Verificar su respuesta con PSpice.



■ **FIGURA 8.85**

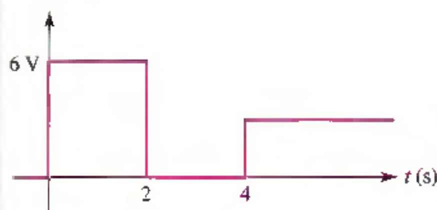


FIGURA 8.86

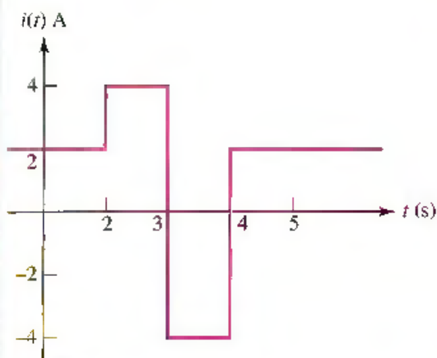


FIGURA 8.87

8.5 La función escalón unitario

49. Utilizando las funciones escalón unitario, generar una expresión que describa la forma de onda que se muestra en la figura 8.86.

50. Mediante las funciones escalón unitario generar una expresión que describa la forma de onda que se muestra en la figura 8.87.

51. Dada la función $f(t) = 6u(-t) + 6u(t+1) - 3u(t+2)$, evaluar $f(t)$ en $t =$ (*a*) -1; (*b*) 0^-; (*c*) 0^+; (*d*) 1.5; (*e*) 3.

52. Dada la función $g(t) = 9u(t) - 6u(t+10) + 3u(t+12)$, evaluar $g(t)$ en $t =$ (*a*) -1; (*b*) 0^+; (*c*) 5; (*d*) 11; (*e*) 30.

53. Los valores de fuente del circuito de la figura 8.88 son $v_A = 300u(t-1)$ V, $v_B = -120u(t+1)$ V e $i_C = 3u(-t)$ A. Determinar i_1 en $t = -1.5, -0.5, 0.5$, y 1.5 s.

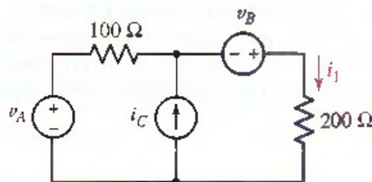


FIGURA 8.88

54. Los valores de fuente de la figura 8.88 son $v_A = 600tu(t+1)$ V, $v_B = 600(t+1)u(t)$ V e $i_C = 6(t-1)u(t-1)$ A. (*a*) Proporcionar i_1 en $t = -1.5, -0.5, 0.5$ y 1.5 s. (*b*) Dibujar i_1 en función de t para $-2.5 < t < 2.5$ s.

55. En $t = 2$, obtener el valor de (*a*) $2u(1-t) - 3u(t-1) - 4u(t+1)$; (*b*) $[5 - u(t)][2 + u(3-t)][1 - u(1-t)]$; (*c*) $4e^{-u(3-t)}u(3-t)$.

56. Obtener i_x para $t < 0$ y $t > 0$ en el circuito de la figura 8.89 si la rama desconocida contiene: (*a*) un interruptor normalmente abierto que se cierra en $t = 0$, en serie con una batería de 60 V, referencia + en la parte superior; (*b*) una fuente de tensión, $60u(t)$ V, referencia + en la parte superior.

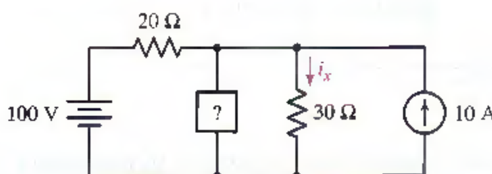


FIGURA 8.89

57. Determinar i_x en el circuito de la figura 8.90 en intervalos desde $t = -0.5$ s hasta $t = 3.5$ s.

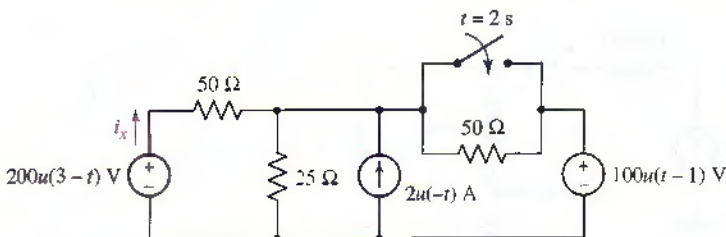
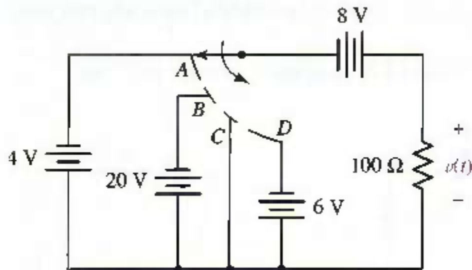


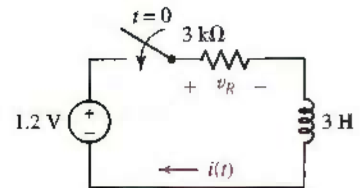
FIGURA 8.90

58. El interruptor de la figura 8.91 está en la posición A para $t < 0$. En $t = 0$ se mueve hacia B, y luego hacia C en $t = 4$ s y hacia D en $t = 6$ s, donde permanece. Graficar $v(t)$ como una función del tiempo y expresarla como una suma de funciones forzadas de escalón.



■ **FIGURA 8.91**

59. Una forma de onda de tensión que aparece en un elemento desconocido tiene como expresión $7u(t) - 0.2u(t) + 8u(t-2) + 3$ V. (*a*) Determinar la tensión en $t = 1$ s. (*b*) Si la corriente correspondiente a través del elemento es $3.5u(t) - 0.1u(t) + 4u(t-2) + 1.5$ A, ¿qué tipo de elemento es y cuál es su valor?

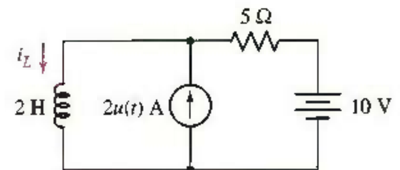


■ **FIGURA 8.92**

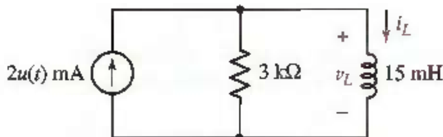
8.6 Accionamiento de circuitos *RL*

60. En el circuito de la figura 8.92, (*a*) encontrar una expresión para $v_R(t)$ válida para todo tiempo; (*b*) calcular v_R en $t = 2$ ms; (*c*) verificar la respuesta de la parte (*b*) utilizando PSpice.

61. Observar el circuito de la figura 8.93 y (*a*) determinar $i_L(t)$; (*b*) utilizar la expresión de $i_L(t)$ con el fin de calcular $v_L(t)$.



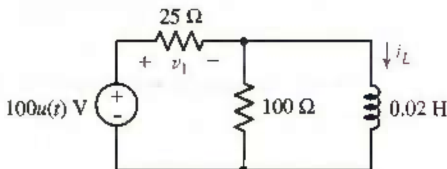
■ **FIGURA 8.94**



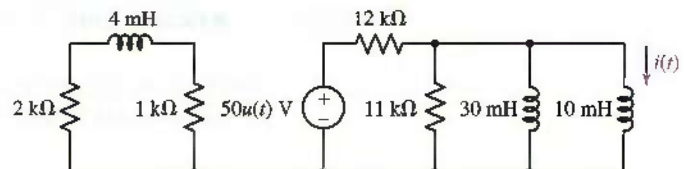
■ **FIGURA 8.93**

62. Encontrar i_L en el circuito de la figura 8.94 en t igual a (*a*) −0.5 s; (*b*) 0.5 s; (*c*) 1.5 s.

63. De acuerdo con el circuito que se presenta en la figura 8.95, obtener la expresión algebraica del mismo y también graficarla: (*a*) $i_L(t)$; (*b*) $v_1(t)$.



■ **FIGURA 8.95**



■ **FIGURA 8.96**

64. Consultar el circuito de la figura 8.96 y (*a*) calcular la potencia absorbida por la resistencia de 2 kΩ en $t = 1$ ms; (*b*) determinar el valor de $i(t)$ en 3 μs; (*c*) proporcionar la corriente máxima a través de la resistencia de 12 kΩ. (*d*) Confirmar sus respuestas con PSpice.

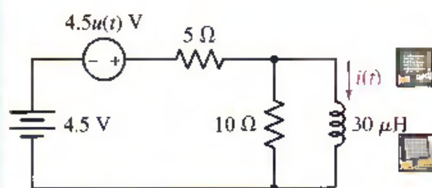


FIGURA 8.97

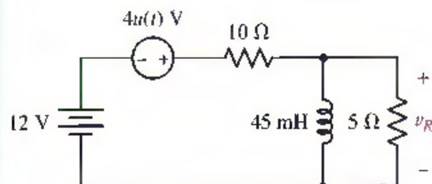


FIGURA 8.98

8.7 Respuestas natural y forzada

65. En el circuito que se muestra en la figura 8.97, (*a*) encontrar una expresión válida para $i(t)$ en todo tiempo; (*b*) calcular $i(t)$ en $t = 1.5$ μs; (*c*) verificar el resultado con una simulación PSpice.

66. En el circuito *RL* de la figura 8.98, (*a*) encontrar la expresión de $v_R(t)$ válida para todo tiempo; (*b*) calcular $v_R(t)$ en $t = 2$ ms; (*c*) verificar el resultado con una simulación PSpice.

67. Con referencia al circuito de la figura 8.99, calcular $v_1(t)$ en $t = 27$ μs.

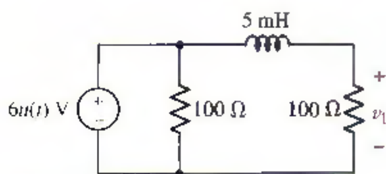


FIGURA 8.99

68. El interruptor de la figura 8.100 ha estado cerrado por largo tiempo. (*a*) Obtener i_L para $t < 0$. (*b*) Calcular $i_L(t)$ para cualquier t luego de que se abre el interruptor en $t = 0$.

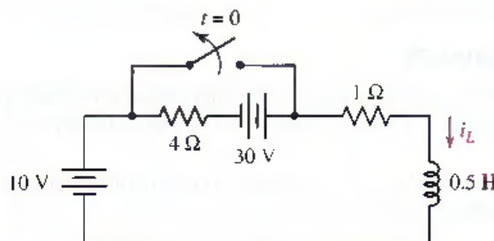


FIGURA 8.100

69. El interruptor de la figura 8.101 ha estado abierto durante largo tiempo. (*a*) Obtener i_L para $t < 0$. (*b*) Determinar $i_L(t)$ para cualquier t después de que se cierra el interruptor en $t = 0$.

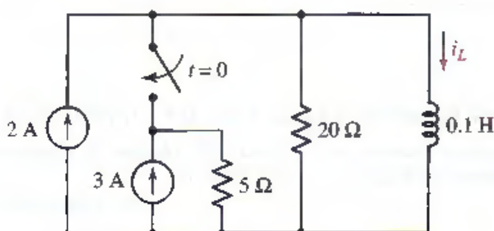


FIGURA 8.101

70. Para el circuito que se muestra en la figura 8.102, obtener los valores de i_L y v_1 en t igual a (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) ∞; (*d*) 0.2 ms.

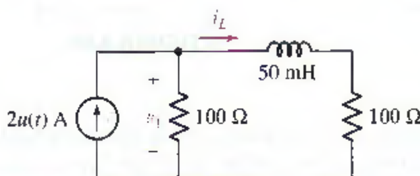
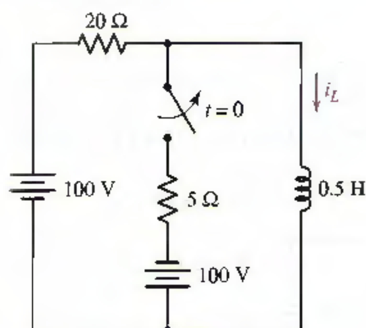


FIGURA 8.102

71. La ecuación [33] de la sección 8.7 representa la solución general del circuito *RL* accionado en serie, donde Q es una función de tiempo en general, y A y P son constantes. Sean $R = 125\ \Omega$ y $L = 5$ H, encontrar $i(t)$ para $t > 0$ si la función de tensión forzada $LQ(t)$ es (*a*) 10 V; (*b*) $10u(t)$ V; (*c*) $10 + 10u(t)$ V; (*d*) $10u(t)\cos 50t$ V.

72. El interruptor de la figura 8.103 permaneció cerrado durante un tiempo prolongado. (*a*) Proporcionar i_L para $t < 0$. (*b*) Justo después de abrir el interruptor, encontrar $i_L(0^+)$. (*c*) Determinar $i_L(\infty)$. (*d*) Obtener la expresión de $i_L(t)$ relativa a $t > 0$.



■ **FIGURA 8.103**

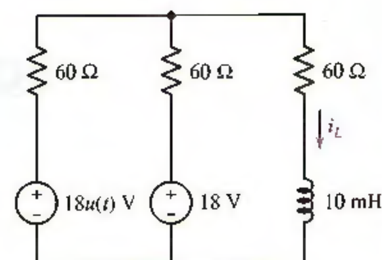
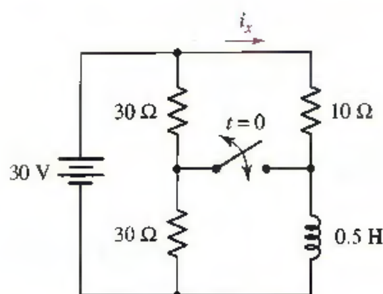


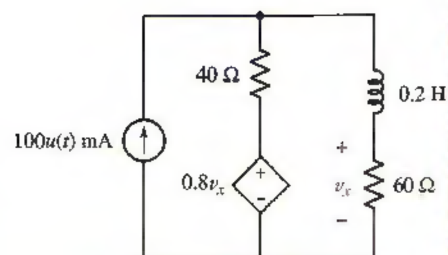
FIGURA 8.104

73. Calcular i_L para cualquier t en el circuito de la figura 8.104.

74. Suponer que el interruptor de la figura 8.105 ha estado cerrado por mucho tiempo y que se abre después en $t = 0$. Proporcionar i_x en t igual a (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) 40 ms.



■ **FIGURA 8.105**

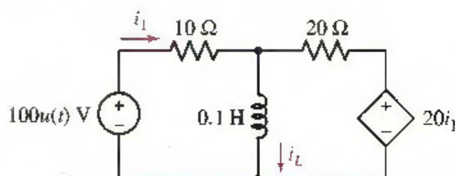


■ **FIGURA 8.106**

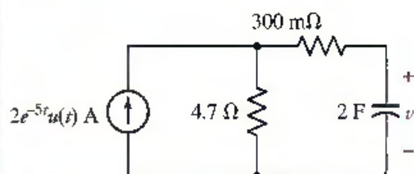
75. Suponer que el interruptor de la figura 8.105 permaneció abierto por mucho tiempo y que se cierra después en $t = 0$. Determinar i_x en t igual a (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) 40 ms.

76. Obtener $v_x(t)$ para cualquier t en el circuito de la figura 8.106.

77. De acuerdo con el circuito que se presenta en la figura 8.107, calcular (*a*) $i_L(t)$; (*b*) $i_1(t)$.



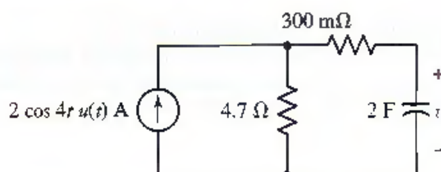
■ **FIGURA 8.107**



■ **FIGURA 8.108**

78. Encontrar la expresión de $v(t)$ en el circuito de la figura 8.108 que sea válida para todo tiempo.

79. Encontrar la expresión de $v(t)$ en el circuito de la figura 8.109 que sea válida para cualquier tiempo.

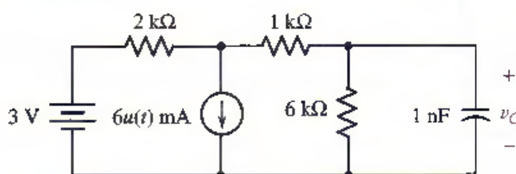


■ **FIGURA 8.109**

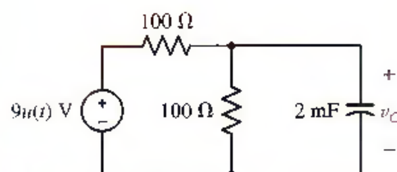
8.8 Accionamiento de circuitos *RC*



80. (*a*) Proporcionar v_C del circuito de la figura 8.110 en $t = -2\ \mu$s y $t = +2\ \mu$s. (*b*) Verificar su solución con PSpice.



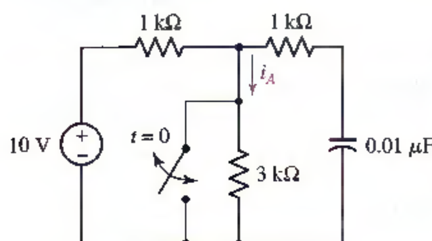
■ **FIGURA 8.110**



■ **FIGURA 8.111**

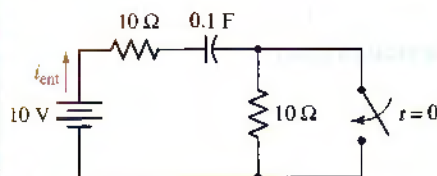
81. Con referencia al circuito *RC* de la figura 8.111, encontrar la expresión de $v_C(t)$ que sea válida para cualquier tiempo.

82. Después de permanecer cerrado por largo tiempo, el interruptor de la figura 8.112 se abre en $t = 0$. Calcular i_A para cualquier tiempo.



■ **FIGURA 8.112**

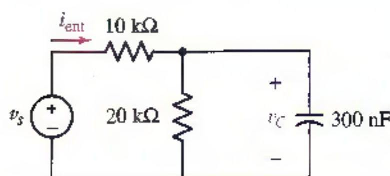
83. Luego de estar abierto por mucho tiempo, el interruptor de la figura 8.112 se cierra en $t = 0$. Determinar i_A para cualquier tiempo.



■ **FIGURA 8.113**

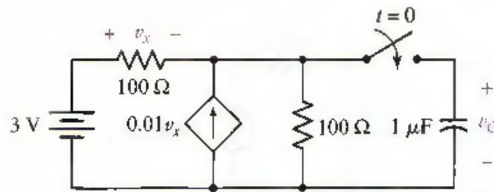
84. El interruptor del circuito de la figura 8.113 ha estado abierto por mucho tiempo. Se cierra de forma repentina en $t = 0$. Encontrar i_{ent} igual a: (*a*) -1.5 s; (*b*) 1.5 s.

85. Sea $v_s = -12u(-t) + 24u(t)$ V en el circuito de la figura 8.114. Sobre el intervalo de tiempo -5 ms $< t <$ 5 ms, encontrar la expresión algebraica de: (*a*) $v_C(t)$; (*b*) $i_{ent}(t)$. Graficarlas.



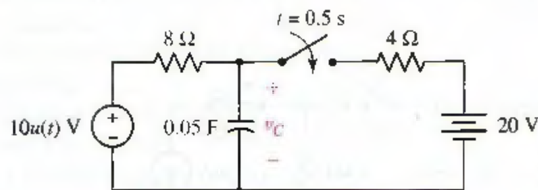
■ **FIGURA 8.114**

86. Calcular v_C para $t > 0$ en el circuito de la figura 8.115.



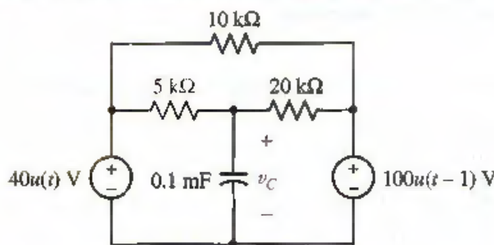
■ **FIGURA 8.115**

87. Obtener el valor de $v_C(t)$ en $t = 0.4$ y 0.8 s para el circuito de la figura 8.116.

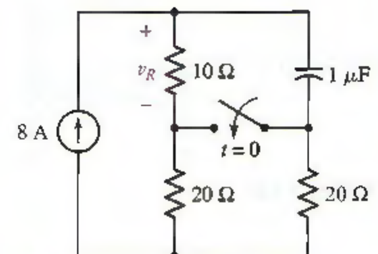


■ **FIGURA 8.116**

88. En el circuito de la figura 8.117: (*a*) determinar $v_C(t)$ para todo tiempo, y (*b*) graficar $v_C(t)$ para $-1 < t < 2$ s. Verificar su solución con PSpice.



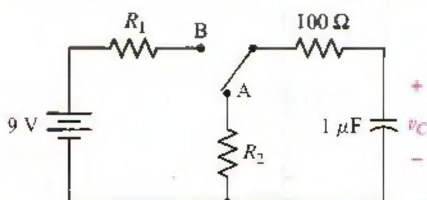
■ **FIGURA 8.117**



■ **FIGURA 8.118**

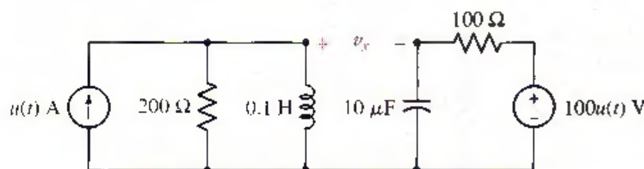
89. En el circuito de la figura 8.118, determinar $v_R(t)$ para (*a*) $t < 0$; (*b*) $t > 0$. Suponer luego que el interruptor ha estado *cerrado* durante largo tiempo y que se abre en $t = 0$. Calcular $v_R(t)$ para (*c*) $t < 0$; (*d*) $t > 0$.

90. El interruptor de la figura 8.119 se ha mantenido en *A* durante largo tiempo. Se mueve hacia *B* en $t = 0$ y regresa hacia *A* en $t = 1$ ms. Calcular R_1 y R_2 de modo que $v_C(1 \text{ ms}) = 8$ V y $v_C(2 \text{ ms}) = 1$ V.



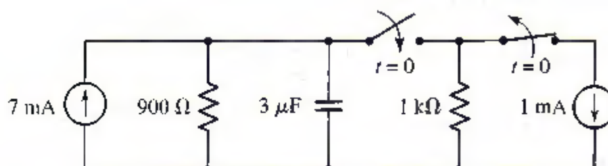
■ **FIGURA 8.119**

91. Encontrar el primer instante de tiempo luego de $t = 0$, para el cual $v_x = 0$ en el circuito de la figura 8.120.



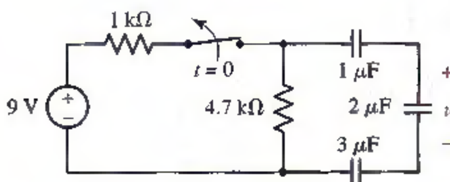
■ **FIGURA 8.120**

92. En el circuito de la figura 8.121, un interruptor se abre en $t = 0$, en tanto que el otro interruptor se cierra en forma simultánea. Graficar la potencia absorbida por la resistencia de 1 kΩ en el intervalo -1 ms $\leq t \leq 7$ ms. En $t = 0$, la fuente de 1 mA también se desactiva.

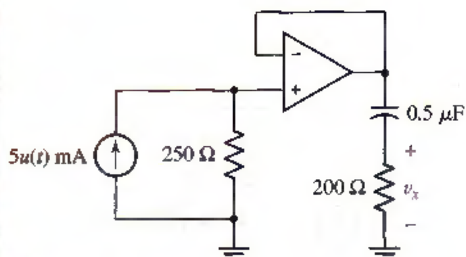


■ **FIGURA 8.121**

93. Si el interruptor en la figura 8.122 ha estado cerrado por varios días, (*a*) determinar v en $t = 5.45$ ms; (*b*) calcular la potencia disipada por la resistencia de 4.7 kΩ en $t = 1.7$ ms; (*c*) obtener la energía total que a la larga la resistencia de 4.7 kΩ convertirá en calor, luego de que se abra el interruptor.



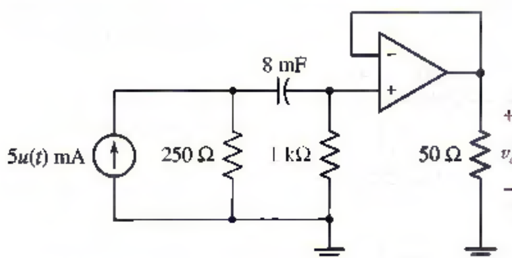
■ **FIGURA 8.122**



■ **FIGURA 8.123**

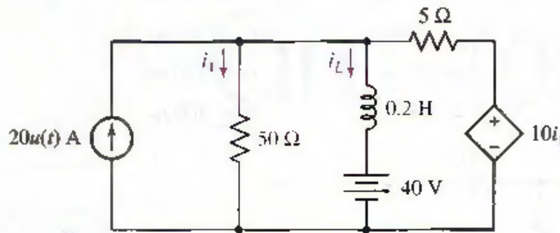
94. Suponer que el amp op que se presenta en la figura 8.123 es ideal y calcular $v_x(t)$ para cualquier t.

95. Suponga que el amp op que se muestra en la figura 8.124 es ideal y (*a*) encontrar $v_o(t)$ para todo t. (*b*) Verificar la solución con PSpice. Sugerencia: se pueden graficar funciones con Probe ingresando la expresión en la caja **Trace Expression**.



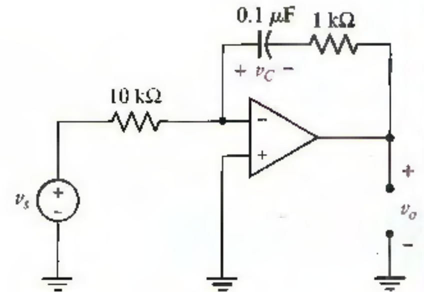
■ **FIGURA 8.124**

96. (*a*) Obtener $i_L(0)$ para el circuito *RL* de la figura 8.125; (*b*) con PSpice y el valor inicial que encontró en el inciso *a*, determinar i_L en $t = 50$ ms.



■ **FIGURA 8.125**

97. (*a*) Suponer que el amp op que se muestra en la figura 8.126 es ideal y que $v_C(0) = 0$. Encontrar $v_o(t)$ para cualquier *t*. (*b*) Verificar su solución con PSpice. Sugerencia: se pueden graficar las funciones en Probe incorporando la expresión dentro de la caja **Trace Expression**.



■ **FIGURA 8.126**

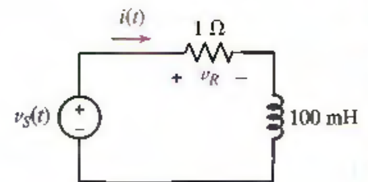
98. Diseñar un circuito que permita que la luz de una habitación permanezca encendida por 5 segundos después de que se desactivó el interruptor. Considerar un foco eléctrico de 40 W y un suministro de 115 V ca.

99. Un detector de movimiento instalado como parte de un sistema de seguridad parece ser muy sensible a las fluctuaciones de potencia eléctrica. Se va a insertar un circuito de retardo entre el sensor y el circuito de alarma, de modo que se minimicen los disparos falsos. Bajo el supuesto de que el equivalente de Thévenin del sensor de movimiento sea una resistencia de 2.37 kΩ en serie con una fuente de 1.5 V y que la resistencia equivalente de Thévenin del circuito de alarma sea de 1 MΩ, diseñar un circuito y que pueda insertarse entre el sensor y el circuito que requiera una señal del sensor que dure por lo menos 1 segundo completo. El movimiento del circuito sensor/alarma trabaja del modo siguiente: el sensor suministra de manera continua una corriente pequeña al circuito de alarma, a menos que se detecte movimiento, en cuyo caso se interrumpe la corriente.

8.9 Predicción de la respuesta de circuitos conmutados secuencialmente

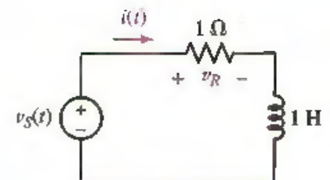
100. (*a*) Construir una forma de onda pulsada en PSpice para modelar la forma de onda de tensión v_B del ejercicio 53 y graficarla utilizando Probe. (*Sugerencia: conectar la fuente a una resistencia para llevar a cabo la simulación*). (*b*) Construir la forma de onda pulsada en PSpice para modelar la forma de onda de la corriente i_C del ejercicio 53 y graficarla por medio de Probe.

101. (*a*) Bosquejar la tensión v_R de la resistencia del circuito de la figura 8.127 como respuesta a una forma de onda pulsada $v_S(t)$. El valor mínimo de $v_S(t)$ es 0 V, su máximo es de 3 V, el ancho del pulso es de 2 s y el periodo es de 5 s. Limitar el bosquejo a $0 \leq t < 20$ s. (*b*) Verificar el bosquejo realizando la simulación apropiada con PSpice.



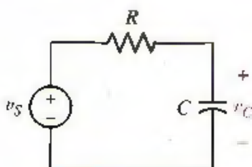
■ **FIGURA 8.127**

102. (*a*) Graficar la corriente *i* del inductor del circuito de la figura 8.128 como respuesta a una forma pulsada $v_S(t)$. El valor mínimo de $v_S(t)$ es 0 V, su máximo es 5 V, el ancho del pulso es de 5 s y el periodo es de 5.5 s. Limitar el bosquejo a $0 \leq t < 20$ s. (*b*) Verificar el bosquejo realizando la simulación apropiada con PSpice.



■ **FIGURA 8.128**

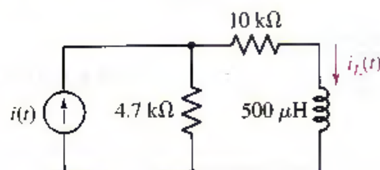
103. La fuente de tensión v_S de la figura 8.129 es una fuente pulsada que tiene un valor mínimo de 2 V, un valor máximo de 10 V y un ancho de pulso de 4 *RC*. Dibujar la tensión del capacitor si el tiempo entre pulsos de v_S es (*a*) 0.1 *RC*; (*b*) *RC*; (*c*) 10 *RC*.



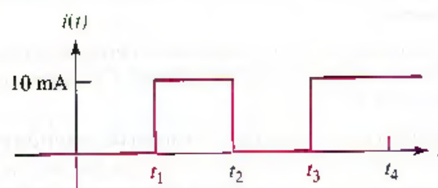
■ **FIGURA 8.129**

104. Con referencia al circuito de la figura 8.130, dibujar $i_L(t)$ en un periodo de $0 \leq t \leq t_4$ si $i(t)$ es como se muestra en la figura 8.131.

(*a*)	(*b*)	(*c*)
$t_1 = 4$ ns	$t_1 = 150$ ns	$t_1 = 150$ ns
$t_2 = 160$ ns	$t_2 = 300$ ns	$t_2 = 200$ ns
$t_3 = 164$ ns	$t_3 = 450$ ns	$t_3 = 350$ ns
$t_4 = 200$ ns	$t_4 = 500$ ns	$t_4 = 400$ ns



■ FIGURA 8.130



■ FIGURA 8.131

CAPÍTULO

9 Circuito *RLC*

CONCEPTOS CLAVE

Frecuencia de resonancia y factor de amortiguamiento de circuitos *RLC* en serie y en paralelo.

Respuesta sobreamortiguada.

Respuesta críticamente amortiguada.

Respuesta subamortiguada.

Respuesta completa (natural + forzada) de circuitos *RLC*.

Representación de ecuaciones diferenciales mediante circuitos con amp ops.

INTRODUCCIÓN

El análisis de los capítulos anteriores se enfocó exclusivamente en circuitos resistivos *ya sea con* capacitores o con inductores, pero no con ambos. La presencia de inductancia y capacitancia en el mismo circuito produce al menos un *sistema de segundo orden,* que está constituido por una ecuación diferencial que incluye una derivada de segundo orden, o dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Este aumento de orden hace necesario evaluar dos constantes arbitrarias. Además, se requerirá determinar condiciones iniciales de las derivadas. Se verá que tales circuitos, denominados a menudo como circuitos *RLC* no sólo aparecen con mucha frecuencia en la práctica, sino que también resultan modelos bastante buenos para otros tipos de sistemas. Por ejemplo, se emplea un circuito *RLC* como modelo para el sistema de suspensión de un automóvil, el comportamiento de un controlador de temperatura utilizado en el crecimiento de cristales semiconductores e incluso para la respuesta de un avión a los controles del timón de altitud y el alerón.

9.1 CIRCUITO EN PARALELO SIN FUENTE

La primera tarea consiste en determinar la respuesta natural, que también en este caso se lleva a cabo de un modo más conveniente al considerar el circuito sin fuente. Luego se podrían incluir fuentes de cd, interruptores o fuentes de escalón en el circuito que de nuevo representen la respuesta total como la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada.

Se comenzará con el cálculo de la respuesta natural de un circuito simple que se forma al conectar *R*, *L* y *C* en paralelo. Esta combinación particular de elementos ideales genera un modelo adecuado para secciones de muchas redes de comunicación; representa, por ejemplo, una parte importante de algunos amplificadores electrónicos que se encuentran en cualquier receptor de radio, la cual

permite que los amplificadores produzcan una gran amplificación de tensión sobre una banda estrecha de frecuencias de señales con una amplificación casi nula fuera de esta banda. La selectividad de frecuencia de este tipo permite escuchar la transmisión de una estación, al mismo tiempo que se rechaza la transmisión de cualquier otra. Otras aplicaciones incluyen el uso de circuitos *RLC* en paralelo en el multiplexaje y en los filtros de supresión de armónicas. Sin embargo, incluso un análisis simple de estos principios requiere una comprensión de términos como *resonancia, respuesta en frecuencia* e *impedancia,* que aún no se han explicado. Sin embargo, basta decir que la comprensión del comportamiento natural de los circuitos *RLC* en paralelo resulta demasiado importante para estudios futuros de redes de comunicaciones y para diseño de filtros, así como para muchas otras aplicaciones.

Cuando un capacitor *físico* se conecta en paralelo con un inductor y el capacitor tiene asociada una resistencia finita, se demuestra que la red resultante tiene un modelo de circuito equivalente como el de la figura 9.1. La presencia de esta resistencia se usa para simular las pérdidas de energía en el capacitor; además, todos los capacitores reales se descargarán a la larga, incluso si se desconectan de un circuito. Las pérdidas de energía en el inductor físico también se toman en cuenta mediante la adición de una resistencia ideal (en serie con el inductor ideal). Sin embargo, por simplicidad se restringe el análisis al caso de un inductor ideal en paralelo con un capacitor "con fugas".

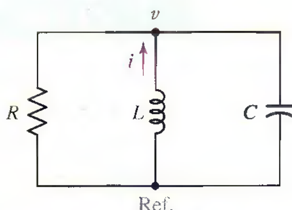


FIGURA 9.1 Circuito *RLC* en paralelo sin fuente.

Deducción de la ecuación diferencial de un circuito *RLC* en paralelo

En el siguiente análisis se supondrá que, inicialmente, se podría almacenar la energía en el inductor y en el capacitor; en otras palabras, se presentarían valores iniciales distintos de cero tanto de la corriente del inductor como de la tensión del capacitor. Con base en la figura 9.1 como referencia, se escribiría la ecuación nodal simple

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - i(t_0) + C\frac{dv}{dt} = 0 \qquad [1]$$

Se puede observar que el signo menos es consecuencia de la dirección supuesta de *i*. Se debe resolver la ecuación [1] sujeta a las condiciones iniciales

$$i(0^+) = I_0 \qquad [2]$$

y

$$v(0^+) = V_0 \qquad [3]$$

Cuando ambos lados de la ecuación [1] se diferencian una vez con respecto al tiempo, el resultado consiste en una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \qquad [4]$$

cuya solución $v(t)$ es la respuesta natural deseada.

Solución de la ecuación diferencial

Hay varias formas interesantes de resolver la ecuación [4]. La mayoría de tales métodos se dejarán para un curso de ecuaciones diferenciales, así que se elige sólo el método más rápido y simple para aplicarlo ahora. Se supondrá una solución, confiando en la intuición y modesta experiencia para solucionar una de las varias formas posibles que resultan adecuadas. La experiencia que se tiene con las ecuaciones

de primer orden quizás sugiera que al menos se deba probar una vez más la forma exponencial. Así, *se supondrá* que

$$v = Ae^{st} \quad [5]$$

que es la forma más general posible y que permite que A y s sean números complejos, en caso de ser necesario. Al sustituir la ecuación [5] en la ecuación [4] se obtiene

$$CAs^2e^{st} + \frac{1}{R}Ase^{st} + \frac{1}{L}Ae^{st} = 0$$

o

$$Ae^{st}\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}\right) = 0$$

Para que se satisfaga esta ecuación todo el tiempo, al menos uno de los tres factores debe ser cero. Si cualquiera de los primeros dos factores se iguala a cero, entonces $v(t) = 0$. Ésta es una solución trivial de la ecuación diferencial que no puede satisfacer las condiciones iniciales dadas. Por lo tanto, se iguala a cero el factor restante:

$$Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0 \quad [6]$$

Los matemáticos suelen denominar a esta expresión *ecuación auxiliar* o ***ecuación característica***, tema que se explica en la sección 8.1. Si es posible satisfacerla, entonces es correcta la solución supuesta. Puesto que la ecuación [6] es cuadrática, hay dos soluciones identificadas como s_1 y s_2:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad [7]$$

y

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad [8]$$

Si *cualquiera* de estos dos valores se usa para s en la solución supuesta, entonces la solución satisface la ecuación diferencial dada; de tal modo ésta se convierte en una solución válida de la ecuación diferencial.

Suponga que se sustituye s por s_1 en la ecuación [5], con lo cual se obtiene

$$v_1 = A_1 e^{s_1 t}$$

y, de manera similar,

$$v_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

La primera satisface la ecuación diferencial

$$C\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}v_1 = 0$$

y la última satisface

$$C\frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L}v_2 = 0$$

Si se suman estas dos ecuaciones diferenciales y se combinan términos semejantes, se obtiene

$$C\frac{d^2(v_1 + v_2)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + \frac{1}{L}(v_1 + v_2) = 0$$

Prevalece la linealidad y se observa que la *suma* de ambas soluciones también es una solución. De este modo, la forma general de la respuesta natural es

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad [9]$$

donde s_1 y s_2 están dadas por las ecuaciones [7] y [8]; A_1 y A_2 son dos constantes arbitrarias que se deben seleccionar para satisfacer las dos condiciones iniciales especificadas.

Definición de términos de frecuencia

La forma de la respuesta natural, como se da en la ecuación [9], ofrece poca información acerca de la naturaleza de la curva que se podría obtener si $v(t)$ se graficara como una función del tiempo. Las amplitudes relativas de A_1 y A_2, por ejemplo, serán en verdad importantes para determinar la forma de la curva de respuesta. Además, las constantes s_1 y s_2 son números reales o números complejos conjugados, lo cual depende de los valores de *R*, *L* y *C* en la red dada. Estos dos casos producirán formas de respuesta fundamentalmente diferentes. Por lo tanto, será útil efectuar algunas sustituciones simplificatorias en la ecuación [9].

En razón de que los exponentes $s_1 t$ y $s_2 t$ deben ser adimensionales, resulta necesario que s_1 y s_2 tengan las unidades de alguna cantidad adimensional "por segundo". Así, en las ecuaciones [7] y [8] se observa que las unidades de $1/2RC$ y $1/\sqrt{LC}$ deben también ser s^{-1} (es decir, segundos^{-1}). Las unidades de este tipo se llaman ***frecuencias***.

Se define un nuevo término, ω_0 (**omega subíndice cero o sólo omega cero**):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad [10]$$

y se reserva para éste el término ***frecuencia resonante***. Por otro lado, se conocerá como $1/2RC$ a la ***frecuencia de Neper*** o el ***coeficiente de amortiguamiento exponencial***, y se representará mediante el símbolo α (alfa):

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad [11]$$

Esta última expresión descriptiva se usa debido a que α es una medida de lo rápido que decae o se amortigua la respuesta natural hasta su valor final permanente (a menudo cero). Por último, s, s_1 y s_2, que son cantidades que formarán las bases de nuestro trabajo posterior, se denominan ***frecuencias complejas***.

Se debe advertir que s_1, s_2, α y ω_0 sólo son símbolos utilizados sólo para simplificar el análisis de los circuitos *RLC* no son nuevas propiedades misteriosas de ningún tipo. Es más fácil, por ejemplo, decir "*alfa*" que "*el recíproco de 2RC*".

Se deben poner juntos estos resultados, en cuyo caso la respuesta natural del circuito *RLC* en paralelo es

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad [9]$$

donde:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad [12]$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad [13]$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad [11]$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad [10]$$

y A_1 y A_2 deben determinarse aplicando las condiciones iniciales dadas.

Se pueden observar dos escenarios básicos posibles en las ecuaciones [12] y [13] en función de los tamaños relativos de α y ω_0 ((los cuales están determinados por los valores de R, L y C). Si $\alpha > \omega_0$, s_1 y s_2 serán números reales, lo que conduce a lo que se conoce como ***respuesta sobreamortiguada***. En el caso contrario, donde $\alpha < \omega_0$, tanto s_1 como s_2 tendrán componentes imaginarios diferentes de cero, lo que conduce a lo que se conoce como ***respuesta subamortiguada***. Ambas situaciones se consideran por separado en las secciones siguientes, junto con el caso especial en el que $\alpha = \omega_0$, que lleva a lo que se conoce como ***respuesta críticamente amortiguada***. Se debe observar también que la respuesta general comprendida en las ecuaciones [9] a [13] describe no solamente la tensión sino también las tres corrientes en las ramas del circuito *RLC* en paralelo; desde luego, las constantes A_1 y A_2 serán diferentes entre sí.

Los ingenieros de sistemas de control conocen la proporción entre α y ω_0 como razón de amortiguamiento, y la designan mediante el símbolo ζ (zeta).

EJEMPLO 9.1

Considerar un circuito *RLC* en paralelo que tiene una inductancia de 10 mH y una capacitancia de 100 μF. Determinar los valores de resistencia que llevarían a que el circuito tuviera una respuesta sobreamortiguada y subamortiguada.

Primero se calcula la frecuencia de resonancia del circuito:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3})(100 \times 10^{-6})}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

Se tendrá una respuesta *sobreamortiguada* si $\alpha > \omega_0$; una *subamortiguada* si $\alpha < \omega_0$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2RC} > 10^3$$

por lo que

$$R < \frac{1}{(2\,000)(100 \times 10^{-6})}$$

o

$$R < 5\ \Omega$$

conduce a una respuesta sobreamortiguada; $R > 5\ \Omega$ conduce a una respuesta subamortiguada.

PRÁCTICA

9.1 Un circuito *RLC* en paralelo contiene una resistencia de 100 Ω con valores de parámetros $\alpha = 1000\ \text{s}^{-1}$ y $\omega_0 = 800$ rad/s. Determinar: (*a*) C; (*b*) L; (*c*) s_1; (*d*) s_2.

Respuestas: 5 μF; 312.5 mH; $-400\ \text{s}^{-1}$; $-1\,600\ \text{s}^{-1}$.

9.2 CIRCUITO *RLC* EN PARALELO SOBREAMORTIGUADO

Una comparación de las ecuaciones [10] y [11] muestra que α será mayor que ω_0 si $LC > 4R^2C^2$. En este caso, el radical utilizado en el cálculo de s_1 y s_2 será real, así que s_1 y s_2 también lo serán. Además, las siguientes desigualdades

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

$$\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) < \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) < 0$$

se aplicarían a las ecuaciones [12] y [13] para mostrar que tanto s_1 como s_2 son números reales *negativos*. De tal manera, la respuesta $v(t)$ se expresa como la suma algebraica de dos términos exponenciales decrecientes que tienden a cero cuando aumenta el tiempo. En realidad, puesto que el valor absoluto de s_2 es mayor que el de s_1, el término que contiene a s_2 tiene una tasa de reducción más rápida, y para valores de tiempo grandes la expresión límite se escribiría como

$$v(t) \rightarrow A_1 e^{s_1 t} \rightarrow 0 \text{ como } t \rightarrow \infty$$

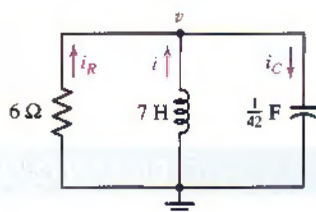


FIGURA 9.2 Circuito *RLC* en paralelo utilizado como ejemplo numérico. El circuito está sobreamortiguado.

El siguiente paso consiste en determinar las constantes arbitrarias A_1 y A_2 según las condiciones iniciales. Se elige un circuito *RLC* en paralelo con $R = 6\ \Omega$, $L = 7$ H y, para simplificar el cálculo, $C = \frac{1}{42}$ F. El almacenamiento de energía inicial se especifica mediante una tensión inicial en el circuito $v(0) = 0$ y una corriente de inductor inicial $i(0) = 10$ A, donde v y i se definen en la figura 9.2.

Se determinarían con facilidad los valores de varios parámetros

$$\begin{array}{ll} \alpha = 3.5 & \omega_0 = \sqrt{6} \\ s_1 = -1 & s_2 = -6 \end{array} \quad (\text{todo } s^{-1})$$

y de inmediato se escribiría la forma general de la respuesta natural:

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \qquad [14]$$

Cálculo de los valores de A_1 y A_2

Sólo resta la evaluación de las dos constantes A_1 y A_2. Si se conociera la respuesta $v(t)$ en dos valores diferentes del tiempo, tales valores podrían sustituirse en la ecuación [14], de modo que A_1 y A_2 se determinarían sin ningún problema. Sin embargo, se conoce sólo un valor instantáneo de $v(t)$,

$$v(0) = 0$$

y, por lo tanto,

$$0 = A_1 + A_2 \qquad [15]$$

Se puede obtener una segunda ecuación que relaciona A_1 y A_2 si se toma la derivada de $v(t)$ con respecto al tiempo en la ecuación [14], se determina el valor inicial de la derivada mediante el uso de la condición inicial restante $i(0) = 10$ y se igualan los resultados. De esta forma, al derivar ambos lados de la ecuación [14] se tiene

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{-6t}$$

y al evaluar la derivada en $t = 0$,

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -A_1 - 6A_2$$

se obtiene una segunda ecuación. Si bien esta forma parece ser útil, no se tiene un valor numérico del valor inicial de la derivada, por lo que no se dispone todavía de dos ecuaciones con dos incógnitas. . . ¿O sí? La expresión dv/dt sugiere una corriente de capacitor, puesto que

$$i_C = C\frac{dv}{dt}$$

La ley de Kirchhoff de corriente debe cumplirse en cualquier instante de tiempo, ya que se fundamenta en la conservación de electrones. De tal modo, se podría escribir

$$-i_C(0) + i(0) + i_R(0) = 0$$

Al sustituir nuestra expresión para la corriente del capacitor y al dividir entre C, se tiene

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i(0) + i_R(0)}{C} = \frac{i(0)}{C} = 420 \text{ V/s}$$

puesto que la tensión inicial cero en la resistencia requiere de una corriente inicial cero a través de ella. En consecuencia, se tiene la segunda ecuación,

$$420 = -A_1 - 6A_2 \qquad [16]$$

y la solución simultánea de las ecuaciones [15] y [16] proporciona dos amplitudes $A_1 = 84$ y $A_2 = -84$. Por lo tanto, la solución numérica final de la respuesta natural de este circuito es

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t}) \text{ V} \qquad [17]$$

En las demás explicaciones relativas a los circuitos *RLC* siempre se requerirán dos condiciones iniciales para especificar totalmente la respuesta. Una de ellas casi siempre será muy fácil de aplicar, ya sea una tensión o una corriente en $t = 0$. La segunda condición suele provocar un poco de problemas. Aunque a menudo se tendrá a disposición una corriente inicial, una de ellas se necesitará aplicar de manera indirecta a través de la derivada de la solución supuesta.

EJEMPLO 9.2

Encontrar una expresión válida de $v_C(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura 9.3*a*.

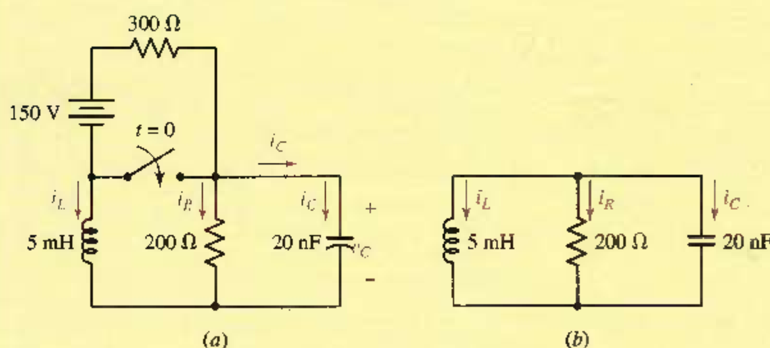


FIGURA 9.3 (*a*) Circuito *RLC* que se convierte en uno sin fuente en $t = 0$. (*b*) El circuito en $t > 0$, en el que la fuente de 150 V y la resistencia de 300 Ω se han cortocircuitado por medio del interruptor, por lo que no son relevantes para v_C.

Identificar el objetivo del problema.

Se solicita encontrar la tensión en el capacitor después de que se dispara el interruptor. Esta acción trae como consecuencia que ninguna fuente permanezca conectada al inductor o al capacitor; por lo tanto, se espera que el valor de v_C decaiga con el tiempo.

(Continúa en la siguiente página)

▶ *Recopilar la información conocida.*
Después de que se dispara el interruptor, el capacitor se deja en paralelo con una resistencia de 200 Ω y un inductor de 5 mH (figura 9.3*b*). Por ende, $\alpha = 1/2RC =$ 125 000 s^{-1}, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 100\,000$ rad/s, $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -50\,000\ s^{-1}$ y $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -200\,000\ s^{-1}$.

▶ *Elegir la técnica disponible que se ajusta más al problema.*
Puesto que $\alpha > \omega_0$, el circuito está sobreamortiguado, por lo que se espera una tensión en el capacitor de la forma,

$$v_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

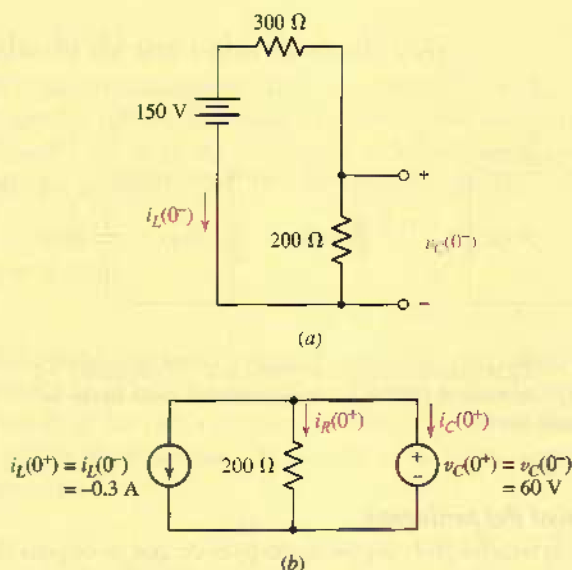
Se conoce el valor de s_1 y s_2; es necesario obtener y solicitar dos condiciones iniciales a fin de determinar A_1 y A_2. Para llevar a cabo esta tarea se analizará el circuito en $t = 0^-$ (figura 9.4*a*) para encontrar $i_L(0^-)$ y $v_C(0^-)$. Se analizará entonces el circuito en $t = 0^+$ suponiendo que ninguno de los valores se modifica.

▶ *Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.*
A partir de la ecuación 9.4*a*, en la que se sustituyó el inductor con un cortocircuito y el capacitor con un circuito abierto, se puede observar que

$$i_L(0^-) = -\frac{150}{200 + 300} = -300\ \text{mA}$$

y

$$v_C(0^-) = 150\frac{200}{200 + 300} = 60\ \text{V}$$



■ **FIGURA 9.4** (*a*) Circuito equivalente en $t = 0^-$. (*b*) Circuito equivalente en $t = 0^+$, que se dibujó utilizando fuentes ideales para representar la corriente inicial en el inductor y la tensión inicial en el capacitor.

En la figura 9.4*b* se dibuja el circuito en $t = 0^+$, que, por simplicidad, representa la corriente en el inductor y la tensión en el capacitor con fuentes ideales. Puesto que ninguno puede cambiar en un tiempo cero, se sabe que $v_C(0^+) = 60$ V.

Determinar si se requiere información adicional.
Se tiene la ecuación de la tensión del capacitor: $v_C(t) = A_1e^{-50\,000t} + A_2e^{-200\,000t}$. Se sabe que $v_C(0) = 60$ V, pero aún se requiere una tercera ecuación. Derivando la ecuación que expresa la tensión en el capacitor,

$$\frac{dv_C}{dt} = -\,50000A_1e^{-50\,000t} - 200\,000A_2e^{-200\,000t}$$

que puede relacionarse con la corriente en el capacitor como $i_C = C(dv_C/dt)$. Regresando a la figura 9.4*b*, mediante LKC se sabe que $i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0.3 - \{v_C(0^+)/200\} = 0$.

Intentar resolver.
Mediante la aplicación de la primera condición inicial, se obtiene

$$v_C(0) = A_1 + A_2 = 60$$

y, por medio de la aplicación de la segunda condición inicial se obtiene,

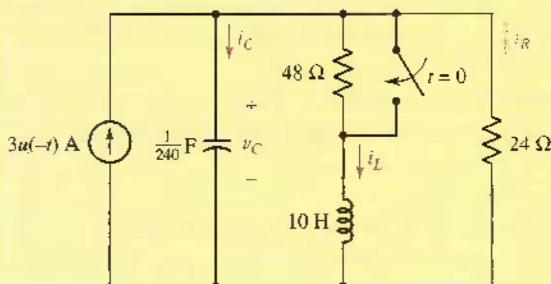
$$i_c(0) = -20 \times 10^{-9}(50000A_1 + 200\,000A_2) = 0$$

Despejando, $A_1 = 80$ V y $A_2 = -20$ V, por lo que $v_c(t) = 80e^{-50\,000t} - 20_e{}^{-200\,000t}$ V, $t > 0$.

Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?
Al menos, es posible checar la solución en $t = 0$, verificando que $v_C(0) = 60$ V. Derivando y multiplicando por 20×10^{-9}, se puede también constatar que $i_C(0) = 0$.

PRÁCTICA

9.2 Después de estar abierto durante mucho tiempo, el interruptor de la figura 9.5 se cierra en $t = 0$. Determinar (*a*) $i_L(0^-)$; (*b*) $v_C(0^-)$; (*c*) $i_R(0^+)$; (*d*) $i_C(0^+)$; (*e*) $v_C(0.2)$.



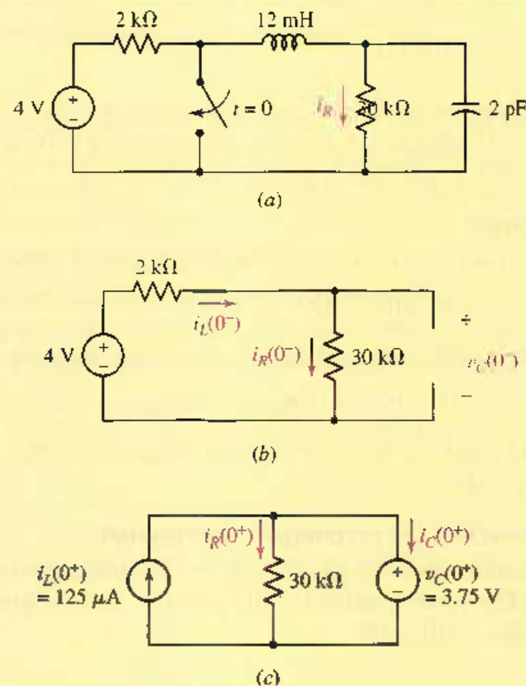
■ **FIGURA 9.5**

Respuestas: 1 A; 48 V; 2 A; −3 A; −17.54 V.

Como se observó antes, la forma de la respuesta sobreamortiguada se aplica a cualquier cantidad de tensión o corriente, como se estudiará en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9.3

El circuito de la figura 9.6*a* se puede simplificar a un circuito *RLC* en paralelo después de $t = 0$. Determinar la expresión de la corriente i_R de la resistencia que sea válida para cualquier tiempo.



■ **FIGURA 9.6** (*a*) Circuito para el que se requiere de i_R. (*b*) Circuito equivalente de $t = 0^-$. (*c*) Circuito equivalente de $t = 0^+$.

Si el circuito después de $t > 0$ es sobreamortiguado, se espera una respuesta de la forma

$$i_R(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \qquad t > 0 \qquad [18]$$

Para $t > 0$, se tiene un circuito *RLC* en paralelo con $R = 30\ \text{k}\Omega$, $L = 12$ mH y $C = 2$ pF. Así, $\alpha = 8.333 \times 10^6\ \text{s}^{-1}$ y $\omega_0 = 6.455 \times 10^6$ rad/s. Por lo tanto, se espera una respuesta sobreamortiguada con $s_1 = -3.063 \times 10^6\ \text{s}^{-1}$ y $s_2 = -13.60 \times 10^6\ \text{s}^{-1}$.

Para determinar los valores numéricos de A_1 y A_2, primero se analiza el circuito en $t = 0^-$, como se puede ver en la figura 9.6*b*. Se observa que $i_L(0^-) = i_R(0^-) = 4/32 \times 10^3 = 125\ \mu\text{A}$, y $v_C(0^-) = 4 \times 30/32 = 3.75\text{V}$.

Al dibujar el circuito en $t = 0^+$ (figura 9.6*c*), sólo se sabe que $i_L(0^+) = 125\ \mu\text{A}$ y $v_C(0^+) = 3.75$ V. Sin embargo, por medio de la ley de Ohm se puede calcular $i_R(0^+) = 3.75/30 \times 10^3 = 125\ \mu\text{A}$, la primera condición inicial. Así,

$$i_R(0) = A_1 + A_2 = 125 \times 10^{-6} \qquad [19]$$

¿Cómo se obtiene una segunda condición inicial? Si se multiplica la ecuación [18] por 30×10^3, se obtiene una expresión para $v_C(t)$. Si se calcula la derivada y se multiplica por 2 pF se obtiene la expresión de $i_C(t)$:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = (2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t})$$

Por medio de LKC,

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0$$

Por lo tanto,

$$-(2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(3.063 \times 10^6 A_1 + 13.60 \times 10^6 A_2) = 0 \qquad [20]$$

Resolviendo las ecuaciones [19] y [20], se tiene que $A_1 = 161.3\ \mu$A y $A_2 = -36.34\ \mu$A. Por ende,

$$i_R = \begin{cases} 125\ \mu\text{A}, & t < 0 \\ 161.3e^{-3.063\times10^6 t} - 36.34e^{-13.6\times10^6 t}\ \mu\text{A}, & t > 0 \end{cases}$$

PRÁCTICA

9.3 Determinar la corriente i_R que circula por la resistencia de la figura 9.7 para $t > 0$ si $i_L(0^-) = 6$ A y $v_C(0^+) = 0$ V. No se sabe cuál era la configuración del circuito antes de $t = 0$.

Respuesta: $i_R(t) = 6.008(e^{-8.328\times10^{10}t} - e^{-6.003\times10^{7}t})$ A, $t > 0$.

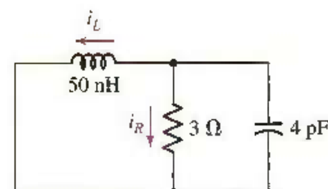


FIGURA 9.7 Circuito del problema de práctica 9.3.

Representación gráfica de la respuesta sobreamortiguada

Se regresa ahora a la ecuación [17] y se observa la información adicional que se puede determinar respecto de este circuito. Se puede interpretar el primer término exponencial como si tuviera una constante de tiempo de 1 s, y la otra exponencial, como si la tuviera $\frac{1}{6}$ de s. Cada uno empieza con amplitud unitaria, aunque el último decae con mayor rapidez; $v(t)$ nunca es negativa. Cuando el tiempo se vuelve infinito, cada término tiende a cero, y la respuesta misma se desvanece, como debe ser. Por lo tanto, se tiene una curva de respuesta que es cero en $t = 0$, cero en $t = \infty$, y nunca es negativa; puesto que no es cero en todos lados, debe poseer al menos un máximo, el cual no es un punto difícil de determinar con exactitud. Se deriva la respuesta:

$$\frac{dv}{dt} = 84(-e^{-t} + 6e^{-6t})$$

se iguala la derivada a cero para determinar el tiempo t_m con el cual la tensión se vuelve máxima:

$$0 = -e^{-t_m} + 6e^{-6t_m}$$

simplificando,

$$e^{5t_m} = 6$$

y se obtiene

$$t_m = 0.358 \text{ s}$$

y

$$v(t_m) = 48.9 \text{ V}$$

Se puede elaborar un dibujo razonable de la respuesta graficando los dos términos exponenciales $84e^{-t}$ y $84e^{-6t}$ para después tomar su diferencia. La utilidad de esta técnica se indica mediante las curvas de la figura 9.8; las dos exponenciales corresponden a trazas delgadas, y su diferencia, la respuesta total $v(t)$, se dibuja como una traza a color. Las curvas verifican también que el comportamiento funcional de $v(t)$ para t es muy grande, de $84e^{-t}$, el término exponencial contiene la magnitud más pequeña de s_1 y s_2.

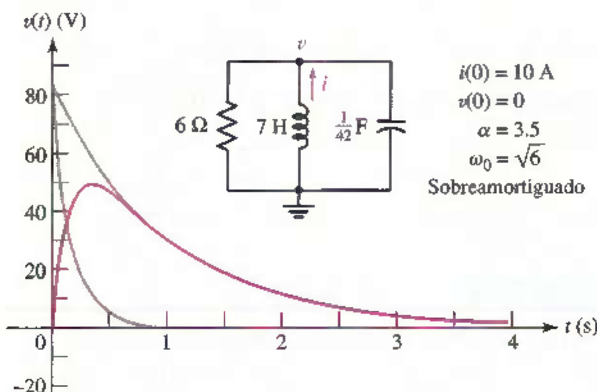


FIGURA 9.8 Respuesta $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$ de la red que se muestra en la figura 9.2.

Una pregunta que se plantea con frecuencia se refiere al tiempo que transcurre en realidad para que desaparezca (o se "*amortigüe*") la parte transitoria de la respuesta. En la práctica, muchas veces resulta deseable conseguir que esta respuesta transitoria tienda a cero tan rápido como sea posible; esto es, se debe minimizar el ***establecimiento del tiempo*** t_s. En teoría, desde luego, t_s es infinito debido a que $v(t)$ nunca se establece como cero en un tiempo finito. Sin embargo, una respuesta despreciable se presenta luego de que se estableció la magnitud de $v(t)$ en valores que permanecen menores a 1% de su valor absoluto máximo $|v_m|$. Se define el tiempo que se requiere para que esto ocurra como el tiempo de establecimiento. Puesto que $|v_m| = v_m = 48.9$ V en el ejemplo, el tiempo de establecimiento es el necesario para que la respuesta disminuya hasta 0.489 V. Al sustituir este valor de $v(t)$ en la ecuación [17] e ignorar el segundo término exponencial, que se sabe que es posible omitir en este caso, se encuentra que el tiempo de establecimiento corresponde a 5.15 s.

EJEMPLO 9.4

En $t > 0$, la corriente que circula por un capacitor de un cierto circuito *RLC* en paralelo sin fuente está dada por $i_C(t) = 2e^{-2t} - 4e^{-t}$ A. Graficar la corriente en el rango $0 < t < 5$ s y determinar el tiempo de establecimiento.

Primero se grafican los dos términos, como se muestra en la figura 9.9, y luego se restan para encontrar $i_C(t)$. Es claro que el valor máximo es $|-2| = 2$ A. Por lo tanto, es necesario encontrar el tiempo en el que $|i_C|$ ha disminuido a 20 mA, o

$$2e^{-2t_s} - 4e^{-t_s} = -0.02 \qquad [21]$$

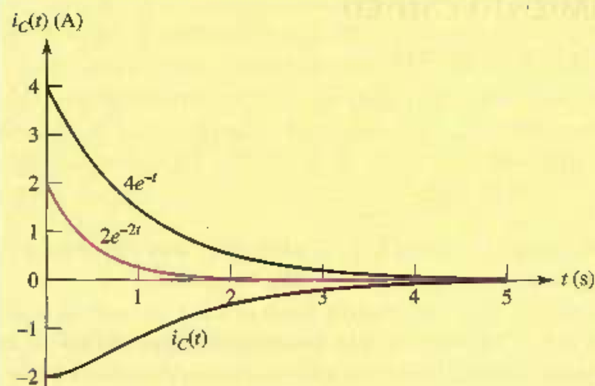


FIGURA 9.9 La respuesta de corriente $i_C(t) = 2e^{-2t} - 4e^{-t}$ A, dibujada junto con sus dos componentes.

Esta ecuación puede resolverse por medio de una rutina iterativa de solución en una calculadora científica, que proporciona la solución $t_s = 5.296$ s. Sin embargo, si dicha opción no se encuentra disponible, se puede aproximar la ecuación [21] para $t \geq t_s$ como

$$-4e^{-t_s} = -0.02 \qquad [22]$$

Resolviendo,

$$t_s = -\ln\left(\frac{0.02}{4}\right) = 5.298 \text{ s} \qquad [23]$$

lo cual representa un resultado razonablemente cercano (mejor a 0.1% en exactitud) a la solución exacta.

PRÁCTICA

9.4 (*a*) Graficar la tensión $v_R(t) = 2e^{-t} - 4e^{-3t}$ V en el intervalo de $0 < t < 5$ s. (*b*) Estimar el tiempo de establecimiento. (*c*) Calcular el valor máximo positivo y el tiempo en el que éste se presenta.

Respuesta: (*a*) Vea la figura 9.10; (*b*) 4.605 s; (*c*) 544 mV, 896 ms.

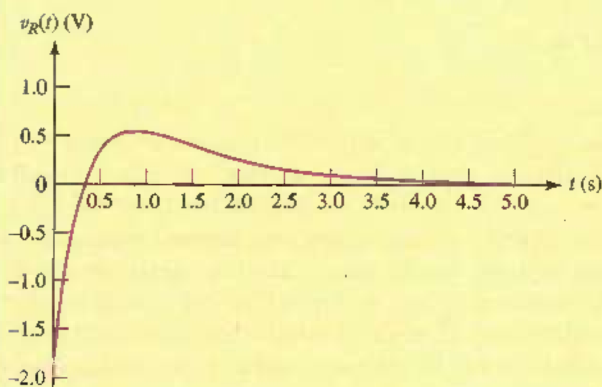


FIGURA 9.10 Gráfica de la respuesta del problema de práctica 9.4*a*.

9.3 AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO

El caso sobreamortiguado se caracteriza por

$$\alpha > \omega_0$$

o

$$LC > 4R^2C^2$$

y da lugar a valores reales negativos para s_1 y s_2, además de una respuesta expresada como la suma algebraica de dos exponenciales negativas.

"Imposible" es un término bastante fuerte. Se afirma lo anterior debido a que en la práctica resulta inusual obtener componentes que estén más cerca de 1% de sus valores especificados. De tal manera, obtener *L precisamente igual a* $4R^2C$ resulta en teoría posible, aunque no muy probable, incluso si se está dispuesto a medir una gaveta llena de componentes hasta que se encuentren los correctos.

Se ajustan ahora los valores de los elementos hasta que α y ω_0 sean iguales. Es un caso muy especial que recibe el nombre de ***amortiguamiento crítico***. Si se tratara de construir un circuito *RLC* en paralelo que estuviera críticamente amortiguado, se intentaría una tarea en esencia imposible, pues nunca se podría lograr que α fuera exactamente igual a ω_0. Sin embargo, para completar el tema se explicará el circuito críticamente amortiguado, ya que muestra una transición interesante entre el sobreamortiguamiento y el subamortiguamiento.

El amortiguamiento crítico se obtiene cuando

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \omega_0 \\ LC &= 4R^2C^2 \\ L &= 4R^2C \end{aligned}\right\} \text{ amortiguamiento crítico}$$

o

Se logra un amortiguamiento crítico al cambiar el valor de cualquiera de los tres elementos del ejemplo numérico que se expuso al principio de la sección 9.1. Se elegirá R y se aumentará su valor hasta que se obtenga el amortiguamiento crítico, y luego, se dejará a ω_0 inalterada. El valor necesario de R es $7\sqrt{6}/2\ \Omega$; L sigue siendo 7 H y C se mantiene en $\frac{1}{42}$ F. Así, se tiene que

$$\alpha = \omega_0 = \sqrt{6}\ \text{s}^{-1}$$

$$s_1 = s_2 = -\sqrt{6}\ \text{s}^{-1}$$

y recuerde las condiciones iniciales que se especificaron, $v(0) = 0$ e $i(0) = 10$ A.

Forma de una respuesta críticamente amortiguada

Se procede a tratar de construir una respuesta como la suma de dos exponenciales,

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_1 e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

la cual se podría escribir como

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_3 e^{-\sqrt{6}t}$$

En este punto, alguien se podría sentir perdido. Se tiene una respuesta que contiene sólo una constante arbitraria, pero hay dos condiciones iniciales, $v(0) = 0$ e $i(0) = 10$ amperes, y *ambas* deben ser satisfechas por esta constante. Si se elige $A_3 = 0$, entonces $v(t) = 0$, lo cual resulta congruente con la tensión inicial del capacitor. Sin embargo, aunque no hay energía almacenada en el capacitor en $t = 0^+$, se tiene 350 J de energía almacenada inicialmente en el inductor, la cual originará una corriente transitoria que fluirá hacia fuera del inductor y propiciará una tensión distinta de cero en los tres elementos. Lo anterior parece estar en conflicto directo con la solución propuesta.

Los cálculos matemáticos y planteamientos eléctricos fueron intachables; por lo tanto, si no ha sido un error lo que provocó las dificultades, se debió haber empezado con un supuesto incorrecto, y sólo se formuló uno. Se infiere al principio que la ecuación diferencial podría resolverse suponiendo una solución exponencial, lo cual resultó incorrecto para este caso especial simple de amortiguamiento crítico. Cuando $\alpha = \omega_0$, la ecuación diferencial, ecuación [4], se convierte en:



$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + \alpha^2 v = 0$$

La solución de esta ecuación no es un proceso muy complejo, pero no se va a desarrollar aquí, ya que es de tipo normal y se encuentra en los textos comunes de ecuaciones diferenciales. La solución es:

$$v = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2) \quad [24]$$

Debe observarse que la solución sigue expresándose como la suma de dos términos, donde uno es la familiar exponencial negativa y el otro es t veces una exponencial negativa. Se puede observar que la solución contiene las *dos* constantes arbitrarias esperadas.

Cálculo de los valores de A_1 y A_2

Se completará el ejemplo numérico. Luego de sustituir el valor conocido de α en la ecuación [24], se obtiene

$$v = A_1 te^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

y se establecen los valores de A_1 y A_2 al imponer primero las condiciones iniciales sobre la propia $v(t)$, $v(0) = 0$; de tal modo, $A_2 = 0$. Este simple resultado aparece debido a que se eligió como nulo el valor inicial de la respuesta $v(t)$; el caso más general requerirá la solución simultánea de dos ecuaciones. La segunda condición inicial debe aplicarse a la derivada dv/dt exactamente como en el caso sobreamortiguado. Por lo tanto, se deriva recordando que $A_2 = 0$:

$$\frac{dv}{dt} = A_1 t(-\sqrt{6})e^{-\sqrt{6}t} + A_1 e^{-\sqrt{6}t}$$

se evalúa en $t = 0$:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = A_1$$

y se expresa la derivada en términos de la corriente inicial en el capacitor:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_R(0)}{C} + \frac{i(0)}{C}$$

donde las direcciones de referencia de i_C, i_R e i son las definidas en la figura 9.2. En consecuencia,

$$A_1 = 420 \text{ V}$$

La respuesta es, por lo tanto:

$$v(t) = 420te^{-2.45t} \text{ V} \quad [25]$$

Representación gráfica de la respuesta críticamente amortiguada

Antes de graficar en detalle esta respuesta, se tratará de anticipar otra vez su forma mediante un razonamiento cualitativo. El valor inicial especificado es cero, que coincide con la ecuación [25]. No se manifiesta de inmediato que la respuesta tienda también a cero cuando t se vuelve infinitamente grande, debido a que $te^{-2.45t}$ es una forma indeterminada. Sin embargo, este obstáculo se supera con facilidad mediante el empleo de la regla de L'Hôpital, la cual establece que

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 420 \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{2.45t}} = 420 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.45e^{2.45t}} = 0$$

y una vez más se tiene una respuesta que empieza y termina en cero y que tiene valores positivos en todos los demás tiempos. Un valor máximo v_m ocurre otra vez en el tiempo t_m; en nuestro ejemplo:

$$t_m = 0.408 \text{ s} \qquad \text{y} \qquad v_m = 63.1 \text{ V}$$

Este máximo es mayor que el que se obtuvo en el caso sobreamortiguado, y además es una consecuencia de las pérdidas más pequeñas que ocurren en una resistencia más grande; el tiempo de la respuesta máxima es un poco mayor que el correspondiente al sobreamortiguamiento. El tiempo de establecimiento también se determinaría resolviendo

$$\frac{v_m}{100} = 420t_s e^{-2.45t_s}$$

para t_s (mediante métodos de ensayo y error, o con una rutina SOLVE de calculadora):

$$t_s = 3.12 \text{ s}$$

que es un valor mucho más pequeño que el que resulta en el caso sobreamortiguado (5.15 s). En realidad, se demuestra que, para valores dados de L y C, la selección del valor de R que proporcione amortiguamiento crítico siempre dará un tiempo de establecimiento más breve que cualquier elección de R que produzca una respuesta sobreamortiguada. Sin embargo, se obtendría una ligera mejora (reducción) del tiempo de establecimiento mediante un pequeño aumento en la resistencia; una respuesta ligeramente sobreamortiguada tal que no alcanzaría al eje cero antes de desvanecerse provocará que el tiempo de establecimiento sea más breve.

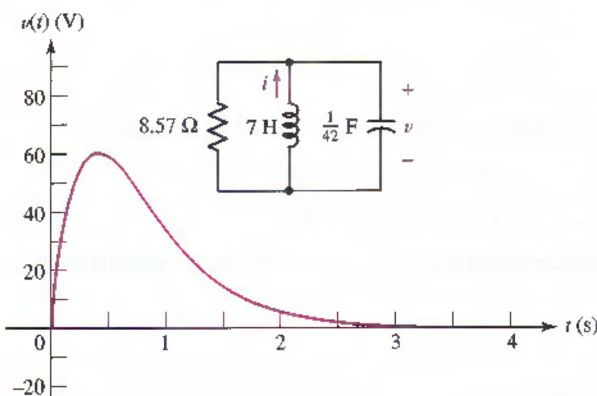
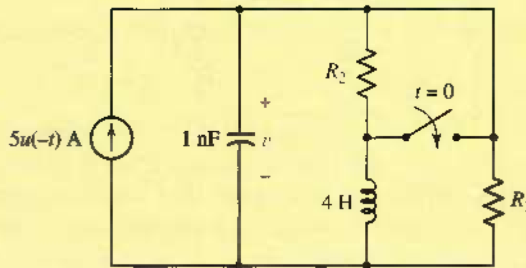


FIGURA 9.11 Respuesta $v(t) = 420te^{-2.45t}$ de la red que se presenta en la figura 9.2, con R modificada para proporcionar amortiguamiento crítico.

La curva de respuesta del amortiguamiento crítico que se dibuja en la figura 9.11 puede compararse con el caso sobreamortiguado (y subamortiguado) de la figura 9.16.

EJEMPLO 9.5

Seleccionar el valor de R_1 tal que el circuito de la figura 9.12 esté caracterizado por una respuesta críticamente amortiguada en $t > 0$, y un valor de R_2 tal que $v(0) = 2$ V.



■ **FIGURA 9.12** Circuito que se simplifica a un circuito *RLC* en paralelo después de que se active el interruptor.

Se puede observar que en $t = 0^-$ la fuente de corriente está encendida y el inductor puede tratarse como un cortocircuito. Por ende, la tensión en R_2 es $v(0^-)$ y está dada por,

$$v(0^-) = 5R_2$$

y se debe seleccionar R_2 con un valor de 400 mΩ para obtener $v(0) = 2$ V.

Después de que se acciona el interruptor, se apaga por sí sola la fuente de corriente y R_2 se pone en cortocircuito. Lo que queda es un circuito *RLC* compuesto por R_1, un inductor de 4 H y un capacitor de 1 nF.

Se puede ahora calcular (para $t > 0$)

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$
$$= \frac{1}{2 \times 10^{-9} R_1}$$

y

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-9}}}$$
$$= 15\,810 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto, para establecer una respuesta críticamente amortiguada en el circuito para $t > 0$, es necesario fijar $R_1 = 31.63$ kΩ. (Nota: *debido a que se ha redondeado a cuatro dígitos significativos, una persona exigente puede argumentar con todo el derecho que aún no es exactamente una respuesta amortiguada críticamente, la cual es una situación muy difícil de crear.*)

PRÁCTICA

9.5 (*a*) Elegir R_1 en el circuito de la figura 9.13, de manera que la respuesta después de $t = 0$ sea críticamente amortiguada. (*b*) Luego elegir R_2 para obtener $v(0) = 100$ V. (*c*) Determinar $v(t)$ en $t = 1$ ms.

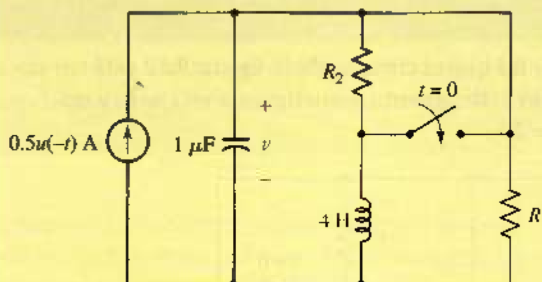


FIGURA 9.13

Respuestas: 1 kΩ; 250 Ω; −212 V.

9.4 CIRCUITO *RLC* EN PARALELO SUBAMORTIGUADO

Continuando con el proceso que se inició en la última sección se incrementará R una vez más para obtener lo que se denominará una respuesta ***subamortiguada***. De esta forma, el coeficiente de amortiguamiento α disminuye mientras ω_0 permanece constante, α^2 se hace más pequeña que ω_0^2 y el radicando que aparece en la expresión de s_1 y s_2 se vuelve negativo. Lo anterior provoca que la respuesta tome un carácter muy diferente, aunque por fortuna no es necesario regresar de nuevo a la ecuación diferencial básica. Mediante el uso de números complejos, la respuesta exponencial se convierte en una *respuesta senoidal amortiguada* que está compuesta en su totalidad por cantidades reales, de modo que las cantidades complejas sólo son necesarias en la deducción.[1]

Forma de la respuesta subamortiguada

Se comienza con la forma exponencial

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

donde:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

y en ese caso, sea

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

donde $j \equiv \sqrt{-1}$.

Los ingenieros en electricidad utilizan "j" en lugar de "i" para representar el símbolo $\sqrt{-1}$ y evitar confusiones con las corrientes.

Se considera ahora el nuevo radical, que es real para el caso subamortiguado, pero se denominará ω_d, la ***frecuencia resonante natural***:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

La respuesta se escribiría ahora como

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \qquad [26]$$

[1] En el apéndice 5 se encuentra un repaso de los números complejos.

o, en forma más extensa pero equivalente,

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left\{(A_1 + A_2)\left[\frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2}\right] + j(A_1 - A_2)\left[\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{j2}\right]\right\}$$

Al aplicar las identidades que se describen en el apéndice 5, el primer corchete de la ecuación anterior es exactamente igual a $\omega_d t$, y el segundo, a $\omega_d t$. Por consiguiente:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2)\operatorname{sen}\omega_d t\right]$$

de esta forma se asignarían nuevos símbolos a los factores multiplicadores:

$$v(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \operatorname{sen}\omega_d t) \qquad [27]$$

donde las ecuaciones [26] y [27] son idénticas.

Tal vez parezca extraño que la expresión haya aparecido originalmente con un componente complejo, y ahora es sólo real. Sin embargo, se debe recordar que se permitió al principio que A_1 y A_2 fueran complejos, lo mismo que s_1 y s_2. En cualquier situación, si se está tratando con el caso subamortiguado, se deja ahora a un lado a los números complejos. Lo anterior debe ser cierto, pues α, ω_d y t son cantidades reales, por lo que la propia $v(t)$ debe ser una cantidad real (que podría presentarse mediante un osciloscopio, un voltímetro o una hoja de papel gráfico). La ecuación [27] es la forma funcional deseada de la respuesta subamortiguada y su validez se verifica mediante la sustitución directa en la ecuación diferencial original; este ejercicio se deja a los incrédulos. Las dos constantes reales B_1 y B_2 se eligen de nuevo para que se ajusten a las condiciones iniciales dadas.

Ahora se regresará al circuito *RLC* simple en paralelo de la figura 9.2 con $R = 6\ \Omega$, $C = 1/42$ F y $L = 7$ H, pero se incrementará la resistencia a un valor de 10.5 Ω. Por lo tanto,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2\ \text{s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{6}\ \text{s}^{-1}$$

y

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2}\ \text{rad/s}$$

Salvo por la evaluación de las constantes arbitrarias, en este caso se conoce la respuesta:

$$v(t) = e^{-2t}(B_1 \cos\sqrt{2}t + B_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}t)$$

Cálculo de los valores de B_1 y B_2

Para el cálculo de las dos constantes se procede como antes. Si se continúa suponiendo que $v(0) = 0$ e $i(0) = 10$, entonces B_1 debe ser cero. De ahí que

$$v(t) = B_2 e^{-2t} \operatorname{sen}\sqrt{2}t$$

La derivada es:

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{2}B_2 e^{-2t}\cos\sqrt{2}t - 2B_2 e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$$

y en $t = 0$ se convierte en

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \sqrt{2}B_2 = \frac{i_C(0)}{C} = 420$$

donde i_C se define en la figura 9.2. Por lo tanto,

$$v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t}\,\text{sen}\,\sqrt{2}t$$

Representación gráfica de la respuesta subamortiguada

Observar que, como antes, esta función de respuesta tiene un valor inicial de cero, debido a la condición de tensión inicial que se impuso, y un valor final de cero en virtud de que el término exponencial se anula para valores grandes de t. Cuando t aumenta a partir de cero, en pequeños valores positivos, $v(t)$ aumenta como $210\sqrt{2}\,\text{sen}\sqrt{2}t$, pues el término exponencial permanece en esencia igual a la unidad. Pero en cierto tiempo t_m, la función exponencial empieza a disminuir más rápido a medida que la función sen $\sqrt{2}t$ crece. De tal modo, $v(t)$ alcanza un máximo v_m y empieza a disminuir. Es necesario observar que t_m no es el valor de t para el cual sen $\sqrt{2}t$ es un máximo, sino que debe ocurrir un poco antes de que sen $\sqrt{2}t$ alcance su máximo.

Cuando $t = \pi/\sqrt{2}$, $v(t)$ es cero. En consecuencia, en el intervalo $\pi/\sqrt{2} < t < \sqrt{2}\pi$ la respuesta es negativa, y se vuelve cero de nuevo en $t = \sqrt{2}\pi$. Por consiguiente, $v(t)$ es una función oscilatoria del tiempo y cruza el eje de tiempo un número infinito de veces en $t = n\pi/\sqrt{2}$, donde n es cualquier entero positivo. Sin embargo, en el ejemplo la respuesta sólo es un poco subamortiguada, y el término exponencial provoca que la función se desvanezca tan rápido que la mayor parte de los cruces por cero no serán evidentes en el dibujo.

La naturaleza oscilatoria de la respuesta se nota más cuando α disminuye. Si α es cero, lo cual corresponde a una resistencia infinitamente grande, entonces $v(t)$ es una senoide subamortiguada que oscila con amplitud constante. Nunca hay un tiempo para el que $v(t)$ se reduzca y permanezca por debajo de 1% de su valor máximo; en consecuencia, el tiempo de establecimiento es infinito, aunque no es el movimiento perpetuo. Se supuso tan sólo una energía inicial en el circuito y no se proporcionó ningún medio para disiparla, por lo que se transfiere desde su ubicación inicial en el inductor hasta el capacitor, para luego regresar al inductor, etc., por siempre.

Función de la resistencia finita

Una R finita en el circuito *RLC* en paralelo actúa como un tipo de intermediario de transferencia eléctrica. Cada vez que la energía se transfiere de L a C o de C a L, el intermediario exige una comisión. En poco tiempo habrá tomado toda la energía, disipando de manera desenfrenada hasta el último joule. La L y C se quedan sin un joule propio, sin tensión y sin corriente. Los circuitos *RLC* en paralelo reales pueden construirse a fin de que tengan valores eficaces de R tan grandes que se conserve durante años una respuesta senoidal subamortiguada natural, sin suministrar ninguna energía adicional.

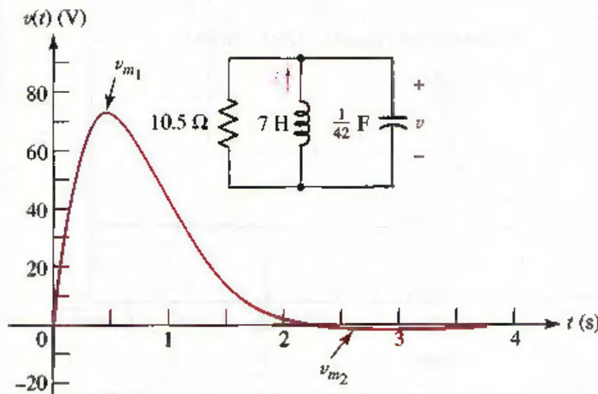
Regresando al problema numérico específico, la diferenciación localiza el primer máximo de $v(t)$,

$$v_{m_1} = 71.8 \text{ V} \qquad \text{en} \qquad t_{m_1} = 0.435 \text{ s}$$

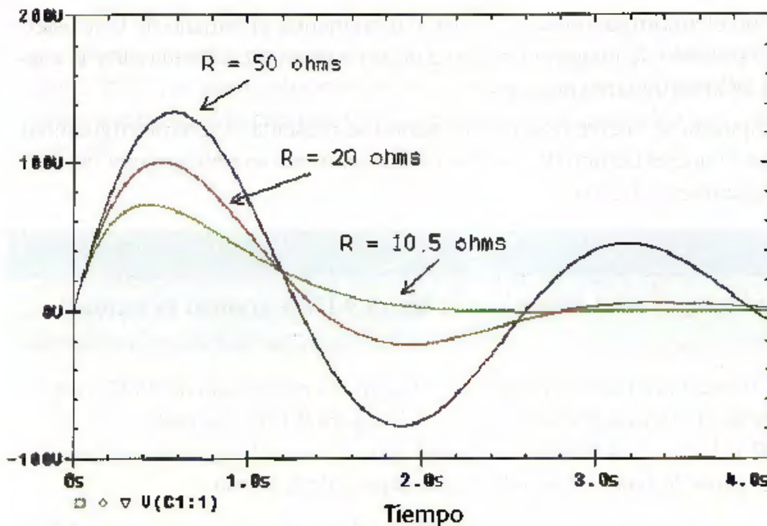
el mínimo siguiente,

$$v_{m_2} = -0.845 \text{ V} \qquad \text{en} \qquad t_{m_2} = 2.66 \text{ s}$$

y así en forma sucesiva. La curva de respuesta se muestra en la figura 9.14, y las curvas de respuesta adicionales de circuitos cada vez más subamortiguados, en la figura 9.15.



■ **FIGURA 9.14** La respuesta $v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t}\,\text{sen}\,\sqrt{2}t$ de la red que se muestra en la figura 9.2 con *R* incrementada para producir una respuesta subamortiguada.



■ **FIGURA 9.15** Respuesta a una tensión subamortiguada simulada de una red de tres valores diferentes de resistencia, que muestran un incremento del comportamiento oscilatorio a medida que *R* aumenta.

Es posible obtener el tiempo de establecimiento mediante una solución de ensayo y error, y para $R = 10.5\ \Omega$, resulta ser de 2.92 s, algo más pequeño que en el amortiguamiento crítico. Obsérvese que t_s es mayor que t_{m_2} debido a que la magnitud de v_{m_2} es mayor que 1% de la magnitud de v_{m_1}. Ello sugiere que una ligera reducción de *R* disminuiría la magnitud de la distancia al eje y permitiría que t_s fuera *menor* que t_{m_2}.

Las respuestas sobreamortiguada, críticamente amortiguada y subamortiguada de esta red, según las simula PSpice, se presentan en la misma gráfica de la

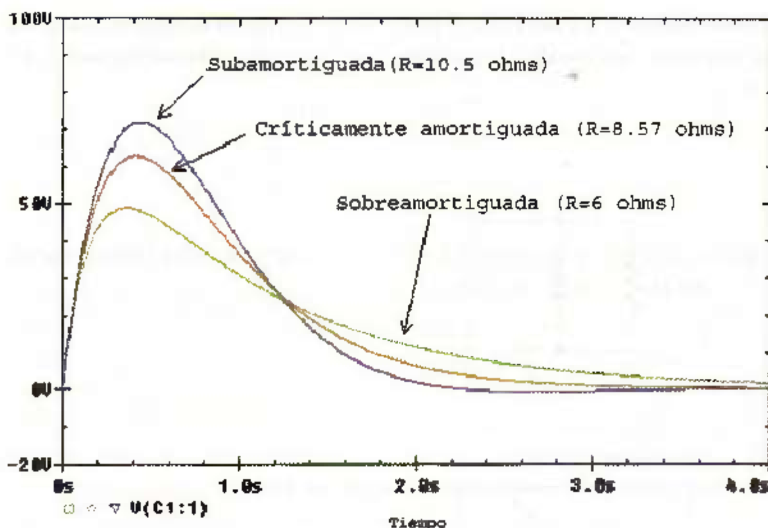


FIGURA 9.16 Respuestas de tensión sobreamortiguada, críticamente amortiguada y subamortiguada simuladas para la red del ejemplo, que se obtienen cuando se modifica el valor de la resistencia R en paralelo.

figura 9.16. Una comparación de las tres curvas hace posibles las siguientes conclusiones generales:

- Cuando el amortiguamiento cambia al incrementar el tamaño de la resistencia en paralelo, la magnitud máxima de la respuesta resulta mayor y la cantidad de amortiguamiento menor.
- La respuesta se vuelve oscilatoria cuando se presenta el subamortiguamiento, por lo que el tiempo de establecimiento mínimo se obtiene para un subamortiguamiento ligero.

EJEMPLO 9.6

Determinar $i_L(t)$ en el circuito de la figura 9.17*a* y graficar la forma de onda.

En $t = 0$ se quitan tanto la fuente de 3 A como la resistencia de 48 Ω, con lo cual queda el circuito que se muestra en la figura 9.17*b*. Por ende, $\alpha = 1.2\ \text{s}^{-1}$ y $\omega_0 = 4.899$ rad/s. Puesto que $\alpha < \omega_0$, el circuito es *subamortiguado* y, por lo tanto, se espera una respuesta de la forma

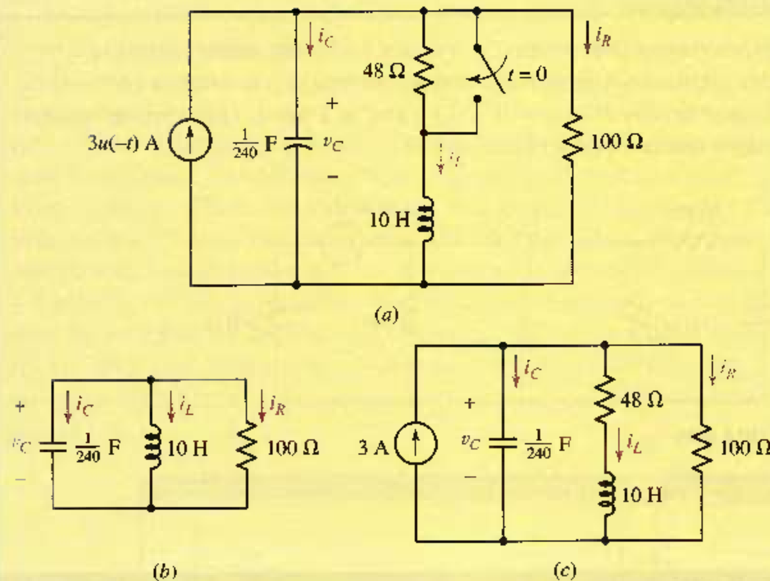
$$i_L(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t) \qquad [28]$$

donde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 4.750$ rad/s. El único paso que queda es encontrar B_1 y B_2.

La figura 9.17*c* muestra el circuito como está en el tiempo $t = 0^-$. Se pueden sustituir el inductor con un cortocircuito y el capacitor con un circuito abierto; el resultado es $v_C(0^-) = 97.30$ V e $i_L(0^-) = 2.027$ A. Puesto que ninguna cantidad puede modificarse en el tiempo cero, entonces se tiene $v_C(0^+) = 97.30$ V e $i_L(0^+) = 2.027$ A.

Sustituyendo $i_L(0) = 2.027$ en la ecuación [28] se obtiene $B_1 = 2.027$ A. Para determinar la otra constante, primero se deriva la ecuación [28]:

$$\frac{di_L}{dt} = e^{-\alpha t}(-B_1\omega_d \operatorname{sen} \omega_d t + B_2\omega_d \cos \omega_d t) - \alpha e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t) \qquad [29]$$



■ **FIGURA 9.17** (*a*) Circuito *RLC* en paralelo para el que se desea la corriente $i_L(t)$. (*b*) El circuito en $t \geq 0$. (*c*) Circuito para determinar las condiciones iniciales.

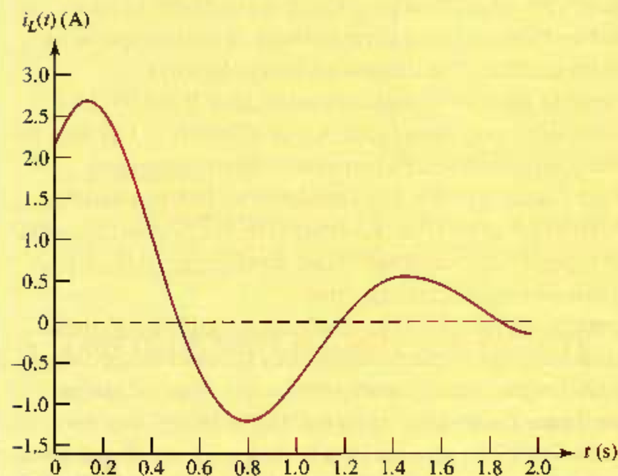
y se puede observar que $v_L(t) = L(di_L/dt)$. Con referencia al circuito de la figura 9.17*b*, se puede observar que $v_L(0^+) = v_C(0^+) = 97.3$ V. Por lo tanto, multiplicando la ecuación [29] por $L = 10$ H y fijando $t = 0$, se puede ver que

$$v_L(0) = 10(B_2\omega_d) - 10\alpha B_1 = 97.3$$

Resolviendo, $B_2 = 2.561$ A, de tal forma que

$$i_L = e^{-1.2t}(2.027\cos 4.75t + 2.561\,\text{sen}4.75t)\ \text{A}$$

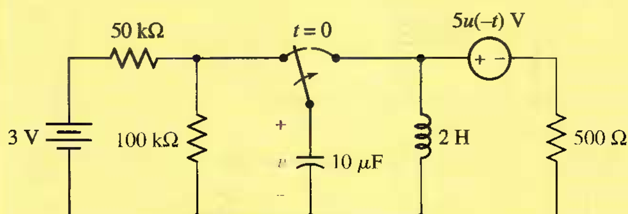
la cual está graficada en la figura 9.18.



■ **FIGURA 9.18** Gráfica de $i_L(t)$, que muestra signos evidentes de ser una respuesta subamortiguada.

PRÁCTICA

9.6 El interruptor del circuito de la figura 9.19 se ha mantenido en la posición izquierda durante largo tiempo. Se mueve a la derecha en $t = 0$. Determinar (*a*) dv/dt en $t = 0^+$; (*b*) v en $t = 1$ ms; (*c*) t_0, el primer valor de t mayor que cero, para el cual $v = 0$.



■ **FIGURA 9.19**

Respuestas: − 1 400 V/s; 0.695 V; 1.609 ms.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

Una característica útil de Probe es su capacidad para efectuar operaciones matemáticas sobre las tensiones y corrientes que resultan de una simulación. En este ejemplo se empleará esa capacidad para mostrar la transferencia de energía en un circuito *RLC* en paralelo, de un capacitor que almacena inicialmente una cantidad específica de energía (1.25 μJ) a un inductor que al principio no contiene energía.

Se selecciona un capacitor de 100 nF y un inductor de 7 μH, lo cual permite de inmediato calcular $\omega_0 = 1.195 \times 10^6$ s^{-1}. Para analizar los casos sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado, es necesario elegir la resistencia en paralelo, de manera que se obtenga $\alpha > \omega_0$ (*sobreamortiguado*), $\alpha = \omega_0$ (*críticamente amortiguado*) y $\alpha < \omega_0$ (*subamortiguado*).

De las explicaciones anteriores se sabe que para un circuito *RLC* en paralelo $\alpha = (2RC)^{-1}$. Se selecciona $R = 4.1833$ Ω como una aproximación cercana al caso críticamente amortiguado; calcular α exactamente igual a ω_0 es en realidad imposible. Si se aumenta la resistencia, la energía que se almacena en los otros dos elementos se disipa con mayor lentitud, lo que causa una respuesta subamortiguada. Se selecciona $R = 100$ Ω de manera que se esté bien dentro de este régimen, y se utiliza $R = 1$ Ω (una resistencia muy pequeña) para obtener una respuesta sobreamortiguada.

En consecuencia, se planea ejecutar tres simulaciones independientes, variando sólo la resistencia R entre ellas. La energía de 1.25 μJ almacenada en un principio en el capacitor, corresponde a una tensión inicial de 5 V, y así se establece la condición inicial del capacitor.

Luego de que se pone en ejecución Probe, se selecciona **Add** bajo el menú **Trace**. Se desea graficar la energía almacenada tanto en el inductor como en el capacitor en función del tiempo. Para el capacitor, $w = \frac{1}{2}Cv^2$, por lo que se hace clic en la ventana **Trace Expression**, se teclea "0.5*100E-9*" (sin las comillas), se hace clic en V(C1:1), y regresando a la ventana **Trace Expression**, se indica "*", se hace clic de nuevo en V(C1:1) y se selecciona después **Ok.** Se repite la secuencia para obtener la energía que se almacena en el inductor, utilizando 7E-6 en lugar de 100E-9, y se hace clic en I(L1:1) en lugar de V(C1:1).

En la figura 9.20 se proporcionan las gráficas de salida Probe de tres simulaciones independientes. En la figura 9.20*a* se observa que la energía que queda en el circuito se transfiere de manera continua, de ida y vuelta entre el capacitor y el inductor, hasta que (a la larga) se disipe por completo en la resistencia. La disminución de la resistencia hasta 4.1833 Ω produce un circuito críticamente amortiguado, lo que origina la gráfica de energía de la figura 9.20*b*. La transferencia de energía oscilatoria entre al capacitor y el inductor se ha reducido en forma dramática. En su lugar se observa que la energía transferida al inductor tiene un máximo en aproximadamente 0.8 μs, y que luego disminuye hasta cero. La respuesta sobreamortiguada se grafica en la figura 9.20*c*. Se observa que la energía se disipa con mucha mayor rapidez en el caso de la respuesta sobreamortiguada, y que muy poca energía se transfiere al inductor, pues la mayor parte se disipa ahora en la resistencia.

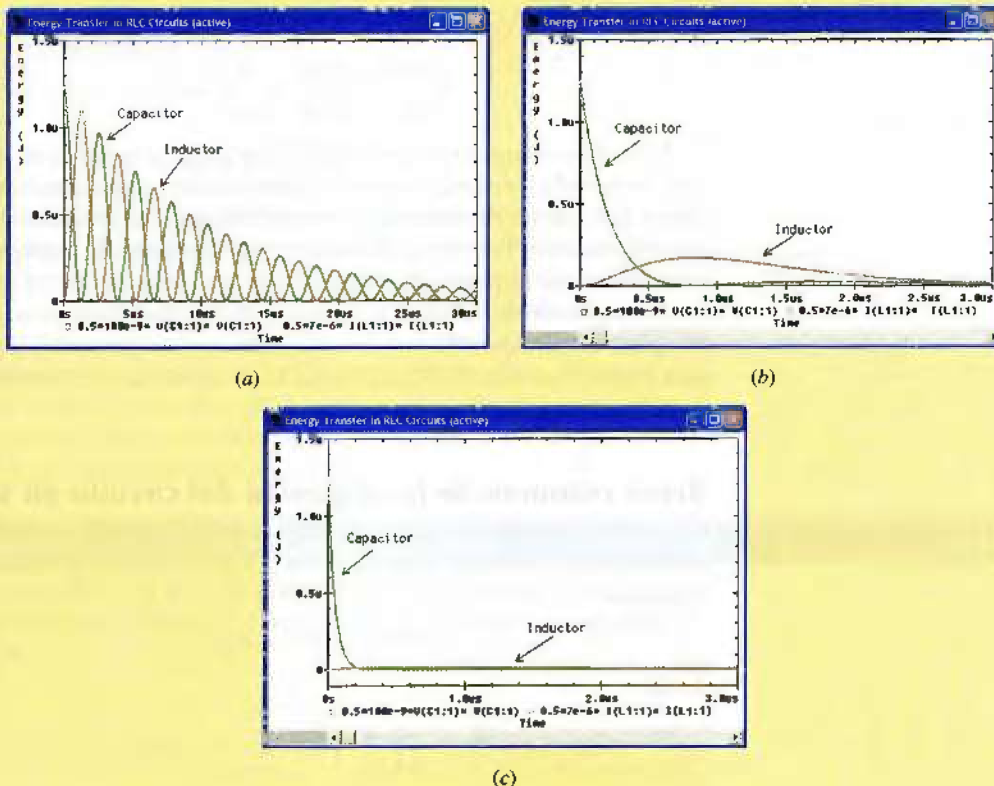


FIGURA 9.20 Transferencia de energía de un circuito *RLC* en paralelo con: (*a*) $R = 100\ \Omega$ (subamortiguado); (*b*) $R = 4.1833\ \Omega$ (críticamente amortiguado); (*c*) $R = 1\ \Omega$ (sobreamortiguado).

9.5 CIRCUITO *RLC* EN SERIE SIN FUENTE

Se desea ahora determinar la respuesta natural de un modelo de circuito compuesto por una resistencia ideal, un inductor ideal y un capacitor ideal conectados en *serie*. La resistencia ideal tal vez represente una resistencia física conectada en un circuito *LC* o *RLC* en serie; quizás también represente las pérdidas óhmicas y las pérdidas en el núcleo ferromagnético del inductor, o tal vez se use para representar todos los casos anteriores y otros dispositivos que absorben energía.

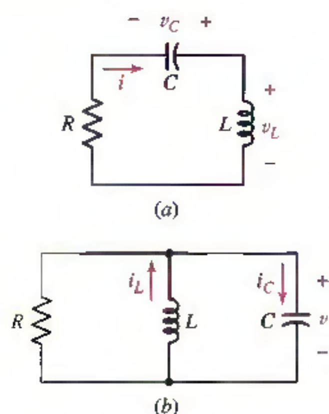


FIGURA 9.21 (*a*) Circuito *RLC* en serie que es el dual de (*b*) un circuito *RLC* en paralelo. Los valores de los elementos no son, desde luego, idénticos en ambos circuitos.

El circuito *RLC* en serie es el *dual* del circuito *RLC* en paralelo, así que este simple hecho resulta suficiente para hacer que su análisis sea un asunto trivial. La figura 9.21*a* presenta al circuito en serie. La ecuación integrodiferencial fundamental es

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' - v_C(t_0) = 0$$

y debe compararse con la ecuación análoga del circuito *RLC* en paralelo, redibujado en la figura 9.21*b*,

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - i_L(t_0) = 0$$

Las respectivas ecuaciones de segundo orden que se obtienen diferenciando estas dos ecuaciones con respecto al tiempo también son duales:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \qquad [30]$$

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \qquad [31]$$

El análisis completo del circuito *RLC* en paralelo se aplica de manera directa al circuito *RLC* en serie; las condiciones iniciales sobre la tensión en el capacitor y la corriente en el inductor son equivalentes a las condiciones iniciales en la corriente en el inductor y la tensión en el capacitor; la respuesta de *tensión* consiste en una respuesta de *corriente*. Así, se pueden volver a leer las cuatro secciones anteriores utilizando el lenguaje dual, a fin de obtener una descripción completa del circuito *RLC* en serie. Sin embargo, este proceso resulta adecuado para inducir una neurosis ligera, luego de la lectura de los primeros párrafos, y en realidad no parece que sea necesario.

Breve resumen de la respuesta del circuito en serie

Resulta fácil presentar un breve resumen de la respuesta del circuito en serie. En términos del circuito que se presenta en la figura 9.21*a*, la respuesta sobreamortiguada es

$$i(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

donde:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

y por ello

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La forma de la respuesta *críticamente amortiguada* es

$$i(t) = e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$$

y la respuesta *subamortiguada* se escribiría como

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\,\mathrm{sen}\,\omega_d t)$$

TABLA 9.1 Resumen de las ecuaciones relevantes de los circuitos *RLC* sin fuente.

Tipo	Condición	Criterio	α	ω_0	Respuesta
Paralelo	Sobreamortiguado	$\alpha > \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$, donde $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$
Serie			$\frac{R}{2L}$		
Paralelo	Críticamente amortiguado	$\alpha = \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$
Serie			$\frac{R}{2L}$		
Paralelo	Subamortiguado	$\alpha < \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t)$, donde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
Serie			$\frac{R}{2L}$		

donde:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Es evidente que si se trabaja en términos de los parámetros α, ω_0, y ω_d, las formas matemáticas de las respuestas para las situaciones duales son idénticas. Un aumento en α en el circuito en serie o en paralelo, siempre y cuando ω_0 se mantenga constante, tiende hacia una respuesta sobreamortiguada. La única precaución que se debe tomar radica en el cálculo de α, que corresponde a $1/2RC$ en el caso del circuito en paralelo, y a $R/2L$ en el del circuito en serie; por consiguiente, α se incrementa al aumentar la resistencia en serie, o al disminuir la resistencia en paralelo. Por conveniencia, las ecuaciones clave de los circuitos *RLC* en serie y paralelo se resumen en la tabla 9.1.



EJEMPLO 9.7

Dado el circuito *RLC* en serie de la figura 9.22, en el que $L = 1$ H, $R = 2$ kΩ, $C = 1/401$ μF, $i(0) = 2$ mA, y $v_C(0) = 2$ V, encontrar y dibujar $i(t)$, $t > 0$.

Se obtiene $\alpha = R/2L = 1\,000$ s^{-1} y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 20\,025$ rad/s, lo cual indica una respuesta *subamortiguada*. Por lo tanto, se calcula el valor de ω_d y se tienen 20000 rad/s. Excepto por la evaluación de las dos constantes arbitrarias, se sabe ahora que la respuesta es

$$i(t) = e^{-1000t}(B_1 \cos 20\,000t + B_2 \operatorname{sen} 20\,000t)$$

Puesto que se sabe que $i(0) = 2$ mA, se sustituiría este valor en la ecuación de $i(t)$ obteniendo así

$$B_1 = 0.002 \text{ A}$$

por lo cual

$$i(t) = e^{-1\,000t}(0.002 \cos 20\,000t + B_2 \operatorname{sen} 20\,000t) \quad \text{A}$$

(Continúa en la siguiente página)

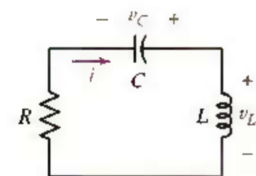


FIGURA 9.22 Circuito *RLC* simple sin fuente con energía almacenada en el inductor y en el capacitor en $t = 0$.

La condición inicial restante debe aplicarse a la derivada; en consecuencia,

$$\frac{di}{dt} = e^{-1000t}(-40 \text{ sen } 20\,000t + 20\,000B_2 \cos 20\,000t$$
$$-2 \cos 20\,000t - 1\,000B_2 \text{ sen } 20\,000t$$

y

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 20\,000B_2 - 2 = \frac{v_L(0)}{L}$$
$$= \frac{v_C(0) - Ri(0)}{L}$$
$$= \frac{2 - 2\,000(0.002)}{1} = -2 \text{ A/s}$$

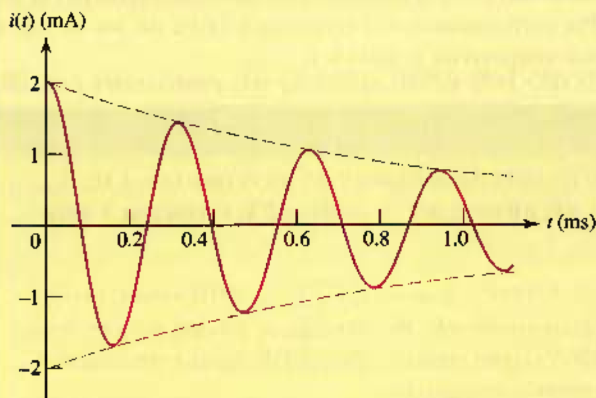
por lo que

$$B_2 = 0$$

La respuesta deseada es, entonces,

$$i(t) = 2e^{-1000t} \cos 20\,000t \qquad \text{mA}$$

Se lograría un buen dibujo al graficar primero las dos partes de la *envolvente* exponencial, $2e^{-1\,000t}$ y $-2e^{-1\,000t}$ mA, como se muestra mediante las líneas punteadas en la figura 9.23. La ubicación de los puntos de un cuarto de ciclo de la onda senoidal en $20\,000t = 0, \pi/2, \pi$, etc., o $t = 0.07854k$ ms, $k = 0, 1, 2, \ldots$, mediante líneas delgadas sobre el eje del tiempo, permite que la curva oscilatoria se dibuje con rapidez.

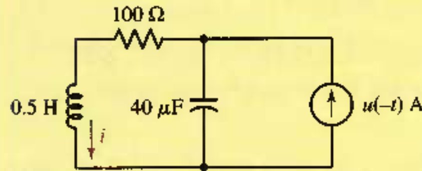


■ **FIGURA 9.23** Respuesta en corriente de un circuito *RLC* en serie subamortiguado, para la cual $\alpha = 1000 \text{ s}^{-1}$, $\omega_0 = 20\,000 \text{ s}^{-1}$, $i(0) = 2$ mA y $v_C(0) = 2$ V. La construcción gráfica se simplifica dibujando en el envolvente, la cual se muestra como el par de líneas punteadas.

En este caso, el tiempo de establecimiento se determina con facilidad por medio de la parte superior de la envolvente. Esto es, se iguala $2e^{-1\,000t_s}$ mA a 1% de su valor máximo, 2 mA. Por lo tanto, $e^{-1\,000t_s} = 0.01$, y $t_s = 4.61$ ms es el valor aproximado que casi siempre se usa.

PRÁCTICA

9.7 De acuerdo con el circuito de la figura 9.24, determinar (*a*) α; (*b*) ω_0; (*c*) $i(0^+)$; (*d*) $di/dt|_{t=0^+}$; (*e*) $i(12 \text{ ms})$.



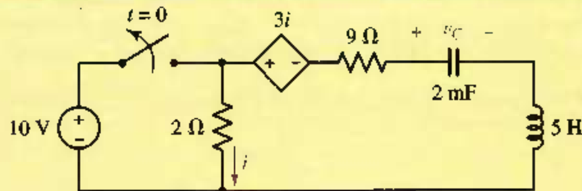
■ **FIGURA 9.24**

Respuestas: 100 s^{-1}; 224 rad/s; 1 A; 0; −0.1204 A.

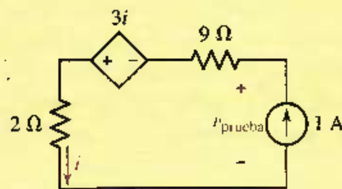
Como ejemplo final, se hará una pausa para considerar algunas situaciones donde el circuito incluya una fuente dependiente. Si no es de interés ninguna corriente o tensión de control asociada con la fuente, se puede simplemente encontrar el equivalente de Thévenin conectado al inductor y al capacitor. De otra forma, es muy probable que se tenga que enfrentar la situación de tener que escribir una ecuación integrodiferencial apropiada, calcular las derivadas indicadas y resolver la ecuación diferencial resultante lo mejor que se pueda.

EJEMPLO 9.8

Encontrar la expresión de $v_C(t)$ en el circuito de la figura 9.25*a*, que sea válida en $t > 0$.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 9.25** (*a*) Circuito *RLC* que contiene una fuente dependiente. (*b*) Circuito para encontrar R_{eq}.

Como el interés es solamente en $v_C(t)$, es totalmente aceptable comenzar encontrando la resistencia de Thévenin equivalente conectada en serie con el

(Continúa en la siguiente página)

inductor y el capacitor en $t = 0^+$. Se lleva a cabo lo anterior conectando una fuente de 1 como se muestra en la figura 9.25*b*, a partir de lo cual se puede deducir que

$$v_{\text{test}} = 11i - 3i = 8i = 8(1) = 8 \text{ V}.$$

Por lo tanto, $R_{eq} = 8\ \Omega$, por lo que $\alpha = R/2L = 0.8\ \text{s}^{-1}$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} =$ 10 rad/s, lo que significa que se espera una respuesta subamortiguada con $\omega_d = 9.968$ rad/s y la forma:

$$v_C(t) = e^{-0.8t}(B_1 \cos 9.968t + B_2 \operatorname{sen} 9.968t) \qquad [32]$$

Al considerar el circuito en $t = 0^-$, se puede observar que $i_L(0^-) = 0$ debido a la presencia del capacitor. Por medio de la ley de Ohm, $i(0^-) = 5$ A, por lo que

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10 - 3i = 10 - 15 = -5 \text{ V}$$

Si esta última condición se sustituye en la ecuación [32] se obtiene $B_1 = -5$ V. Si se calcula la derivada de la ecuación [32] y se evalúa en $t = 0$ se obtiene

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = -0.8B_1 + 9.968B_2 = 4 + 9.968B_2 \qquad [33]$$

Se puede observar a partir de la ecuación 9.25*a* que

$$i = -C\frac{dv_C}{dt}$$

Por lo tanto, con base en el hecho de que $i(0^+) = i_L(0^-) = 0$ en la ecuación [33] se obtiene $B_2 = -0.4013$ V, y se puede escribir

$$v_C(t) = -e^{-0.8t}(5\cos 9.968t + 0.4013 \operatorname{sen} 9.968t) \text{ V}, \quad t > 0$$

La figura 9.26 muestra la simulación en PSpice de este circuito que confirma el análisis.

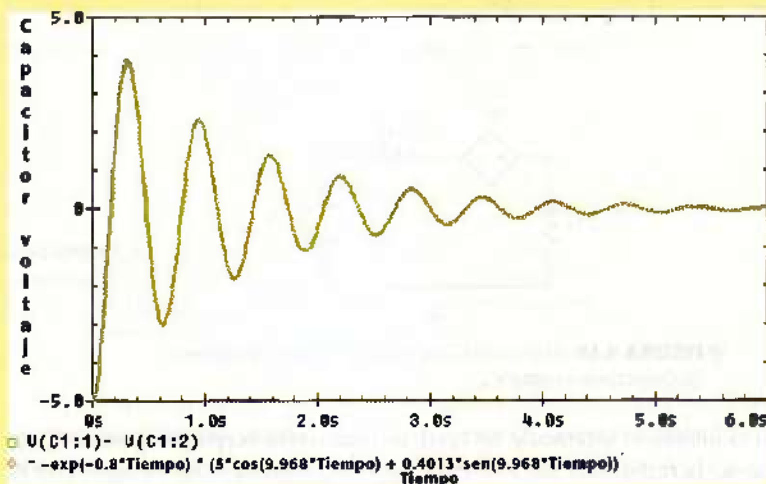
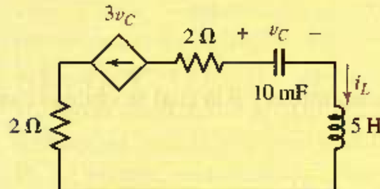


FIGURA 9.26 Simulación en PSpice del circuito que se muestra en la figura 9.25*a*. El resultado analítico se grafica mediante una línea roja punteada.

PRÁCTICA

9.8 Encontrar la expresión de $i_L(t)$ en el circuito de la figura 9.27, que sea válida para $t > 0$, si $v_C(0^-) = 10$ V y $i_L(0^-) = 0$. *Observar que a pesar de que no es de utilidad aplicar las técnicas de Thévenin en este caso, la acción de los enlaces v_C e i_L de la fuente dependiente es tal que se obtiene como resultado una ecuación diferencial lineal de primer orden.*



■ **FIGURA 9.27** Circuito del problema de práctica 9.8.

Respuesta: $i_L(t) = -30e^{-300t}$ A, $t > 0$.

9.6 RESPUESTA COMPLETA DEL CIRCUITO *RLC*

Considerar ahora los circuitos *RLC* en los que las fuentes de cd se conmutan en la red y producen respuestas forzadas que no necesariamente se anulan cuando el tiempo se vuelve infinito. La solución general se obtiene mediante el mismo procedimiento que se siguió en los circuitos *RL* y *RC* la respuesta forzada se determina por completo; la respuesta natural se obtiene como una forma funcional adecuada que contiene el número apropiado de constantes arbitrarias; la respuesta completa se escribe como la suma de las respuestas forzada y natural; además, las condiciones iniciales se determinan y se aplican a la respuesta completa a fin de calcular los valores de las constantes. *Con frecuencia, este último paso resulta el más complicado para los estudiantes.* En consecuencia, aunque la determinación de las condiciones iniciales no difiere en lo básico en el caso de un circuito que contiene fuentes de cd, de la correspondiente a los circuitos sin fuente que ya se estudiaron con cierto detalle, este tema recibirá un tratamiento destacado en los ejemplos que siguen.

La mayor parte de la confusión al determinar y aplicar las condiciones iniciales surge por la simple razón de que no se cuenta con un conjunto de reglas rigurosas dispuestas, que sea viable seguir. En cierto punto de cada análisis suele surgir una situación en la que se ve involucrada alguna idea que resulta más o menos única para ese problema particular, lo cual es casi siempre la fuente de la dificultad.

La parte fácil

La respuesta *completa* (supuesta de manera arbitraria como la respuesta de tensión) de un sistema de segundo orden consiste en una respuesta *natural*:

$$v_f(t) = V_f$$

que es una constante de la excitación de cd, y una respuesta *natural:*

$$v_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

En consecuencia:

$$v(t) = V_f + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

Se supone que s_1, s_2, y V_f ya se determinaron en el circuito y en las funciones forzadas que se indican; queda por conocer A y B. La última ecuación muestra la interdependencia funcional de A, B, v, y t, de modo que la sustitución del valor conocido de v en $t = 0^+$ nos da entonces una sola ecuación que relaciona A y B, $v(0^+) = V_f + A + B$. *Ésta es la parte fácil.*

La otra parte

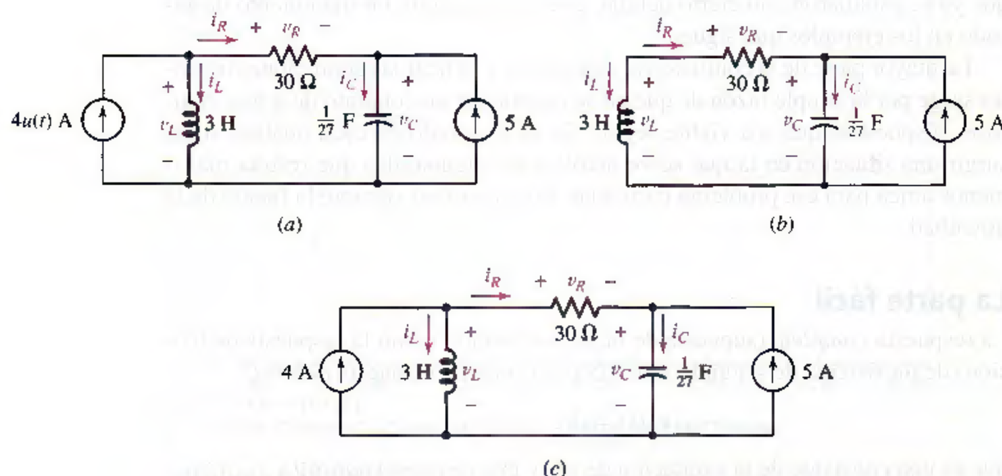
Desafortunadamente, se requiere otra relación entre A y B la cual se obtiene casi siempre al tomar la derivada de la respuesta:

$$\frac{dv}{dt} = 0 + s_1 Ae^{s_1 t} + s_2 Be^{s_2 t}$$

y al sustituir el valor conocido de dv/dt en $t = 0^+$. Así, se tienen dos ecuaciones que relacionan a A y B y que se resolverían de manera simultánea para evaluar las dos constantes.

El único problema que resta es determinar los valores de v y dv/dt en $t = 0^+$. Suponga que v es una tensión en el capacitor, v_C. Puesto que $i_C = C\, dv_C/dt$, se debe reconocer la relación entre el valor inicial de dv/dt y el valor inicial de alguna corriente en el capacitor. Si se pudiera establecer un valor de dicha corriente inicial en el capacitor, entonces se establecería de manera automática el valor de dv/dt. Casi siempre los estudiantes pueden obtener con facilidad $v(0^+)$ pero suelen titubear un poco al determinar el valor inicial de dv/dt. Si se hubiera elegido una corriente en el inductor i_L como nuestra respuesta, entonces el valor inicial de di_L/dt estaría íntimamente relacionado con el valor inicial de cierta tensión en el inductor. Otras variables, aparte de las tensiones en el capacitor y de las corrientes en el inductor, se determinan al expresar sus valores iniciales y los valores iniciales de sus derivadas en términos de los valores correspondientes de v_C y i_L.

Se ilustra el procedimiento y se calculan todos estos valores mediante el análisis cuidadoso del circuito de la figura 9.28. Para simplificar el análisis, se usa de nuevo una gran capacitancia que es irreal.



■ **FIGURA 9.28** (*a*) Circuito *RLC* que se emplea para ilustrar varios procedimientos mediante los que se pueden obtener las condiciones iniciales. La respuesta deseada se toma nominalmente como $v_C(t)$, (*b*) $t = 0^-$, (*c*) $t > 0$.

EJEMPLO 9.9

Hay tres elementos pasivos en el circuito de la figura 9.28*a*; además, la tensión y la corriente se definen en cada uno de ellos. Determinar los valores de estas seis cantidades tanto en $t = 0^-$ como en $t = 0^+$.

El objetivo consiste en determinar el valor de cada corriente y de cada tensión tanto en $t = 0^-$ como en $t = 0^+$. Luego de conocer estas cantidades, se obtendrían con facilidad los valores iniciales de las derivadas. Se empleará primero un método lógico paso por paso.

1. En $t = 0^-$ En $t = 0^-$, sólo la fuente de corriente de la derecha está activa, como se señala en la figura 9.28*b*. Se supone que el circuito ha estado siempre en tal estado y que todas las corrientes y tensiones son constantes. De tal manera, una corriente cd que atraviesa el inductor requiere una tensión cero a través de él:

$$v_L(0^-) = 0$$

y que una tensión cd en el capacitor $(-v_R)$ requiere que circule por él una corriente cero:

$$i_C(0^-) = 0$$

A continuación se aplica la ley de Kirchhoff de corriente en el nodo derecho para obtener

$$i_R(0^-) = -5 \text{ A}$$

la cual también origina

$$v_R(0^-) = -150 \text{ V}$$

Se podría recurrir ahora a la ley de Kirchhoff de tensión alrededor de la malla izquierda con el objeto de encontrar

$$v_C(0^-) = 150 \text{ V}$$

mientras que la LKC permite determinar la corriente en el inductor,

$$i_L(0^-) = 5 \text{ A}$$

2. $t = 0^+$ Durante el intervalo de $t = 0^-$ a $t = 0^+$, la fuente de corriente del lado izquierdo se activa y muchos de los valores de tensión y corriente en $t = 0^-$ cambiarán de modo abrupto. El circuito correspondiente se presenta en la figura 9.28*c*. Sin embargo, se debe *empezar concentrando la atención en las cantidades que no pueden cambiar, a saber, la corriente en el inductor y la tensión en el capacitor*. Ambas deben permanecer constantes durante el intervalo de conmutación. De tal modo,

$$i_L(0^+) = 5 \text{ A} \quad \text{y} \quad v_C(0^+) = 150 \text{ V}$$

Puesto que se conocen dos corrientes en el nodo izquierdo, a continuación se obtiene

$$i_R(0^+) = -1 \text{ A} \quad \text{y} \quad v_R(0^+) = -30 \text{ V}$$

por lo que

$$i_C(0^+) = 4 \text{ A} \quad \text{y} \quad v_L(0^+) = 120 \text{ V}$$

y se tienen los seis valores iniciales en $t = 0^-$ y seis más en $t = 0^+$. Entre los últimos seis valores, sólo la tensión en el capacitor y la corriente en el inductor se mantienen sin cambio desde los valores $t = 0^-$.

Se pudo haber recurrido a un método un poco diferente para evaluar estas corrientes y tensiones en $t = 0^-$ y $t = 0^+$. Antes de la operación de conmutación, en el circuito sólo existen corrientes y tensiones, ambas directas. Por lo tanto, se podría reemplazar el inductor por un cortocircuito, su equivalente de cd, en tanto que el capacitor se sustituye por un circuito abierto. Al volverse a dibujar de esta manera, el circuito de la figura 9.28*a* aparece como en la figura 9.29*a*. Sólo la fuente de corriente de la derecha se encuentra activa y sus 5 A fluyen a través de la resistencia y el del inductor. En consecuencia, se tiene $i_R(0^-) = -5$ A y $v_R(0^-) = -150$ V, $i_L(0^-) = 5$ A y $v_L(0^-) = 0$, y $i_C(0^-) = 0$ y $v_C(0^-) = 150$ V, como antes.

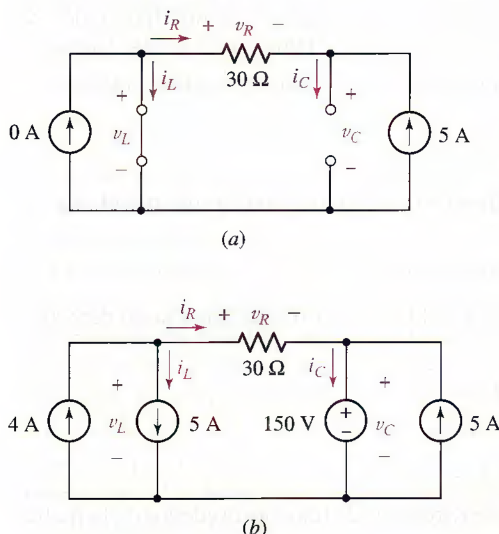


FIGURA 9.29 (*a*) Circuito simple equivalente correspondiente al circuito de la figura 9.28*a* para $t = 0^-$. (*b*) Circuito equivalente con las tensiones y corrientes indicadas, válidas en el instante definido por $t = 0^+$.

La atencion se enfocará ahora en el problema de dibujar un circuito equivalente que ayudará a determinar varias tensiones y corrientes en $t = 0^+$. *Cada tensión en el capacitor y cada corriente en el inductor deben permanecer constantes durante el intervalo de conmutación.* Estas condiciones se aseguran sustituyendo el inductor por una fuente de corriente y el capacitor por una fuente de tensión; asimismo, cada fuente sirve para mantener una respuesta constante durante la discontinuidad. Se produce el circuito equivalente de la figura 9.29*b* de modo que resulta necesario advertir que dicho circuito es válido *sólo para el intervalo entre* 0^- *y* 0^+.

Las tensiones y las corrientes en $t = 0^+$ se obtienen al analizar este circuito de cd. La solución no es difícil, aunque el número más o menos grande de fuentes presentes en la red originen una vista un tanto extraña. Sin embargo, los problemas de este tipo se resolvieron en el capítulo 3, por lo que no hay nada nuevo implicado. Para resolver primero las corrientes, se empieza en el nodo izquierdo superior y se ve que $i_R(0^+) = 4 - 5 = -1$ A. Al moverse hacia el nodo derecho superior, se encuentra que $i_C(0^+) = -1 + 5 = 4$ A, y, desde luego, $i_L(0^+) = 5$ A.

A continuación se analizan las tensiones. Al utilizar la ley de Ohm se puede observar que $v_R(0^+) = 30(-1) = -30$ V. En el caso del inductor, la LKT da $v_L(0^+) = -30 + 150 = 120$ V. Por último, al incluir $v_C(0^+) = 150$ V, se tienen todos los valores en $t = 0^+$.

PRÁCTICA

9.9 Sea $i_s = 10u(-t) - 20u(t)$ A en la figura 9.30. Determinar *(a)* $i_L(0^-)$; *(b)* $v_C(0^+)$; *(c)* $v_R(0^+)$; *(d)* $i_{L,(\infty)}$; *(e)* $i_L(0.1 \text{ ms})$.

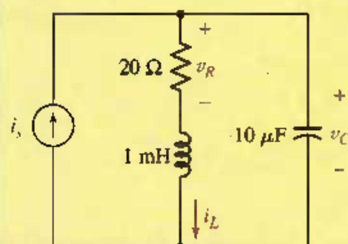


FIGURA 9.30

Respuestas: 10 A; 200 V; 200 V; −20 A; 2.07 A.

EJEMPLO **9.10**

Completar la determinación de las condiciones iniciales del circuito de la figura 9.28, que se repite en la figura 9.31. Para ello, encontrar los valores en $t = 0^+$ correspondientes a las primeras derivadas de las tres variables de tensión y las tres de corriente definidas en el esquema del circuito.

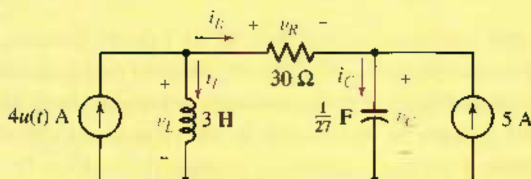


FIGURA 9.31 Circuito de la figura 9.28, repetido para el ejemplo 9.10.

Se empieza con los dos elementos de almacenamiento de energía. Para el inductor

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

y, de manera específica,

$$v_L(0^+) = L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+}$$

En consecuencia:

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{120}{3} = 40 \text{ A/s}$$

en forma similar:

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{4}{1/27} = 108 \text{ V/s}$$

(Continúa en la siguiente página)

Las otras cuatro derivadas se determinan al observar que a las LKC y LKT las satisfacen también las derivadas. Por ejemplo, en el nodo de la izquierda de la figura 9.31,

$$4 - i_L - i_R = 0, \qquad t > 0$$

y por ello,

$$0 - \frac{di_L}{dt} - \frac{di_R}{dt} = 0, \qquad t > 0$$

por lo tanto,

$$\left.\frac{di_R}{dt}\right|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

Se determina que los tres valores iniciales restantes de las derivadas corresponden a

$$\left.\frac{dv_R}{dt}\right|_{t=0^+} = -1\,200 \text{ V/s}$$

$$\left.\frac{dv_L}{dt}\right|_{t=0^+} = -1\,092 \text{ V/s}$$

y

$$\left.\frac{di_C}{dt}\right|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

Antes de dejar este problema del cálculo de los valores iniciales necesarios, debe señalarse que al menos se ha omitido otro método poderoso para determinarlos: se pudieron haber escrito las ecuaciones generales de nodo, o de lazo, del circuito original. Luego, la sustitución de los valores cero conocidos de la tensión en el inductor y de la corriente en el capacitor, en $t = 0^-$ descubriría varios valores de respuesta extra en $t = 0^-$ y permitiría que el resto se calculara sin ninguna dificultad. En ese caso debe efectuarse un análisis similar en $t = 0^+$ lo cual constituye un método importante que se hace necesario en circuitos más complicados, que no pueden analizarse por medio de los más simples procedimientos paso a paso.

A continuación se terminará en forma breve la determinación de la respuesta $v_C(t)$ en el caso del circuito original de la figura 9.31. Con ambas fuentes desconectadas, el circuito se presenta como uno de *RLC* en serie y se descubre con facilidad que s_1 y s_2 son, respectivamente, –1 y –9. La respuesta forzada se calcula por inspección o, si es necesario, dibujando el equivalente de cd, que es similar a la figura 9.29*a*, con la adición de una fuente de corriente de 4 A. La respuesta forzada equivale a 150 V. Por lo tanto,

$$v_C(t) = 150 + Ae^{-t} + Be^{-9t}$$

y

$$v_C(0^+) = 150 = 150 + A + B$$

o

$$A + B = 0$$

Entonces,

$$\frac{dv_C}{dt} = -Ae^{-t} - 9Be^{-9t}$$

y

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = 108 = -A - 9B$$

Por último,

$$A = 13.5 \qquad B = -13.5$$

y

$$v_C(t) = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t}) \text{ V}$$

Resumen rápido del proceso de solución

En síntesis, cada vez que se desee determinar el comportamiento transitorio de un circuito *RLC* simple de tres elementos, se debe decidir primero si se está resolviendo un circuito en serie o en paralelo, a fin de que se utilice la relación correcta para α. Las dos ecuaciones son:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \text{(RLC en paralelo)}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \text{(RLC en serie)}$$

La segunda decisión se toma después de comparar α con ω_0, la cual se indica a partir de cualquier circuito por medio de

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si $\alpha > \omega_0$, el circuito está *sobreamortiguado* y la respuesta natural tiene la forma:

$$f_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

donde

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Si $\alpha = \omega_0$, entonces está *críticamente amortiguado* y:

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}\,(A_1 t + A_2)$$

Por último, si $\alpha < \omega_0$, entonces se enfrenta uno a la respuesta *subamortiguada*:

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \ \text{sen}\,\omega_d t)$$

donde

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

La última decisión depende de las fuentes independientes. Si no hay alguna que actúe en el circuito después de que se termina la conmutación o la discontinuidad, entonces el circuito no tiene fuente y la respuesta natural equivale a la respuesta completa. Si aún están presentes fuentes independientes, el circuito está activado y debe determinarse una respuesta forzada. La respuesta completa es, en ese caso, la suma

$$f(t) = f_f(t) + f_n(t)$$

APLICACIÓN PRÁCTICA

Elaboración del modelo para sistemas de suspensión de automóviles

En el párrafo introductorio, se alude al hecho de que los conceptos investigados en este capítulo en realidad se extienden más allá del análisis de los circuitos eléctricos. En realidad, la forma general de las ecuaciones diferenciales con las que se trabaja aparecen en muchos campos; sólo es necesario aprender a "traducir" la nueva tecnología de parámetros. Por ejemplo, considerar una suspensión de automóvil simple, como se dibuja (de manera un poco burda) en la figura 9.32. El émbolo no está unido al cilindro, pero *sí* al resorte y a la rueda. Por lo tanto, las partes móviles son el resorte, el émbolo y la rueda.

Se hará el modelo de este sistema físico determinando primero las fuerzas en juego. Al definir una función de la posición $p(t)$ que describe el lugar donde se encuentra el émbolo dentro del cilindro, se podría escribir F_S, la fuerza sobre el resorte, como

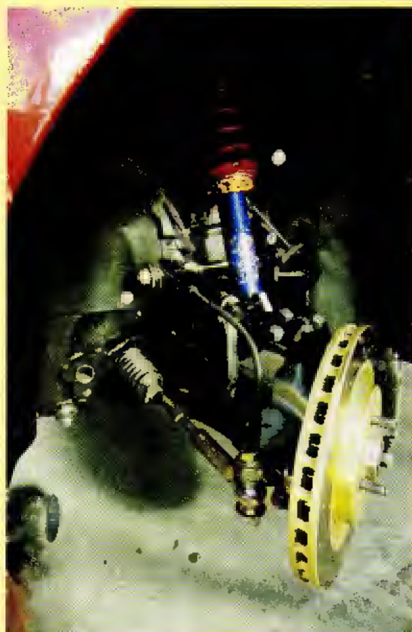
$$F_S = Kp(t)$$

donde K se conoce como la constante del resorte y tiene unidades lb/pie. La fuerza sobre la rueda F_W es igual a la masa de la rueda multiplicada por su aceleración, o

$$F_W = m\frac{d^2p(t)}{dt^2}$$

donde m se mide en $1\text{b}\cdot\text{s}^2/\text{pie}$. La última, pero no menos importante, fuerza es la de fricción F_f que actúa sobre el émbolo

$$F_f = \mu_f\frac{dp(t)}{dt}$$



■ **FIGURA 9.32** Sistema de suspensión de automóvil típico.

donde μ_f es el coeficiente de fricción, con unidades de $1\text{b}\cdot\text{s/pie}$.

De acuerdo con los cursos básicos de física se sabe que todas las fuerzas que actúan en un sistema deben sumar cero, por lo que

$$m\frac{d^2p(t)}{dt^2} + \mu_f\frac{dp(t)}{dt} + Kp(t) = 0 \qquad [34]$$

Es muy probable que la ecuación haya tenido el potencial de causar pesadillas en algún punto de alguna carrera académica, pero ya no. Si se compara la ecuación [32] con la [30] y la [31], se verá de inmediato una semejanza distinta, al menos en la forma general. Al elegir la ecuación [30], la ecuación diferencial que describe la respuesta de un circuito *RLC* conectado en serie, se observan las siguientes correspondencias:

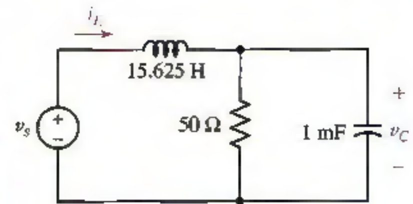
Masa	m	→	inductancia	L
Coeficiente de fricción	μ_f	→	resistencia	R
Constante de resorte	K	→	inverso de la capacitancia	C^{-1}
Variable de la posición	$p(t)$	→	variable de la corriente	$i(t)$

Por lo tanto, si se está dispuesto a hablar de pies en lugar de amperes, de $1\text{b}\cdot\text{s}^2/\text{pie}$ en vez de H, de H, pie/lb en lugar de F, y de $1\text{b}\cdot\text{s/pie}$ en lugar de Ω, se pueden aplicar las habilidades que se acaba de descubrir al elaborar el modelo de los circuitos *RLC* para la tarea de evaluar los amortiguadores de automotores.

Considerar una rueda de automóvil común de 70 lb. La masa se determina dividiendo el peso entre la aceleración gravitacional terrestre (32.17 pies/s^2), lo que origina $m = 2.176$ $1\text{b}\cdot\text{s}^2/\text{pies}$. El peso muerto del automóvil es de 1985 lb, y el desplazamiento estático del resorte corresponde a 4 pulgadas (sin pasajeros). La constante de resorte se obtiene a través de la división del peso de cada amortiguador entre el desplazamiento estático, de modo que resulta $K = (\frac{1}{4})(1985)$ $(3\ \text{pies}^{-1}) = 1\,489$ lb/pies. Se indicó también que el coeficiente de fricción del arreglo émbolo/cilindro corresponde a 65 $1\text{b}\cdot\text{s/pies}$. Por lo tanto, se puede simular el amortiguador como un modelo de un circuito *RLC* en serie que tiene $R = 65\ \Omega$, $L = 2.176$ H, y $C = K^{-1} = 671.6\ \mu\text{F}$.

La frecuencia resonante del amortiguador es $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 26.16$ rad/s, y el coeficiente de amortiguamiento es a $\alpha = R/2L = 14.94\ \text{s}^{-1}$. Puesto que $\alpha < \omega_0$, el amortiguador representa un sistema subamortiguado; lo anterior quiere decir que se espera un rebote o dos después de que se pasa sobre un bache. Un impacto más fuerte (un mayor coeficiente de fricción, o una resistencia más alta del modelo de circuito) por lo común resulta deseable cuando se toman las curvas a velocidades altas: en algún punto esto corresponde a una respuesta sobreamortiguada. Sin embargo, si la mayor parte del recorrido es sobre caminos no pavimentados, se prefiere una respuesta un poco subamortiguada.

Esto es aplicable a cualquier corriente o tensión en el circuito. El último paso es resolver las constantes desconocidas dadas las condiciones iniciales.



■ **FIGURA 9.33**

PRÁCTICA

9.10 Sean $v_s = 10 + 20u(t)$ V en el circuito de la figura 9.33. Determinar (*a*) $i_L(0)$; (*b*) $v_C(0)$; (*c*) $i_{L,f}$; (*d*) $i_L(0.1\text{ s})$.

Respuesta: 0.2 A; 10 V; 0.6 A; 0.319 A.

9.7 CIRCUITO *LC* SIN PÉRDIDAS

Si el valor de la resistencia de un circuito *RLC* en paralelo se vuelve infinito, o cero en el caso de un circuito *RLC* en serie, se tiene un lazo *LC* simple en el que se puede mantener para siempre una respuesta oscilatoria. Se considerará brevemente un ejemplo de un circuito de este tipo y luego se explicarán otros medios para obtener una respuesta idéntica, sin necesidad de suministrar ninguna inductancia.



■ **FIGURA 9.34** Este circuito no presenta pérdidas y proporciona la respuesta subamortiguada $v = 2$ sen $3t$ V, si $v(0) = 0$ e $i(0) = -\frac{1}{6}$ A.

Pensar en el circuito sin fuente de la figura 9.34, para el que se usan los valores grandes $L = 4$ H y $C = \frac{1}{36}$ F de manera que los cálculos serán simples. Sea $i(0) = -\frac{1}{6}$ A y $v(0) = 0$. Se encuentra que $\alpha = 0$ y $\omega_0^2 = 9\text{ s}^{-2}$, por lo que $\omega_d = 3$ rad/s. Si no hay amortiguamiento exponencial, la tensión v resulta sólo

$$v = A\cos 3t + B\,\text{sen}\,3t$$

Puesto que $v(0) = 0$, vemos que $A = 0$. A continuación:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = 3B = -\frac{i(0)}{1/36}$$

Pero $i(0) = -\frac{1}{6}$ amperes y, por lo tanto, $dv/dt = 6$ V/s en $t = 0$. Se debe tener $B = 2$ V así que

$$v = 2\,\text{sen}\,3t\text{ V}$$

que es una respuesta senoidal amortiguada; en otras palabras, la respuesta en tensión no disminuye.

Se verá cómo se obtendría esta tensión, sin recurrir a un circuito *LC*. Las intenciones son escribir la ecuación diferencial que satisfaga v y luego establecer una configuración de amp ops que proporcione la solución de la ecuación. Aunque se trabaja con un ejemplo específico, ésta es la técnica general que se usa para resolver cualquier ecuación diferencial homogénea lineal.

En el caso del circuito *LC* de la figura 9.34, se elige v como la variable y se iguala a cero la suma de las corrientes en el inductor y en el capacitor:

$$\frac{1}{4}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\frac{dv}{dt} = 0$$

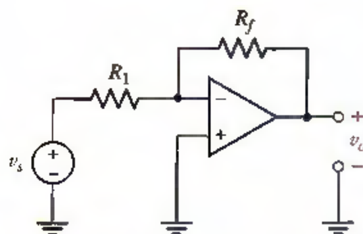
Derivando una vez, se tiene

$$\frac{1}{4}v + \frac{1}{36}\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

o

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -9v$$

Para resolver esta ecuación se planea utilizar el amplificador operacional como un integrador. Se supondrá que la derivada de orden superior que aparece aquí en la ecuación diferencial, d^2v/dt^2, está disponible en la configuración de amp op en un punto arbitrario **A**. Se recurre luego al integrador, con $RC = 1$, como se explicó en la sección 7.5. La entrada es d^2v/dt^2, y la salida debe ser $-dv/dt$, donde el cambio de signo proviene del uso de una configuración de amp op inversor como un integrador. El valor inicial de dv/dt es 6 V/s, como se mostró cuando se analizó primero el circuito, así que debe fijarse un valor inicial de -6 V en el integrador. El negativo de la primera derivada forma ahora la entrada para un segundo integrador, de manera que su salida es $v(t)$, sin embargo, el valor inicial corresponde $v(0) = 0$. En estas condiciones sólo resta multiplicar v por -9 para obtener la segunda derivada que se supuso en el punto **A**. Ésta es una amplificación por 9 con un cambio de signo, y se consigue con facilidad utilizando el amp op como un amplificador inversor.



■ **FIGURA 9.35** El amplificador operacional inversor proporciona una ganancia $v_o/v_s = -R_f/R_1$, si se supone un amp op ideal.

La figura 9.35 muestra el circuito de un amplificador inversor. Para un amp op ideal, tanto la corriente de entrada como la tensión de entrada son cero. Por consiguiente, la corriente que se va hacia el "este", pasando a través de R_1 es v_s/R_1, en tanto que la que circula hacia el oeste a través de R_f equivale a v_o/R_f. Puesto que su suma es cero, se tiene:

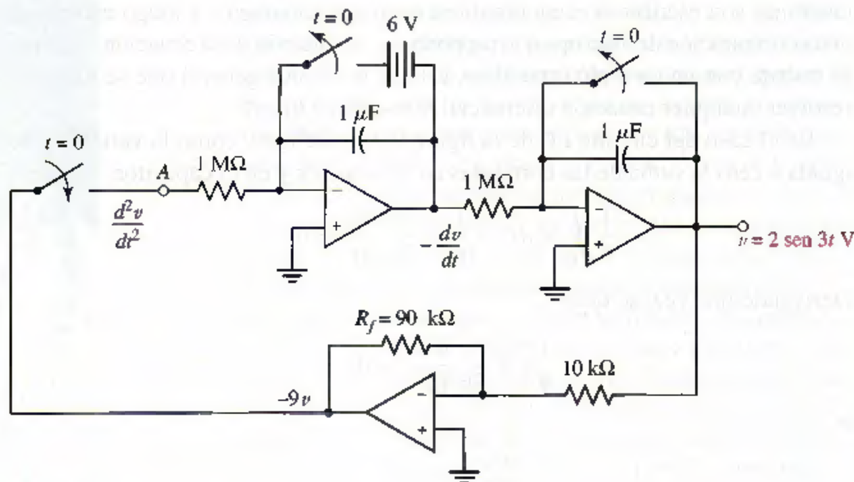
$$\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_f}{R_1}$$

En consecuencia, se puede diseñar para una ganancia de -9 dejando $R_f = 90\,\text{k}\Omega$ y $R_1 = 10\,\text{k}\Omega$, por ejemplo.

Si R be 1 MΩ y C corresponde a 1 μF en cada uno de los integradores, entonces

$$v_o = -\int_0^t v_s\,dt' + v_o(0)$$

en cada caso. La salida del amplificador inversor forma ahora la entrada supuesta en el punto **A**, lo cual origina la configuración de los amp ops de la figura 9.36. Si se deja que el interruptor se cierre en $t = 0$ mientras se abren al mismo tiempo los dos interruptores de la condición inicial, la salida del segundo integrador será la onda senoidal subamortiguada $v = 2\,\text{sen}\,3t$ V.



■ **FIGURA 9.36** Dos integradores y un amplificador inversor se conectan para proporcionar la solución de la ecuación diferencial $d^2v/dt^2 = -9v$.

Observar que el circuito LC de la figura 9.34 y el circuito de amp op de la figura 9.36 tienen la misma salida, aunque el circuito de amp op no contiene un solo inductor, actúa simplemente como si incluyera uno, suministrando la tensión senoidal apropiada entre su terminal de salida y la conexión a tierra. Lo anterior resulta una considerable ventaja práctica o económica en el diseño de circuitos, pues los inductores casi siempre son voluminosos, más costosos que los capacitores y presentan más pérdidas asociadas (y por tanto el modelo "ideal" no los representa bien).

PRÁCTICA

9.11 Asignar nuevos valores a R_f a las dos tensiones iniciales del circuito de la figura 9.36, si la salida representa la tensión $v(t)$ en el circuito de la figura 9.37.

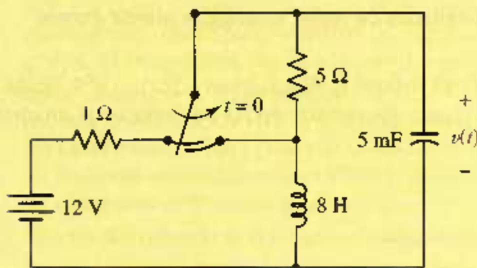


FIGURA 9.37

Respuesta: 250 kΩ; 400 V; 10 V.

RESUMEN Y REPASO

- Los circuitos con dos dispositivos de almacenamiento de energía que no pueden combinarse mediante técnicas de combinación serie/paralelo se describen mediante una ecuación diferencial de segundo orden.
- Los circuitos RLC serie y paralelo se clasifican en una de tres categorías, dependiendo de los valores relativos de R, L y C:

Sobreamortiguado	$(\alpha > \omega_0)$
Críticamente amortiguado	$(\alpha = \omega_0)$
Subamortiguado	$(\alpha < \omega_0)$

- En los circuitos RLC en serie, $\alpha = R/2L$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- En los circuitos RLC en paralelo, $\alpha = 1/2RC$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- La forma usual de una respuesta sobreamortiguada es la suma de dos términos exponenciales, uno de los cuales decae más rápido que el otro; por ejemplo, $A_1e^{-t} + A_2e^{-6t}$.
- La forma típica de una respuesta críticamente amortiguada es $e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$.
- La forma característica de una respuesta subamortiguada es una senoidal amortiguada exponencialmente: $e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t)$.

- Durante la respuesta transitoria de un circuito *RLC*, la energía se transfiere entre los elementos de almacenamiento de la misma hasta el grado permitido por el componente resistivo del circuito, que actúa para disipar la energía almacenada al inicio.
- La respuesta completa es la suma de las respuestas natural y forzada. En este caso la respuesta total debe determinarse antes de encontrar el valor de las constantes.

LECTURAS ADICIONALES

Un excelente análisis del empleo de PSpice en el modelado de sistemas de suspensión de automóviles se puede encontrar en

R.W. Goody, *MicroSim PSpice for Windows*, vol. I, 2a. ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1998.

Un gran número de descripciones detalladas de redes analógicas puede encontrarse en el capítulo 3 de

E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume I*, Wiley, Nueva York, 1954. (Este libro se encuentra agotado, pero puede encontrarse en las bibliotecas de muchas universidades.)

EJERCICIOS

9.1 Circuito en paralelo sin fuente

1. Cierto circuito está construido con cuatro elementos en paralelo: una resistencia: de 4 Ω una resistencia de 10 Ω un capacitor de 1 μF y un inductor de 2 mH. (*a*) Calcular α. (*b*) Calcular ω_0. (*c*) ¿Es el circuito subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado? Explique su respuesta.
2. Un circuito *RLC* en paralelo está constituido de un inductor de 2 H y un capacitor de 1 pF ¿Qué valor de resistencia debe agregarse en paralelo para asegurar (*a*) una respuesta subamortiguada; (*b*) una respuesta críticamente amortiguada?
3. Un circuito *RLC* sin fuente tiene una $R = 1\ \Omega$, $C = 1$ nF, y $L = 1$ pH. (*a*) Calcular α y ω_0. (*b*) Calcular s_1 y s_2. (*c*) ¿Cuál es la forma de la respuesta de corriente del inductor para $t > 0$?
4. Una capacitancia de 22 aF se conecta en paralelo con una inductancia de 1 fH. ¿Qué valor de resistencia conectado en paralelo producirá (*a*) una respuesta subamortiguada; (*b*) una respuesta críticamente amortiguada; (*c*) una respuesta sobreamortiguada?
5. Un circuito *RLC* en paralelo sin fuente contiene un inductor para el que el product $\omega_0 L$ es de 10 Ω. Si $s_1 = -6\ \text{s}^{-1}$ y $s_2 = -8\ \text{s}^{-1}$, determinar *R*, *L* y *C*.
6. La corriente en el capacitor del circuito de la figura 9.38 es igual a $i_C = 40e^{-100t} - 30e^{-200t}$ mA. Si $C = 1$ mF y $v(0) = -0.5$ V, determinar (*a*) $v(t)$; (*b*) $i_R(t)$; (*c*) $i(t)$.
7. Se descubre que un circuito *RLC* en paralelo tiene una frecuencia resonante natural de $\omega_0 = 70.71 \times 10^{12}$ rad/s. Si se sabe que la inductancia $L = 2$ pH. (*a*) calcular *C*; (*b*) determinar el valor de la resistencia *R* que originará un coeficiente de amortiguamiento exponencial de 5 Gs^{-1}; (*c*) determinar la frecuencia Neper del circuito; (*d*) calcular s_1 y s_2; (*e*) Obtener la razón de amortiguamiento del circuito.
8. Demostrar que si $L = 4R^2C$, la ecuación $v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$ es una solución de la ecuación [4]. Si $v(0) = 16$ V y $dv/dt|_{t=0} = 4$, determinar A_1 y A_2.
9. Cinco metros de alambre de cobre sólido calibre 18 AWG se sustituyen por la resistencia del problema de práctica a 9.1. (*a*) Calcular la frecuencia resonante del nuevo circuito. (*b*) Calcular la nueva frecuencia Neper del circuito. (*c*) Obtener el cambio porcentual de la razón de amortiguamiento.

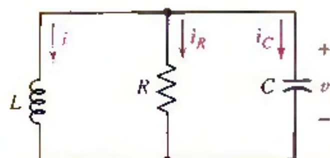


FIGURA 9.38

9.2 Circuito *RLC* en paralelo sobreamortiguado

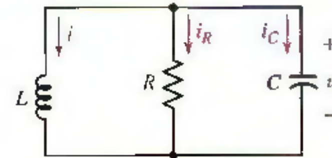


FIGURA 9.39

10. En el circuito de la figura 9.39, sea $L = 5$ H, $R = 8\ \Omega$, $C = 12.5$ mF, y $v(0^+) = 40$ V. Determinar (*a*) $v(t)$ si $i(0^+) = 8$ A; (*b*) $i(t)$ si $i_C(0^+) = 8$ A.

11. En el circuito de la figura 9.39, $L = 1$ mH y $C = 100\ \mu$F. (*a*) Seleccionar $R = 0.1R_C$, donde R_C es el valor que se requiere para alcanzar el amortiguamiento crítico. (*b*) Si $i(0^-) = 4$ A y $v(0^-) = 10$ V, encontrar $i(t)$ para $t > 0$.

12. El circuito que se muestra esquemáticamente en la figura 9.39 se construye utilizando $R = 20$ mΩ, $C = 50$ mF, y $L = 2$ mH. (*a*) Encontrar la expresión de $i_R(t)$ válida en $t > 0$ si $v(0^+) = 0$ y $i(0^-) = 2$ mA. (*b*) Hacer una gráfica de la solución en un rango de $0 < t < 500$ ms. (*c*) Simular el circuito mediante PSpice. Proponer un esquema marcado de manera apropiada con la gráfica. ¿Está de acuerdo la simulación con el resultado analítico?

13. En el circuito de la figura 9.39, sea $i(0) = 40$ A y $v(0) = 40$ V. Si $L = 12.5$ mH, $R = 0.1\ \Omega$, y $C = 0.2$ F: (*a*) determinar $v(t)$, y (*b*) dibujar i para $0 < t < 0.3$ s.

14. Los valores $R = 15\ \mu\Omega$, $C = 50\ \mu$F, y $L = 2\ \mu$H se utilizan en el circuito de la figura 9.39. (*a*) Encontrar la expresión de $i_C(t)$ válida para $t > 0$ si $v(0^+) = 2$ y $i(0^-) = 0$. (*b*) Graficar la respuesta en el intervalo de $0 < t < 5$ ns. (*c*) Simular el circuito mediante PSpice. Proponer un esquema marcado apropiadamente con su gráfica. ¿Concuerda la simulación con el resultado analítico?

15. En el circuito de la figura 9.39, $R = 1\ \Omega$, $C = 4$ F, y $L = 20$ H. Las condiciones iniciales son $i(0) = 8$ A y $v(0) = 0$. (*a*) Encontrar la expresión de $v(t)$, $t > 0$. (*b*) Determinar el valor pico y el tiempo en el que éste ocurre. (*c*) Verificar el análisis mediante una simulación en PSpice. Asegurarse de proponer un esquema marcado apropiadamente con su gráfica.

16. Obtener la expresión de $i_L(t)$ en el circuito de la figura 9.40 que sea válido para todo t.

17. Determinar $i_L(t)$ para $t \geq 0$ en el circuito de la figura 9.41.

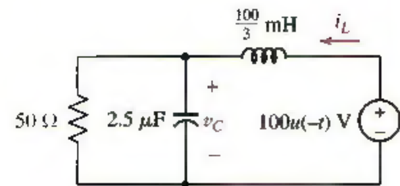


FIGURA 9.40

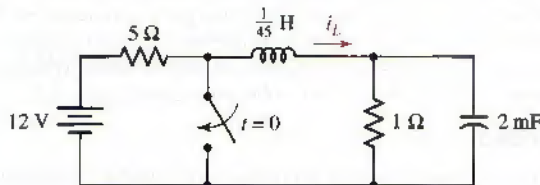


FIGURA 9.41

18. El circuito de la figura 9.42 estuvo en la condición que se indica durante un largo tiempo. Luego de que el interruptor se cierra en $t = 0$, determinar (*a*) $v(t)$; (*b*) $i(t)$; (*c*) el tiempo de establecimiento de $v(t)$.

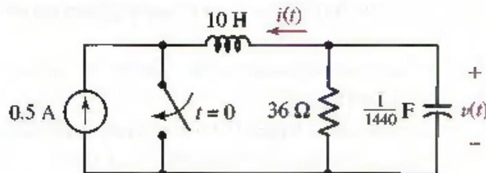


FIGURA 9.42

19. En el circuito de la figura 9.42, el valor de la inductancia es de 1250 mH. Calcular $v(t)$ si se sabe que el capacitor almacena inicialmente 390 J de energía y que el inductor es un principio no almacena energía.

20. Con respecto al circuito de la figura 9.43, (*a*) ¿qué valor de L proporcionará una respuesta transitoria de la forma $v = Ae^{-4t} + Be^{-6t}$? (*b*) Calcular A y B si $i_R(0^+) = 10$ A y $i_C(0^+) = 15$ A.

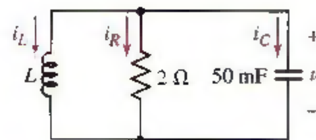
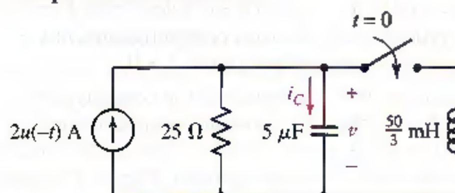


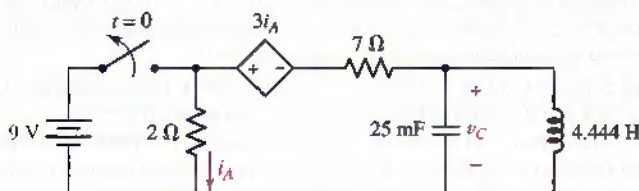
FIGURA 9.43

21. El interruptor del circuito de la figura 9.44 ha estado abierto desde que Alaska se convirtió en estado de la Unión Americana. Determinar (*a*) $v_C(0^+)$; (*b*) $i_C(0^+)$; (*c*) $v_C(t)$. (*d*) Dibujar $v_C(t)$. (*e*) Obtener t cuando $v_C(t) = 0$. (*f*) Especificar el tiempo de establecimiento.



■ **FIGURA 9.44**

22. El interruptor de la figura 9.45 fue cerrado por la última tripulación a bordo de la estación Mir antes de regresar a la Tierra (en $t = 0$). (*a*) Determinar $i_A(0^-)$. (*b*) Encontrar $i_A(0^+)$. (*c*) Calcular $v_C(0^-)$. (*d*) Proporcionar la resistencia equivalente en paralelo con L y C para $t > 0$. (*e*) Obtener $i_A(t)$.



■ **FIGURA 9.45**

23. Dos monedas de diez centavos están separadas por una capa de hielo de 1 mm de espesor, a una temperatura de 80 K. Una bobina superconductora (y por lo tanto, con una resistencia cero) de alambre de óxido de cobre de bario de itrio, que tiene una inductancia de 4 μH se acerca con cuidado a una mesa de trabajo de laboratorio próxima, situándose de modo que cada extremo entra en contacto con una moneda diferente. El hielo contiene impurezas iónicas que provocan que sea conductor. ¿Qué resistencia se necesita para que esta rara estructura se comporte como un circuito *RLC* sobreamortiguado en paralelo?

9.3 Amortiguamiento crítico

24. Un circuito *RLC* en paralelo está constituido de un inductor de 1 mH y un capacitor de 12 μF. (*a*) Seleccionar R de tal forma que la respuesta del circuito sea críticamente amortiguada. (*b*) Si $v_C(0^-) = 12$ V y $i_L(0^-) = 0$, encontrar la expresión de $v_C(t)$ válida para $t > 0$.

25. Un circuito *RLC* en paralelo está constituido de un inductor de 10 nH y un capacitor de 1 mF. (*a*) Seleccionar R de tal forma que la respuesta del circuito sea críticamente amortiguada. (*b*) Si $v_C(0^-) = 0$ V y $i_L(0^-) = 10$ V, encontrar la expresión de $i_L(t)$ válida para $t > 0$. (*d*) Graficar la solución y verificar con una simulación en PSpice. Incluir un esquema marcado apropiadamente con su gráfica. ¿Concuerdan las dos soluciones?

26. Explicar por qué, en la práctica, no es muy probable que se encuentre un circuito que presente una respuesta críticamente amortiguada.

27. Cambiar el valor de inductancia del circuito de la figura 9.41, hasta que esté críticamente amortiguado. (*a*) ¿Cuál es la nueva inductancia? (*b*) Determinar i_L en $t = 5$ ms. (*c*) Calcular el tiempo de establecimiento.

28. (*a*) ¿Qué nuevo valor de resistencia debe usarse en el circuito de la figura 9.40 para lograr amortiguamiento crítico? (*b*) Con este valor de resistencia, determinar $v_C(t)$ para $t > 0$.

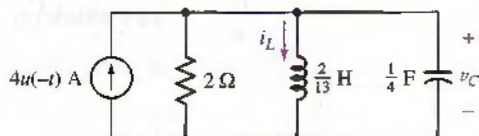
29. En la situación descrita en el ejercicio 23, ¿qué valor de resistencia debe tener el hielo para producir un circuito *RLC* críticamente amortiguado?

30. En el circuito de la figura 9.39, sean $v(0) = -400$ V e $i(0) = 0.1$ A. Si $L = 5$ mH, $C = 10$ nF, y el circuito está críticamente amortiguado, (*a*) determinar R; (*b*) calcular $|i|_{\text{máx}}$; (*c*) obtener $i_{\text{máx}}$.

31. Un circuito RLC en paralelo tiene $\alpha = 1\ \text{ms}^{-1}$, $R = 1\ \text{M}\Omega$, y se sabe que está críticamente amortiguado. Suponer que el valor del inductor se calcula mediante la expresión $L = \mu N^2 A/s$ donde $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, N = número de vueltas completas de la bobina, A = área de sección transversal de la bobina y s = longitud axial de la bobina completa. La sección transversal del inductor es 1 cm², hay 50 vueltas de alambre por cm y la bobina se fabrica a partir de un elemento recién descubierto que se llama gluonio, que es superconductor hasta temperaturas de 100°F. ¿Cuál es la longitud de la bobina?

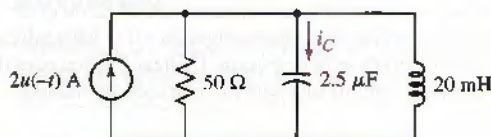
9.4 Circuito *RLC* en paralelo subamortiguado

32. En el caso del circuito que se muestra en la figura 9.46, encontrar (*a*) $i_L(0^+)$; (*b*) $v_C(0^+)$; (*c*) $di_L/dt|_{t=0^+}$; (*d*) $dv_C/dt|_{t=0^-}$; (*e*) $v_C(t)$. (*f*) Graficar $v_C(t)$, $-0.1 < t < 2$ s.



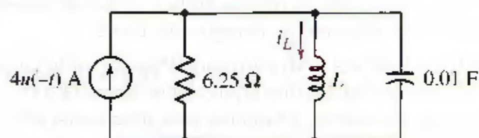
■ **FIGURA 9.46**

33. Determinar $i_C(t)$ para $t > 0$ del circuito de la figura 9.47.



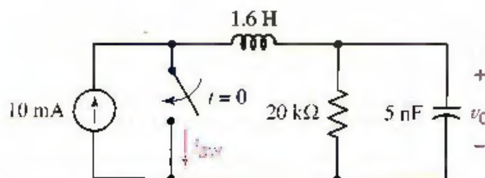
■ **FIGURA 9.47**

34. Sea $\omega_d = 6$ rad/s en el circuito de la figura 9.48. (*a*) Encontrar L. (*b*) Obtener la expresión válida de cualquier t. (*c*) Graficar $i_L(t)$, $-0.1 < t < 0.6$ s.



■ **FIGURA 9.48**

35. Después de estar abierto durante largo tiempo, el interruptor del circuito de la figura 9.49 se cierra en $t = 0$. Para $t > 0$, determinar (*a*) $v_C(t)$; (*b*) $i_{SW}(t)$.



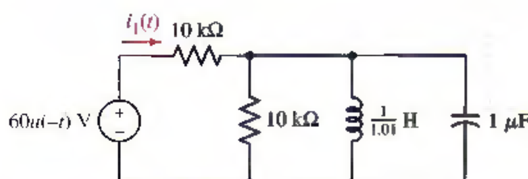
■ **FIGURA 9.49**

36. (*a*) Determinar $v(t)$ para $t > 0$ correspondiente al circuito de la figura 9.50. (*b*) Realizar un dibujo rápido de $v(t)$ sobre el intervalo de tiempo $0 < t < 0.1$ s.



■ **FIGURA 9.50**

37. Obtener $i_1(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura 9.51.



■ **FIGURA 9.51**

38. ¿Qué valor mínimo de resistencia debe sustituir a la resistencia de 25 Ω en el circuito de la figura 9.44, si se desea una respuesta subamortiguada $v(t)$? Multiplicar su resistencia especificada por 1000 y graficar la respuesta. Utilizar PSpice para determinar el tiempo de establecimiento e incluir un esquema marcado de manera adecuada con su propia gráfica.

39. Calcular el valor de R del circuito subamortiguado de la figura 9.14 [$L = 7$ H, $C = \frac{1}{42}$ F, $i(0) = 10$ A, $v(0) = 0$] con el que se obtendrá el valor mínimo del tiempo de establecimiento t_s. ¿Cuál es el valor de t_s?

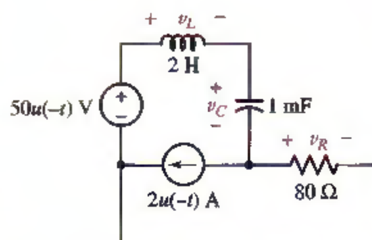
40. (*a*) Sustituir la resistencia de 2 Ω en la figura 9.46 por una resistencia de 5 Ω Obtener la expresión de $i_L(t)$ y resolver para $t = 2.5$ s. (*b*) Sustituir la resistencia de 2 Ω de la figura 9.46 con una resistencia de 0.5 Ω. Obtener la expresión d $i_L(t)$ y resolver para $t = 250$ ms. (*c*) Simular los circuitos de los incisos (*a*) y (*b*), y graficar la corriente en el inductor de cada circuito sobre la misma gráfica. Poner a consideración tanto la gráfica como un esquema marcado de manera adecuada.

41. (*a*) Elaborar el modelo del circuito de la figura 9.46 utilizando PSpice. En lugar de una fuente de corriente de $4u(-t)$ obtener un circuito equivalente usando Probe, y compare la solución con la que obtuvo a mano, y también para determinar el tiempo. (*b*) Simular los circuitos de los incisos $i_L(t)$ con especificaciones aprobadas para las condiciones iniciales para el inductor y el capacitor. Poner a consideración un esquema marcado adecuadamente.

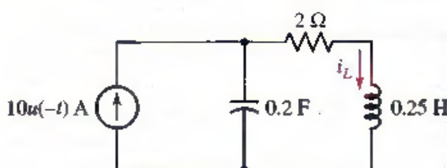
9.5 Circuito *RLC* en serie sin fuente

42. Calcular v_C, v_R, y v_L at $t = 40$ ms en el circuito que se muestra en la figura 9.52.

43. Determinar $i_L(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura 9.53.



■ **FIGURA 9.52**

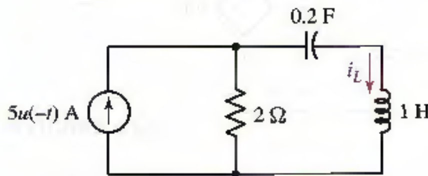


■ **FIGURA 9.53**

44. En el circuito de la figura 9.21a, sean $R = 300\ \Omega$ y $C = 1\ \mu F$ con el circuito críticamente amortiguado. Si $v_C(0) = -10$ V e $i(0) = -150$ mA, calcular: (a) $v_C(t)$; (b) $|v_C|_{max}$; (c) $v_{C,max}$.

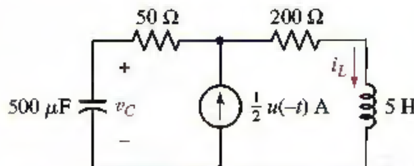
45. Escribir el dual del ejercicio 16, incluyendo el dual del circuito que se ilustra en la figura 9.40. Resolver el problema dual.

46. (a) Encontrar $i_L(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura 9.54. (b) Determinar $|i_L|_{max}$ e $i_{L,max}$.



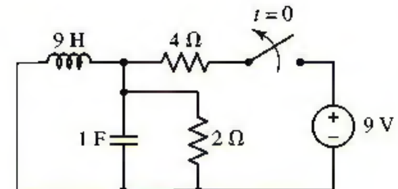
■ **FIGURA 9.54**

47. En el circuito de la figura 9.55, $t > 0$, determinar: (a) $i_L(t)$; (b) $v_C(t)$.



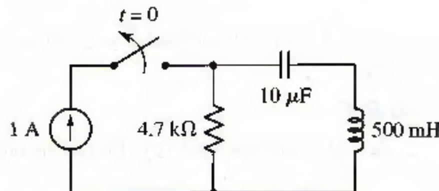
■ **FIGURA 9.55**

48. Determinar la energía almacenada en el inductor de la figura 9.56 en $t = 2$ s. Verificar la respuesta con PSpice.



■ **FIGURA 9.56**

49. El interruptor de la figura 9.57 ha estado cerrado un tiempo muy largo. Obtener la magnitud máxima de la tensión que se establece en el inductor de 500 mH y confirmar la respuesta con PSpice.



■ **FIGURA 9.57**

50. Un capacitor muy bien construido, luego de conectarse lo suficiente a una batería de 12 V como para que se cargara por completo antes de colocarlo en un vehículo para viajar en la nieve, yace sobre el piso de una cabaña de radio en el norte de Canadá. Durante un terremoto moderado, un viejo cordón de teléfono de bobina cae de un anaquel hacia el piso y uno de sus extremos entra en contacto con una terminal del capacitor. El cordón del teléfono tiene una resistencia de 14 mΩ y una inductancia de 5 μH; el capacitor almacena inicialmente 144 mJ de energía. (a) ¿Cuál es la tensión del capacitor justo antes del terremoto? (b) ¿Cuál es la tensión del capacitor 1 s después de que el cordón del teléfono toca al capacitor? (c) Un pesado oso polar irrumpe en la cabaña en busca de comida y de manera accidental pone una garra sobre el extremo desconectado del cordón telefónico y la otra sobre la terminal desconectada del capacitor. El cuerpo del oso polar se sacude durante 18 μs antes de que el animal gruña y salga corriendo de la cabaña. Si se requieren 100 mA para hacer que el oso se crispe de manera tan violenta, ¿cuál era la resistencia del pesado abrigo de piel?

51. Calcular la resistencia que debe sustituir a la resistencia de 2 Ω en el circuito de la figura 9.56, de manera que el circuito esté estrictamente amortiguado. Calcular la energía almacenada en el inductor en $t = 100$ ms.

52. Encontrar la expresión de i_L como se indica en la figura 9.58, válida para $t > 0$.

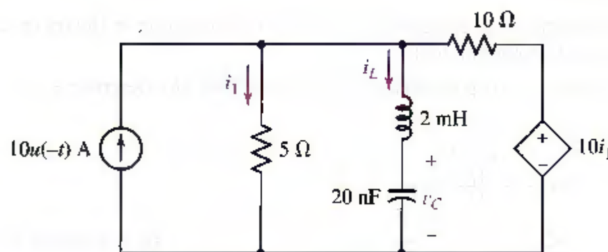


FIGURA 9.58

53. Encontrar la expresión de v_C como se indica en la figura 9.58, válida para $t > 0$.

54. Con referencia al circuito que se muestra en la figura 9.59, obtener la expresión de i_1 válida para todo tiempo si $C = 1$ F.

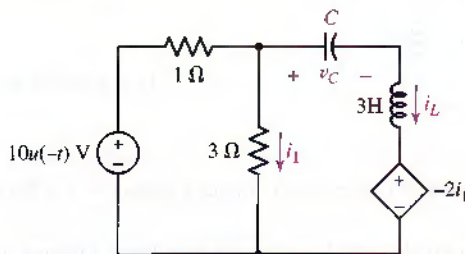


FIGURA 9.59

55. Con referencia al circuito que se muestra en la figura 9.59, obtener la expresión de v_C válida para todo tiempo si $C = 1$ mF.

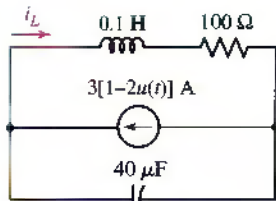


FIGURA 9.60

9.6 Respuesta completa del circuito *RLC*

56. (*a*) Determinar $i_L(t)$ para todo t en el circuito de la figura 9.60. (*b*) ¿En qué instante, después de $t = 0$ se tiene $i_L(t) = 0$?

57. La fuente del circuito de la figura 9.53 cambia en $10u(t)$ A. Calcular $i_L(t)$.

58. Sustituir la fuente del circuito de la figura 9.55 con $i_s = 0.5[1 - 2u(t)]$ A y calcular $i_L(t)$.

59. Sustituir la fuente del circuito de la figura 9.47 con $i_s = 2[1 + u(t)]$ A y determinar $i_C(t)$ para $t > 0$.

60. (*a*) Determinar $v_C(t)$ para $t > 0$ en el circuito que se presenta en la figura 9.61. (*b*) Graficar $v_C(t)$ en función de t, $-0.1 < t < 2$ ms.

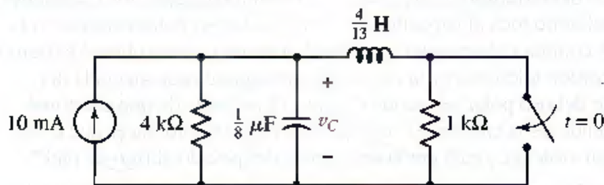
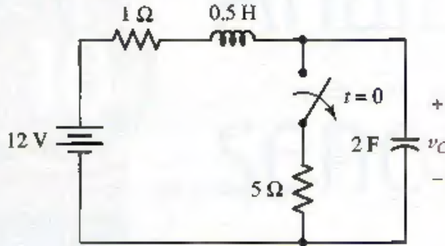
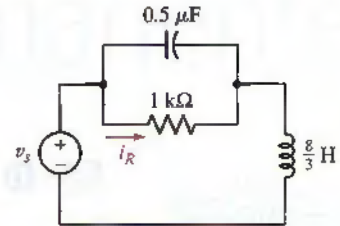


FIGURA 9.61

61. El interruptor del circuito de la figura 9.62 ha estado cerrado durante mucho tiempo. Abre en $t = 0$. Calcular $v_C(t)$ para $t > 0$.



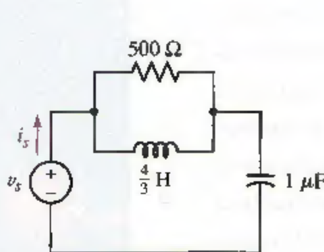
■ **FIGURA 9.62**



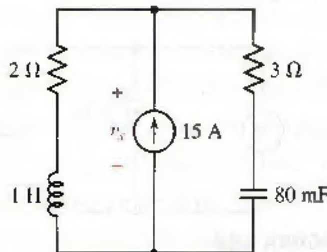
■ **FIGURA 9.63**

62. Determinar $i_R(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura 9.63 si $v_s(t)$ es igual a (*a*) $10u(-t)$ V; (*b*) $10u(t)$ V.

63. Obtener $i_s(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura 9.64 si $v_s(t)$ es igual a (*a*) $10u(-t)$ V; (*b*) $10u(t)$ V.



■ **FIGURA 9.64**



■ **FIGURA 9.65**

64. Sustituir a la resistencia de 2 Ω en el circuito de la figura 9.65 por un inductor de 3 H. Determinar la energía almacenada en el capacitor en $t = 200$ ms si la fuente de corriente se incrementa de 15 A a 22 A en $t = 0$. Verificar la respuesta con una simulación en PSpice.

65. La fuente de corriente del circuito de la figura 9.65 se incrementa en forma repentina desde 15 A hasta 22 A en $t = 0$. Calcular la tensión v_s en: (*a*) $t = 0^-$; (*b*) $t = 0^+$; (*c*) $t = \infty$; (*d*) $t = 3.4$ s. Verificar la respuesta mediante las simulaciones apropiadas en PSpice.

66. La fuente de corriente del circuito de la figura 9.65 disminuye de manera repentina de 15 A a 0 A en $t = 0$, y luego se incrementa hasta 3 A en $t = 1$ s. Graficar la tensión $v_s(t)$. Verificar la solución mediante PSpice.

67. Un inductor de 5 mH un capacitor de 25 μF y una resistencia de 20 Ω están en serie con una fuente de tensión $v_x(t)$. La tensión de la fuente es cero antes de $t = 0$. En $t = 0$, la tensión brinca hasta 75 V, en $t = 1$ ms disminuye hasta cero, en $t = 2$ ms vuelve a brincar hasta 75 V, y continúa comportándose de este modo periódico de aquí en adelante. Determinar la corriente de la fuente en: (*a*) $t = 0^-$; (*b*) $t = 0^+$; (*c*) $t = 1$ ms; (*d*) $t = 2$ ms.

68. Diseñar un circuito que produzca un pulso senoidal amortiguado con una tensión máxima de 5 V, y al menos tres máximos adicionales con magnitudes de tensión mayores que 1 V. Verificar el diseño con PSpice.

69. Una batería de 12 V se coloca en una choza en una isla desierta de algún lugar del Pacífico. La terminal positiva de la batería se conecta a un extremo de un capacitor de 314.2 pF en serie con un inductor de 869.1 μH. Un terremoto en las islas Bonin, de Japón, genera un tsunami que irrumpe en la choza, derramando agua salada sobre un trapo que conecta el otro extremo de la combinación inductor/capacitor con la terminal negativa de la batería, de manera que se forma un circuito *RLC* en serie. Un barco cercano detecta la oscilación resultante al monitorear una señal de radiofaro a 290.5 kHz (1.825 Mrad/s). ¿Cuál es la resistencia del trapo húmedo?

70. Calcular la tensión $v_C(t)$ en el capacitor de la figura 9.66 en $t = 1$ ms. Verificar la respuesta con una simulación en PSpice.

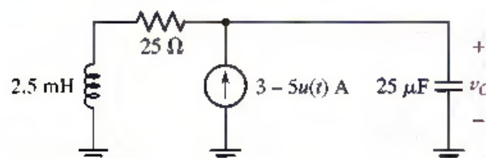


FIGURA 9.66

9.7 Circuito *LC* sin pérdidas

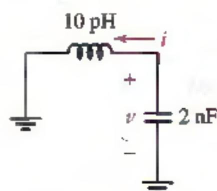


FIGURA 9.67

71. Diseñar un circuito de amp op para hacer el modelo para la respuesta en tensión del circuito *LC* que se muestra en la figura 9.67. Verificar el diseño simulando el circuito de la figura 9.67 y su circuito empleando un amp op LF 411, suponiendo $v(0) = 0$ e $i(0) = 1$ mA.

72. Observar la figura 9.68, y diseñar un circuito de amp op cuya salida será $i(t)$ para $t > 0$.

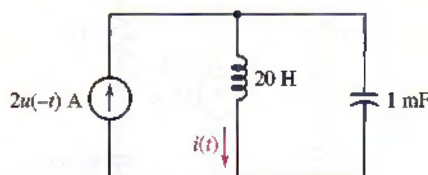


FIGURA 9.68

73. Un circuito *RC* sin fuente se construye con una resistencia de 1 kΩ y un capacitor de 3.3 mF. La tensión inicial en el capacitor es de 1.2 V. (*a*) Escribir la ecuación diferencial de v (la tensión en el capacitor) para $t > 0$. (*b*) Diseñar un circuito de amp op que proporcione $v(t)$ como salida.

74. Sustituir el capacitor del circuito de la figura 9.67 por un inductor de 20 H en paralelo con un capacitor de 5 μF. Diseñar un circuito de amp op cuya salida sea $i(t)$ para $t > 0$. Verificar el diseño simulando el circuito de capacitor-inductor y su circuito de amp op. Utilizar un amp op LM111 en la simulación con PSpice.

75. Un circuito *RL* sin fuente contiene una resistencia de 20 Ω y un inductor de 5 H Si el valor inicial de la corriente del inductor es de 2 A: (*a*) escribir la ecuación diferencial relativa a i para $t > 0$, (*b*) diseñar un integrador de amp op para proporcionar $i(t)$ como salida, utilizando $R_1 = 1$ MΩ y $C_f = 1$ μF.

CAPÍTULO 10

Análisis de estado senoidal permanente

CONCEPTOS CLAVE

- Características de las funciones senoidales.
- Representación fasorial de senoidales.
- Conversión entre los dominios del tiempo y la frecuencia.
- Impedancia y admitancia.
- Reactancia y susceptancia.
- Combinaciones en serie y en paralelo en el dominio de la frecuencia.
- Determinación de la respuesta forzada utilizando fasores.
- Aplicación de las técnicas del análisis de circuitos en el dominio de la frecuencia.

INTRODUCCIÓN

La respuesta completa de un circuito eléctrico lineal se compone de dos partes: la respuesta *natural* y la respuesta *forzada*
La primera es la respuesta transitoria de corta vida de un circuito ante un cambio repentino en su condición y la segunda es la respuesta de estado permanente a largo plazo de un circuito a cualquier fuente independiente presente. Hasta este punto, la única respuesta forzada considerada es la que se debe a las fuentes de cd. Otra función forzada muy común es la forma de onda senoidal, que describe la tensión disponible en las tomas de corriente eléctrica doméstica, así como la tensión de las líneas de potencia que se conectan a las áreas residenciales e industriales.

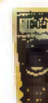
En este capítulo se supone que la respuesta transitoria es de poco interés, así que se necesita la respuesta de estado permanente de un circuito (aparato de televisión, tostador o red de distribución de potencia) a una tensión o corriente senoidal. Se analizará este tipo de circuito con una técnica poderosa que transforma las ecuaciones integrodiferenciales en ecuaciones algebraicas.

10.1 CARACTERÍSTICAS DE LAS SENOIDALES

Considerar la siguiente tensión variable senoidalmente:

$$v(t) = V_m \operatorname{sen} \omega t$$

cuya gráfica se muestra en la figura 10.1*a* y *b*. La *amplitud* de la onda senoidal es V_m, y el *argumento* es ωt. La *frecuencia radián,* o *frecuencia angular,* corresponde a ω. En la figura 10.1*a*, $V_m \operatorname{sen}\omega t$ se grafica como una función del argumento ωt, de donde resulta evidente la naturaleza periódica de la onda senoidal. La función se repite cada 2π radianes y su ***periodo*** es en consecuencia 2π radianes. En la figura 10.1*b*, $V_m \operatorname{sen}\omega t$ se grafica como una función de *t* y el *periodo* es ahora *T*. Una onda senoidal que tiene un periodo *T* debe



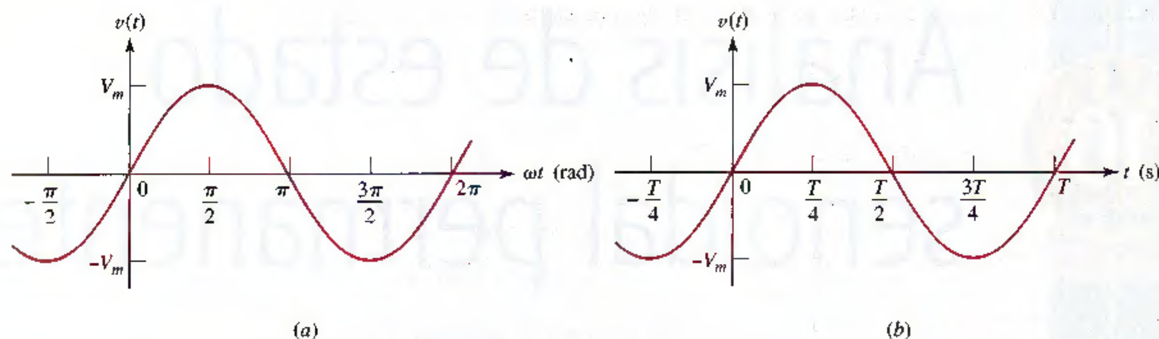


FIGURA 10.1 Función senoidal $v(t) = V_m$ sen ωt graficada (*a*) en función de ωt y (*b*) en función de t.

completar $1/T$ periodos cada segundo; su ***frecuencia*** f es $1/T$ hertz, abreviado Hz. De tal modo,

$$f = \frac{1}{T}$$

y en vista de que

$$\omega T = 2\pi$$

se obtiene la relación común entre la frecuencia y la frecuencia radián.

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

Retraso y adelanto

Una forma más general de la senoide

$$v(t) = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \qquad [1]$$

incluye un *ángulo de fase* θ en su argumento. La ecuación [1] se grafica en la figura 10.2 como una función de ωt, y el ángulo de fase aparece como el número de radianes mediante los cuales la onda senoidal original (que se indica en el dibujo mediante una línea punteada) se corre hacia la izquierda o al tiempo anterior. En razón de que los puntos correspondientes sobre la senoide $V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ ocurren θ rad, o θ/ω segundos antes, se dice que $V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ *adelanta a* V_m senωt en θ rad. Por lo tanto, es correcto describir a sen ωt como ***retrasada*** respecto de sen$(\omega t + \theta)$ en θ rad, ***adelantada*** de sen$(\omega t + \theta)$ por $-\theta$ rad, o adelantada de sen$(\omega t - \theta)$ en θ rad.

Recordar que para convertir radianes en grados simplemente se multiplica el ángulo por $180/\pi$.

En cualquier caso, adelantada o retrasada, se dice que las senoides están *fuera de fase*. Si los ángulos de fase son iguales, se señala que las senoides están *en fase*.

En ingeniería eléctrica se acostumbra indicar el ángulo de fase en grados, en vez de hacerlo en radianes; para evitar confusiones es necesario asegurarse de

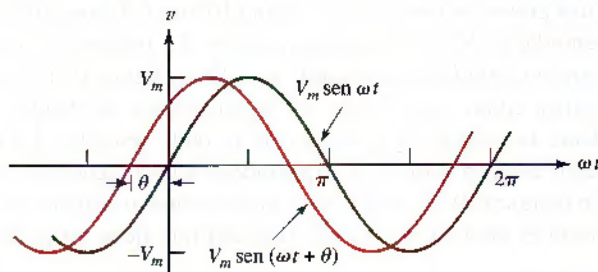


FIGURA 10.2 La onda senoidal V_m sen$(\omega t + \theta)$ adelanta a V_m sen ωt por θ radianes.

usar siempre el símbolo de grados. Por lo tanto, en lugar de escribir

$$v = 100\text{sen}\left(2\pi 1\,000t - \frac{\pi}{6}\right)$$

se suele utilizar

$$v = 100\text{sen}(2\pi 1\,000t - 30°)$$

Al evaluar esta expresión en un instante de tiempo específico, por ejemplo $t = 10^{-4}$ s, $2\pi 1\,000t$ se convierte en 0.2π *radianes*, lo cual debe expresarse como 36° antes de que se le resten 30°. No confundir sus manzanas con sus naranjas.



Dos ondas senoidales cuyas fases se van a comparar deben:

1. Escribirse como ondas seno o como ondas coseno.
2. Expresarse con amplitudes positivas.
3. Tener cada una la misma frecuencia angular o radián.

Conversión de senos en cosenos

En esencia, el seno y el coseno son la misma función, pero con una diferencia de fase de 90°. Por lo tanto, sen $\omega t = \cos(\omega t - 90°)$. Los múltiplos de 360° se suman o se restan del argumento de cualquier función senoidal sin que cambie el valor de esta última. En consecuencia, se podría afirmar que

$$\begin{aligned} v_1 &= V_{m_1}\cos(5t + 10°) \\ &= V_{m_1}\text{sen}(5t + 90° + 10°) \\ &= V_m\,\text{sen}(5t + 100°) \end{aligned}$$

conduce a

$$v_2 = V_{m_2}\text{sen}(5t - 30°)$$

en 130°. También es correcto señalar que v_1 *retrasa a* v_2 en 230°, puesto que v_1 puede escribirse como

$$v_1 = V_{m_1}\text{sen}(5t - 260°)$$

Observar que:

$-\text{sen}\,\omega t = \text{sen}(\omega t \pm 180°)$

$-\cos\omega t = \cos(\omega t \pm 180°)$

$\mp\text{sen}\,\omega t = \cos(\omega t \pm 90°)$

$\pm\cos\omega t = \text{sen}(\omega t \pm 90°)$

Se supone que V_{m_1} y V_{m_2} son cantidades positivas. En la figura 10.3 se ofrece una representación gráfica; observar que la frecuencia de ambas senoides (5 rad/s en este caso) debe ser la misma, o la comparación no tiene sentido. A menudo, la diferencia de fase entre dos senoides se expresa mediante el ángulo que sea menor o igual a 180° en magnitud.

El concepto de una relación de adelanto o retraso entre dos senoides se usará en forma extensa, así que la relación debe ser reconocible tanto matemática como gráficamente.



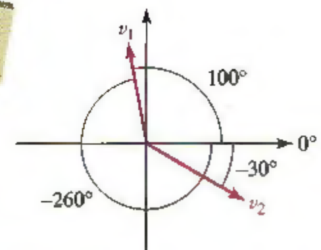


FIGURA 10.3 Representación gráfica de dos senoides v_1 y v_2. La magnitud de cada función seno se representa mediante la longitud de la flecha correspondiente y el ángulo de fase por la orientación con respecto al eje *x* positivo. En este diagrama, v_1 adelanta a v_2 100° + 30° = 130°, aunque podría argumentarse que v_2 adelanta a v_1 en 230°. Sin embargo, suele expresarse la diferencia de fase por un ángulo menor o igual a 180° en magnitud.

PRÁCTICA

10.1 Determinar el ángulo mediante el cual i_1 está retrasada respecto a v_1, si $v_1 = 120\cos(120\pi t - 40°)$ V e i_1 es igual a: (*a*) $2.5\cos(120\pi t + 20°)$ A; (*b*) $1.4\text{sen}(120\pi t - 70°)$ A; (*c*) $-0.8\cos(120\pi t - 110°)$ A.

10.2 Calcular $A, B, C,$ y ϕ si $40\cos(100t - 40°) - 20\text{sen}(100t + 170°) = A\cos 100t + B\,\text{sen}\,100t = C\cos(100t + \phi)$.

Respuestas: 10.1: −60°; 120°; −110°. 10.2: 27.2; 45.4; 52.9; −59.1°.

10.2 RESPUESTA FORZADA A FUNCIONES SENOIDALES

Una vez familiarizado con las características matemáticas de las senoides, se está listo para aplicar una función forzada senoidal a un circuito simple y obtener la respuesta forzada. Se escribe primero la ecuación diferencial que se aplica al circuito dado. La solución completa de esta ecuación está compuesta por dos partes: la solución complementaria (que se denomina *respuesta natural*) y la integral particular (o *respuesta forzada*). Los métodos que se planean desarrollar en este capítulo suponen que no interesa el transitorio de corta vida o la respuesta natural del circuito, sino sólo la respuesta de largo plazo o de "estado permanente".

Respuesta de estado permanente

PRECAUCIÓN

El término *respuesta de estado permanente* se usa como sinónimo de *respuesta forzada,* por lo que, en general, se dirá que los circuitos que se van a analizar estarán en "estado permanente senoidal". Desafortunadamente, la expresión *estado permanente* lleva la connotación de "no cambiar con el tiempo" a las mentes de muchos estudiantes. Lo anterior es válido para las funciones forzadas, pero la respuesta senoidal de estado permanente en definitiva cambia con el tiempo. El estado permanente se refiere sólo a la condición que se alcanza después de que se anula la respuesta transitoria o natural.

La respuesta forzada tiene la forma matemática de la función forzada, más todas sus derivadas y su primera integral. Con este conocimiento, uno de los métodos mediante el que se calcula la respuesta forzada consiste en suponer una solución compuesta por una suma de tales funciones, donde cada una tiene que determinar una amplitud desconocida mediante la sustitución directa en la ecuación diferencial. Como se podrá observar dentro de poco, éste puede ser un proceso muy lento, por lo que siempre se estará bastante motivado para buscar una alternativa más simple.

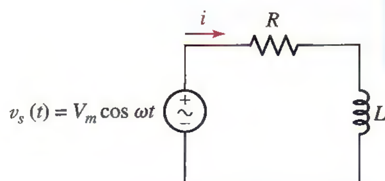


FIGURA 10.4 Circuito *RL* en serie para el cual se desea la respuesta forzada.

Considerar el circuito *RL* en serie de la figura 10.4. La tensión de fuente senoidal $v_s = V_m \cos \omega t$ se conmutó en el circuito en algún momento anterior y la respuesta natural se amortiguó por completo. Se busca la respuesta forzada (o "estado permanente"), que debe cumplir con la ecuación diferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$$

obtenida al aplicar la KVL alrededor del lazo simple. En cualquier instante en el que la derivada es igual a cero, se observa que la corriente debe tener la forma $i \propto \cos \omega t$. De manera similar, en el instante en el que la corriente es igual a cero, la *derivada* debe ser proporcional a cos ωt, lo que implica una corriente de la forma sen ωt. Por lo tanto, se podría esperar que la respuesta forzada tenga la forma general

$$i(t) = I_1 \cos \omega t + I_2 \operatorname{sen} \omega t$$

donde I_1 e I_2 son constantes reales cuyos valores dependen de V_m, R, L, y ω. No puede estar presente una función constante o una exponencial. Al sustituir la forma supuesta de la solución en la ecuación diferencial, se obtiene

$$L(-I_1\omega \operatorname{sen} \omega t + I_2\omega \cos \omega t) + R(I_1 \cos \omega t + I_2 \operatorname{sen} \omega t) = V_m \cos \omega t$$

Si se agrupan los términos coseno y seno, resulta

$$(-L\,I_1\omega + RI_2) \operatorname{sen} \omega t + (L\,I_2\omega + RI_1 - V_m) \cos \omega t = 0$$

Esta ecuación debe ser cierta para todos los valores de t, lo cual se logra sólo si los factores que multiplican a cos ωt y a sen ωt son cada uno cero. En consecuencia,

$$-\omega L\, I_1 + RI_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \omega L\, I_2 + RI_1 - V_m = 0$$

y la solución simultánea de I_1 e I_2 conduce a

$$I_1 = \frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2} \qquad I_2 = \frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}$$

De tal modo, la respuesta forzada se obtiene mediante

$$i(t) = \frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}\,\text{sen}\,\omega t \qquad [2]$$

Empleo de una forma más compacta y sencilla (más amigable)

Esta expresión, sin embargo, es un poco complicada; además, se obtiene una imagen más clara de la respuesta si se expresa como una sinusoide o una cosenoide simple con un ángulo de fase. Se elige expresar la respuesta como una función coseno:

$$i(t) = A\cos(\omega t - \theta) \qquad [3]$$

Al menos se sugieren por sí solos dos métodos para obtener los valores de A y θ. Se podría sustituir la ecuación [3] en forma directa en la ecuación diferencial original o simplemente igualar ambas soluciones: ecuaciones [2] y [3]. Al elegir el último método y desarrollar la función $\cos(\omega t - \theta)$:

En la parte interna de la portada del libro se proporcionan varias identidades trigonométricas útiles.

$$A\cos\theta\cos\omega t + A\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\omega t = \frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}\,\text{sen}\,\omega t$$

Por consiguiente, agrupando los coeficientes de cos ωt y sen ωt, se puede ver que:

$$A\cos\theta = \frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2} \qquad \text{y} \qquad A\,\text{sen}\,\theta = \frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}$$

Para determinar A y θ, se divide una ecuación entre la otra:

$$\frac{A\,\text{sen}\,\theta}{A\cos\theta} = \tan\theta = \frac{\omega L}{R}$$

y también se elevan al cuadrado ambas ecuaciones y se suman los resultados:

$$A^2\cos^2\theta + A^2\,\text{sen}^2\theta = A^2 = \frac{R^2V_m^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2} + \frac{\omega^2L^2V_m^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}$$

$$= \frac{V_m^2}{R^2+\omega^2L^2}$$

En consecuencia,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

y

$$A = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

Por lo tanto, la *forma alternativa* de la respuesta forzada se convierte en

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \qquad [4]$$

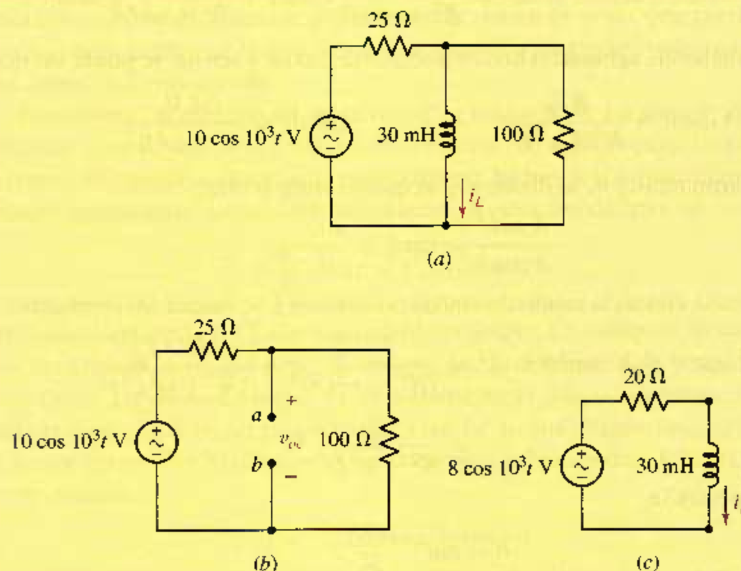
La amplitud de la *respuesta* es proporcional a la amplitud de la *función forzada;* si no es así, se descartaría el concepto de linealidad. La amplitud de la respuesta disminuye también cuando se incrementan R, L, o ω, aunque no en forma proporcional. Se observa que la corriente está retrasada respecto de la tensión aplicada por $\tan^{-1}(\omega L/R)$, un ángulo entre 0 y 90°. Cuando $\omega = 0$ o $L = 0$, la corriente debe estar en fase con la tensión; debido a que la primera situación corresponde a una corriente directa y la última da lugar a un circuito resistivo, los resultados concuerdan con la experiencia previa. Si $R = 0$, la corriente está retrasada de la tensión de 90°. En un inductor, entonces, si se satisface la convención de signos pasiva, la corriente está retrasada de la tensión de 90°. De una manera similar[1] se demuestra que la corriente que circula a través de un capacitor adelanta a la tensión de 90°.

La diferencia de fase entre la corriente y la tensión depende de la proporción entre las cantidades ωL y R. Se denomina a ωL como la *reactancia inductiva* del inductor, que se mide en ohms y es una medida de la oposición que ofrece el inductor al paso de una corriente senoidal.

Se verá cómo aplicar los resultados de este análisis general a un circuito específico que no es sólo un lazo en serie simple. Observar que, de manera implícita, se pasa por alto la respuesta transitoria; el supuesto es que sólo interesa la respuesta en estado estable o forzada del circuito, por lo que cualquiera y todos los transitorios se han eliminado.

EJEMPLO 10.1

Determinar la corriente i_L del circuito de la figura 10.5*a*.



■ **FIGURA 10.5** (*a*) Circuito del ejemplo 10.1, en el que se desea obtener la corriente i_L. (*b*) Se quiere calcular el equivalente de Thévenin en las terminales *a* y *b*. (*c*) Circuito simplificado.

[1] En el pasado, el símbolo E (para fuerza electromotriz) se utilizó para designar tensiones. Por ello, los estudiantes de lengua inglesa aprendían la frase "ELI the ICE man" como una forma de recordar que la *tensión* adelanta a la *corriente* en un *circuito inductivo*, en tanto que la *corriente* adelanta a la tensión en un circuito *capacitivo*. Ahora que se usa V en vez de la letra señalada, la situación ya no es la misma.

Aunque el circuito tiene una fuente senoidal y un único inductor, contiene dos resistencias y no es un lazo simple. Para aplicar los resultados del análisis precedente, se necesita encontrar el equivalente de Thévenin visto desde las terminales a y b de la figura 10.5b.

La tensión en circuito abierto v_{oc} es

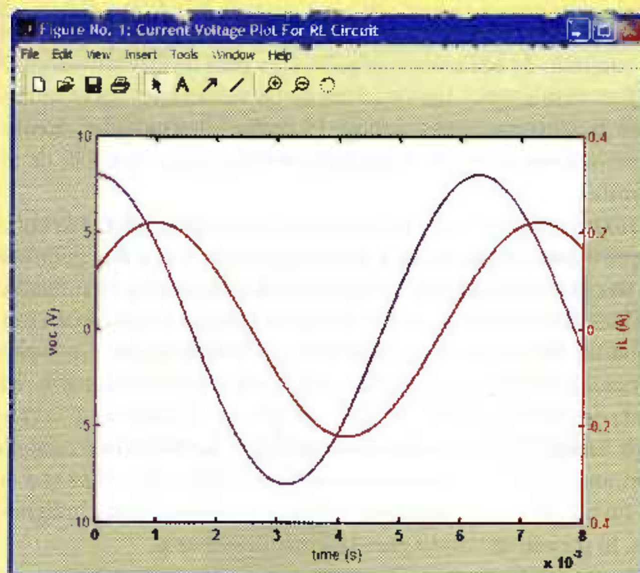
$$v_{oc} = (10 \cos 10^3 t)\frac{100}{100+25} = 8 \cos 10^3 t \qquad \text{V}$$

Puesto que no hay fuentes dependientes a la vista, se calcula R_{th} mediante la supresión de la fuente independiente para luego obtener la resistencia de la red pasiva, por lo que $R_{th} = (25 \times 100)/(25 + 100) = 20\ \Omega$.

Ahora se tiene un circuito RL en serie, con $L = 30$ mH, $R_{th} = 20\ \Omega$ y una tensión de fuente de 8 cos $10^3 t$ V, como se ilustra en la figura 10.5c. Así, al aplicar la ecuación [4], que se obtuvo de un circuito en serie RL general, se tiene que

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{8}{\sqrt{20^2 + (10^3 \times 30 \times 10^{-3})^2}} \cos\left(10^3 t - \tan^{-1}\frac{30}{20}\right) \\ &= 222 \cos(10^3 t - 56.3°) \text{ mA} \end{aligned}$$

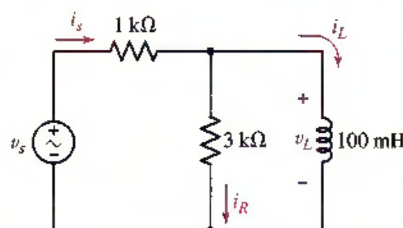
Las formas de onda de tensión y corriente se grafican en la figura 10.6.



■ **FIGURA 10.6** Formas de onda de tensión y corriente en una gráfica de eje dual que se generó mediante el uso de MATLAB:

```
EDU» t = linspace(0,8e-3,1000);
EDU» v = 8*cos(1000*t);
EDU» i = 0.222*cos(1000*t – 56.3*pi/180);
EDU» plotyy(t,v,t,i);
EDU» xlabel('time (s)');
```

Observar que no existe ninguna diferencia de fase de 90° entre las formas de onda de corriente y tensión de la gráfica. Lo anterior se debe a que no se está graficando la tensión en el inductor, la cual se deja como ejercicio para el lector.



■ **FIGURA 10.7**

PRÁCTICA

10.3 Sea $v_s = 40 \cos 8\,000t$ V en el circuito de la figura 10.7. Aplicar al teorema de Thévenin en los casos en que éste sea más adecuado, y determinar el valor en $t = 0$ para: *(a)* i_L; *(b)* v_L; *(c)* i_R; *(d)* i_s.

Respuestas: 18.71 mA; 15.97 V; 5.32 mA; 24.0 mA.

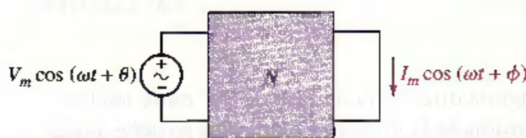
10.3 FUNCIÓN FORZADA COMPLEJA

El método con el que se determinó la respuesta senoidal de estado permanente del circuito *RL* en serie general no fue un problema trivial. Se podría pensar que las complicaciones analíticas surgen debido a la presencia del inductor; si ambos elementos pasivos hubieran sido resistencias, el análisis habría sido mucho muy sencillo, incluso con la función forzada senoidal presente. La razón de que el análisis hubiese sido tan fácil proviene de la relación tensión-corriente simple especificada por la ley de Ohm. Sin embargo, esta misma relación no es tan simple en el caso de un inductor, y en vez de resolver una ecuación algebraica uno se enfrenta con una ecuación diferencial no homogénea. Resultaría más bien bastante impráctico analizar cada circuito por el método que se describió en el ejemplo; por ello se planea formular un método para simplificar el análisis. El resultado será una relación algebraica entre la corriente senoidal y la tensión senoidal para inductores y capacitores, así como para resistencias; además, es factible obtener un conjunto de ecuaciones *algebraicas* para un circuito de cualquier complejidad. Las constantes y las variables en las ecuaciones serán números complejos en vez de números reales, aunque el análisis de cualquier circuito en estado senoidal permanente se vuelve casi tan sencillo como el análisis de un circuito resistivo similar.

Ahora se está listo para pensar en la aplicación de una función forzada compleja (esto es, una que tiene una parte *real* y una *imaginaria*) a una red eléctrica. Esto quizá parezca una idea extraña, pero se descubrirá que el uso de cantidades complejas en el análisis senoidal de estado permanente origina dos métodos mucho más simples que los que implican cantidades puramente reales. Se espera que una función forzada compleja propicie una respuesta compleja; la parte real de la función forzada originará la parte real de la respuesta, en tanto que la porción imaginaria de la función forzada dará como resultado la parte imaginaria de la respuesta. Por fortuna, lo anterior parece razonable: resultaría difícil pensar en un ejemplo de una fuente de tensión real que dé lugar a una respuesta imaginaria, y por extensión, lo mismo es válido para la situación inversa.

En la figura 10.8, una fuente senoidal descrita por

$$V_m \cos(\omega t + \theta) \qquad [5]$$



■ **FIGURA 10.8** La función forzada senoidal $V_m \cos(\omega t + \theta)$ produce la respuesta senoidal de estado permanente $I_m \cos(\omega t + \phi)$.

se conecta a una red general, la cual se supondrá que contiene sólo elementos pasivos (es decir, sin fuentes independientes) para no tener que apelar al principio de superposición. Se debe determinar una respuesta de corriente en alguna otra rama de la red, por lo que los parámetros que aparecen en la ecuación [5] son cantidades reales, sin excepción.

Se muestra que podría representarse la respuesta mediante la función coseno general:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) \qquad [6]$$

Una función forzada senoidal siempre da lugar a una respuesta forzada senoidal de la misma frecuencia en un circuito lineal.

Se cambiará ahora la referencia de tiempo corriendo la fase de la función forzada de 90°, o cambiando el instante que se denomina $t = 0$. De tal forma, cuando se aplica la función forzada,

$$V_m \cos(\omega t + \theta - 90^\circ) = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \qquad [7]$$

a la misma red, causará una respuesta correspondiente, esto es,

$$I_m \cos(\omega t + \phi - 90^\circ) = I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad [8]$$

A continuación se parte de la realidad física al aplicar una función forzada imaginaria, una que no se puede aplicar en el laboratorio, pero sí de manera matemática.

Fuentes imaginarias conducen a . . . respuestas imaginarias

Se construye una fuente imaginaria de modo muy simple; sólo es necesario multiplicar la ecuación [7] por j, el operador imaginario. Se aplica entonces

$$j V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \qquad [9]$$

Los ingenieros eléctricos utilizan "j" en vez de "i" para representar $\sqrt{-1}$ y evitar confundirlo con las corrientes.

¿Cuál es la respuesta? Si se hubiera duplicado la fuente, el principio de linealidad requeriría que se duplicara la respuesta; la multiplicación de la función forzada por una constante k produciría la multiplicación de la respuesta por la misma constante k. El hecho de que la constante sea $\sqrt{-1}$ no cambia esta relación. La respuesta a la fuente imaginaria de la ecuación [9] es, entonces,

$$j I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad [10]$$

La fuente imaginaria y la respuesta se indican en la figura 10.9.

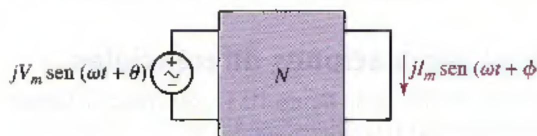


FIGURA 10.9 La función forzada senoidal imaginaria jV_m sen$(\omega t + \theta)$ produce la respuesta senoidal imaginaria jI_m sen$(\omega t + \phi)$ en la red de la figura 10.8.

Aplicación de una función forzada compleja

Se aplica una *fuente real* y se obtiene una respuesta *real*; también se aplica una fuente *imaginaria* y se logra una respuesta *imaginaria*. En razón de que se trabaja con un circuito *lineal* se podría recurrir al teorema de la superposición para

encontrar la respuesta a una función forzada compleja, que es la suma de las funciones forzadas real e imaginaria. De tal modo, la suma de las funciones forzadas de las ecuaciones [5] y [9] es

$$V_m \cos(\omega t + \theta) + j V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \qquad [11]$$

por lo cual debe producir una respuesta que es la suma de las ecuaciones [6] y [10]:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) + j I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad [12]$$

El apéndice 5 define los números complejos y los términos relacionados, hace un repaso de la aritmética compleja y desarrolla la identidad de Euler, así como la relación entre las formas exponencial y polar.

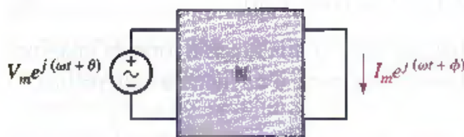
La fuente y la respuesta complejas tal vez se representan de manera más simple aplicando la identidad de Euler, la cual establece que $\cos(\omega t + \theta) + j \operatorname{sen}(\omega t + \theta) = e^{j(\omega t + \theta)}$. Por lo tanto, la fuente de la ecuación [11] se convierte entonces en

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} \qquad [13]$$

y la respuesta de la ecuación [12] es

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} \qquad [14]$$

La fuente y la respuesta complejas se ilustran en la figura 10.10.



■ **FIGURA 10.10** La función forzada compleja $V_m e^{j(\omega t + \theta)}$ produce la respuesta compleja $I_m e^{j(\omega t + \theta)}$ en la red de la figura 10.8.

Una función forzada real, una imaginaria o una compleja tendrán como resultado, respectivamente, una respuesta real, imaginaria o compleja. Además, mediante la identidad de Euler y el teorema de superposición, una función forzada compleja se considera como la suma de una función forzada real y una imaginaria; la parte *real* de la respuesta compleja la produce la parte *real* de la función forzada compleja, en tanto que la parte *imaginaria* se debe a la parte *imaginaria* de dicha función.

El plan es que en lugar de aplicar una función forzada *real* para obtener la respuesta real que se desea, se sustituya una función forzada *compleja* cuya parte real es la función forzada real dada; se espera obtener una respuesta compleja cuya parte real sea la respuesta real deseada. La ventaja de este procedimiento es que las ecuaciones integrodiferenciales que describen la respuesta de estado permanente de un circuito se conviertan ahora en simples ecuaciones algebraicas.

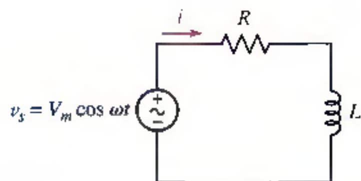
Alternativa algebraica a las ecuaciones diferenciales

Se ensaya esta idea en el circuito *RL* simple de la figura 10.11. Se aplica la fuente real $V_m \cos \omega t$ y se desea la respuesta real $i(t)$. Puesto que

$$\cos \omega t = \operatorname{Re}\{e^{j\omega t}\}$$

la fuente compleja necesaria es

$$V_m e^{j\omega t}$$



■ **FIGURA 10.11** Se va a analizar un circuito simple en estado senoidal permanente mediante la aplicación de una función forzada compleja.

Se expresa la respuesta compleja que se produce en términos de una amplitud desconocida I_m y un ángulo de fase desconocido ϕ:

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

Al escribir la ecuación diferencial de este circuito particular,

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v_s$$

se insertan las expresiones complejas de v_s e i:

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + L\frac{d}{dt}(I_m e^{j(\omega t+\phi)}) = V_m e^{j\omega t}$$

se toma la derivada indicada:

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)} = V_m e^{j\omega t}$$

y se obtiene una ecuación *algebraica*. Para determinar el valor de I_m y ϕ, se divide todo entre el factor común $e^{j\omega t}$:

$$RI_m e^{j\phi} + j\omega L I_m e^{j\phi} = V_m$$

Factorizando el lado izquierdo:

$$I_m e^{j\phi}(R + j\omega L) = V_m$$

y reordenando:

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

y se identifican I_m y ϕ expresando el lado derecho de la ecuación en forma exponencial o polar:

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(-\tan^{-1}(\omega L/R))} \qquad [15]$$

Por lo tanto,

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

y

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

En notación polar, esta expresión se escribiría como

$$I_m \underline{/\phi},$$

o

$$V_m/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\,\underline{/-\tan^{-1}\omega L/R}$$

La respuesta compleja está dada por la ecuación [15]. En razón de que I_m y ϕ se identifican con facilidad, se escribe de inmediato la expresión de $i(t)$. Sin embargo, si se necesita recurrir a un método más riguroso, se obtendría la respuesta real $i(t)$ reinsertando el factor $e^{j\omega t}$ en ambos lados de la ecuación [15] y tomando la parte real. De cualquier manera, se encuentra que

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

lo cual concuerda con la respuesta que se obtuvo en la ecuación [4] para el mismo circuito.

EJEMPLO 10.2

Determinar la tensión compleja en la combinación en serie de una resistencia de 500 Ω y un inductor de 95 mH si fluye la corriente compleja $8e^{j3000t}$ mA por los dos elementos en serie.

La tensión compleja desconocida tendrá una amplitud V_m y un ángulo de fase ϕ, los cuales deben determinarse. Sin embargo, es necesario que la tensión tenga la misma frecuencia que la corriente (3 000 rad/s), por lo que se expresa esta tensión como

$$V_m e^{j(3\,000t+\phi)}$$

Igualándola con la suma de las tensiones respectivas en la resistencia y en el inductor,

$$V_m e^{j(3\,000t+\phi)} = (500)0.008e^{j3\,000t} + (0.095)\frac{d(0.008e^{j3\,000t})}{dt}$$

y aplicando la derivada indicada, se encuentra que

$$V_m e^{j(3\,000t+\phi)} = 4e^{j3\,000t} + j2.28e^{j3\,000t}$$

Factorizando el término exponencial $e^{j3\,000t}$, uno se queda con:

$$V_m e^{j\phi} = 4 + j2.28$$

Al expresar el lado derecho en forma polar, se tiene

$$4 + j2.28 = 4.60e^{j29.7^\circ}$$

a partir de lo cual se puede observar que $V_m = 4.60$ V y $\phi = 29.7^\circ$, por lo que la tensión deseada es

$$4.60e^{j(3\,000t+29.7^\circ)}\ \text{V}$$

Si se pide determinar la respuesta real, sólo es necesario tomar la parte real de la respuesta compleja:

$$\text{Re}\{4.60e^{j(3\,000t+29.7^\circ)}\} = 4.60\cos(3000t + 29.7^\circ) \qquad \text{V}$$

En consecuencia, se puede determinar la respuesta forzada de un circuito que contiene un elemento de almacenamiento de energía ¡sin tener que resolver las ecuaciones diferenciales!

PRÁCTICA

(Si se tienen problemas al trabajar con este problema de práctica, consulte el apéndice 5)

10.4 Evaluar y expresar los resultados en forma rectangular o cartesiana: (*a*) $[(2\angle 30^\circ)(5\angle -110^\circ)](1 + j2)$; (*b*) $(5\angle -200^\circ) + 4\angle 20^\circ$. Evaluar y expresar el resultado en forma polar: (*c*) $(2 - j7)/(3 - j)$; (*d*) $8 - j4 + [(5\angle 80^\circ)/(2\angle 20^\circ)]$.

10.5 Si se especifica el uso de la convención de signos pasiva, determinar: (*a*) la tensión compleja que se produce cuando se aplica la corriente compleja $4e^{j800t}$ A a la combinación en serie de un capacitor de 1 mF y una resistencia de 2 Ω; (*b*) la corriente compleja que se obtiene cuando se aplica la tensión compleja $100e^{j2000t}$ V en una combinación en paralelo de un inductor de 10 mH y una resistencia de 50.

Respuestas: 10.4: $21.4 - j6.38$; $-0.940 + j3.08$; $2.30\angle -55.6^\circ$; $9.43\angle -11.22^\circ$. 10.5: $9.43e^{j(800t-32.0^\circ)}$ V; $5.39e^{j(2\,000t-68.2^\circ)}$ A.

10.4 EL FASOR

Una corriente o una tensión senoidal *a una frecuencia determinada* se caracteriza por sólo dos parámetros: amplitud y ángulo de fase. La representación compleja de la tensión o la corriente se caracteriza también por ambos parámetros. Por ejemplo, suponga una respuesta de corriente senoidal dada por

$$I_m \cos(\omega t + \phi)$$

donde la representación correspondiente de esta corriente en forma compleja es:

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

Una vez que se especifican I_m y ϕ la corriente se define de manera exacta. A través de cualquier circuito lineal que opera en estado senoidal permanente a una sola frecuencia angular ω, se podría caracterizar en forma completa cada corriente o cada tensión conociendo su amplitud y su ángulo de fase. Además, la representación compleja de cada tensión y de cada corriente contendrá el mismo factor $e^{j\omega t}$. Puesto que es el mismo para cada cantidad, no contiene información útil. Desde luego, se reconocería el valor de la frecuencia si se revisa uno de estos factores, aunque resulta mucho más simple escribir el valor de la frecuencia cerca del diagrama de circuito de una vez por todas y no ir cargando información redundante a lo largo de la solución. Por lo tanto, se podría simplificar la fuente de tensión y la respuesta de corriente del ejemplo 10.1 representándolas de manera concisa como

$$V_m \qquad \text{o} \qquad V_m e^{j0°}$$

$e^{j0} = \cos 0 + j \operatorname{sen} 0 = 1$

y

$$I_m e^{j\phi}$$

Estas cantidades complejas suelen escribirse en forma polar, en vez de exponencial, para conseguir un pequeño ahorro de tiempo y esfuerzo adicionales. Entonces, la tensión de fuente

$$v(t) = V_m \cos \omega t = V_m \cos(\omega t + 0°)$$

se representa ahora en forma compleja como

$$V_m \underline{/0°}$$

y la respuesta de corriente

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

se convierte en

$$I_m \underline{/\phi}$$

Se debe recordar que ninguno de los circuitos que se consideran responderá a una frecuencia que no sea la de la fuente de excitación, lo que siempre se conoce por el valor de ω.

Esta representación compleja abreviada recibe el nombre de *fasor*.[2]

Se revisarán los pasos mediante los cuales una tensión o corriente senoidal se transforma en un fasor, y luego se podrá definir un fasor con mayor sentido y asignar un símbolo para representarlo.

[2] El lector no debe confundirse con el *phaser*, un interesante dispositivo que se presenta en una popular serie de televisión...

Una corriente senoidal real

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

se expresa como la parte real de una cantidad compleja al recurrir a la identidad de Euler

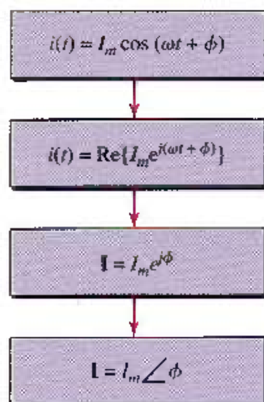
$$i(t) = \text{Re}\left\{I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\}$$

En este caso se representa la corriente como una cantidad compleja mediante la eliminación de la instrucción Re{}, con lo cual se suma una componente imaginaria a la corriente sin afectar la componente real; además, se logra una simplificación adicional si se suprime el factor $e^{j\omega t}$:

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$$

y se escribe el resultado en forma polar:

$$\mathbf{I} = I_m \underline{/\phi}$$



El proceso mediante el cual se cambia $i(t)$ a **I** recibe el nombre de *transformación fasorial* del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

Esta representación compleja abreviada es la *representación fasorial*; los fasores son cantidades complejas y por ello se escriben con negritas. Las letras mayúsculas se usan para la representación fasorial de una cantidad eléctrica debido a que el fasor no es una función instantánea del tiempo: sólo contiene información de la amplitud y la fase. Se reconoce esta diferencia del punto de vista si se considera a $i(t)$ como una *representación en el dominio del tiempo* y llamando al fasor **I** una *representación en el dominio de la frecuencia*. Se debe observar que la expresión en el dominio de la frecuencia de una corriente o de una tensión no incluye de manera explícita la frecuencia. Sin embargo, se podría considerar que la frecuencia es tan fundamental en el dominio de la frecuencia, que se destaca su omisión.

EJEMPLO 10.3

Transformar la tensión en el dominio del tiempo $v(t) = 100 \cos(400t - 30°)$ volts al dominio de la frecuencia.

La expresión en el dominio del tiempo ya está en la forma de una onda coseno con un ángulo de fase. Por lo tanto, al suprimir $\omega = 400$ rad/s, se tiene

$$\mathbf{V} = 100\underline{/-30°}\ \text{volts}$$

Observar que se han omitido varios pasos al escribir de manera directa dicha representación. En ocasiones, este procedimiento confunde a los estudiantes, pues olvidan que la representación fasorial *no* es igual a la tensión en el dominio del tiempo $v(t)$. En vez de eso, constituye una forma simplificada de una función compleja formada al sumar una componente imaginaria a la función real $v(t)$.

PRÁCTICA

Por conveniencia, se proporcionan varias identidades trigonométricas útiles en la parte interna de la portada.

10.6 Transformar cada una de las siguientes funciones del tiempo a la forma fasorial:
(*a*) $-5\,\text{sen}(580t - 110°)$; (*b*) $3\cos 600t - 5\,\text{sen}(600t + 110°)$;
(*c*) $8\cos(4t - 30°) + 4\,\text{sen}(4t - 100°)$. Sugerencia: convertir primero cada una en una función coseno simple con magnitud positiva.

Respuesta: $5\underline{/-20°}$; $2.41\underline{/-134.8°}$; $4.46\underline{/-47.9°}$.

El proceso de regresar al dominio del tiempo desde el dominio de la frecuencia es exactamente el inverso de la secuencia anterior. De tal manera, dada la tensión fasorial

$$\mathbf{V} = 115\underline{/-45^\circ} \text{ volts}$$

y conociendo que $\omega = 500$ rad/s, se puede escribir de manera directa el equivalente en el dominio del tiempo:

$$v(t) = 115\cos(500t - 45^\circ) \text{ volts}$$

Si se desea como una onda senoidal, $v(t)$ también podría escribirse como

$$v(t) = 115\,\text{sen}(500t + 45^\circ) \text{ volts}$$

PRÁCTICA

10.7 Sea $\omega = 2\,000$ rad/s y $t = 1$ ms. Obtener el valor instantáneo de cada una de las corrientes indicadas en la forma fasorial: (*a*) $j10$ A; (*b*) $20 + j10$ A; (*c*) $20 + j(10\underline{/20^\circ})$ A.

Respuestas: −9.09 A; −17.42 A; −15.44 A.

10.5 RELACIONES FASORIALES DE *R*, *L* Y *C*

El poder real de la técnica de análisis basada en fasores radica en el hecho de que se pueden definir relaciones *algebraicas* entre la tensión y la corriente en inductores y capacitores, del mismo modo que siempre se ha podido hacer en el caso de las resistencias. Ahora que se tiene la posibilidad de transformar dentro y fuera del dominio de la frecuencia, se procede a la simplificación del análisis del estado senoidal permanente estableciendo la relación entre la tensión fasorial y la corriente fasorial de cada uno de los tres elementos pasivos.

La resistencia

La resistencia es el caso más simple. En el dominio del tiempo, como se indica mediante la figura 10.12*a*, la ecuación de definición es

$$v(t) = Ri(t)$$

Se aplicará ahora la tensión compleja

$$v(t) = V_m e^{j(\omega t + \theta)} = V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m\,\text{sen}(\omega t + \theta) \qquad [16]$$

y se supone la respuesta de corriente compleja

$$i(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)} = I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m\,\text{sen}(\omega t + \phi) \qquad [17]$$

por lo que

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = Ri(t) = RI_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

Dividiendo entre $e^{j\omega t}$, se encuentra que

$$V_m e^{j\theta} = RI_m e^{j\phi}$$

o, en forma polar,

$$V_m\underline{/\theta} = RI_m\underline{/\phi}$$

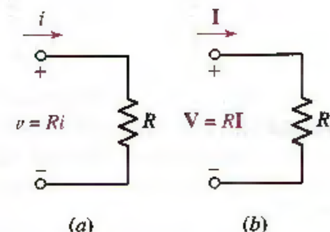


FIGURA 10.12 Una resistencia y su tensión y corriente asociadas en: (*a*) el dominio del tiempo, $v = Ri$; y (*b*) el dominio de la frecuencia, $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$.

Pero $V_m \underline{/\theta}$ e $I_m \underline{/\phi}$ representan sólo los fasores generales de tensión y de corriente **V** e **I**. Por lo tanto,

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad [18]$$

La ley de Ohm se cumple tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. En otras palabras, la tensión en la resistencia está dada siempre por la resistencia multiplicada por la corriente que fluye a través del elemento.

La relación tensión-corriente en forma fasorial de una resistencia tiene la misma forma que la relación entre la tensión y la corriente en el dominio del tiempo. La ecuación de definición en forma fasorial se ilustra en la figura 10.12*b*. Los ángulos θ y ϕ son iguales, por lo que la corriente y la tensión siempre están en fase.

Como un ejemplo del uso de las relaciones tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, se supone que existe una tensión de $8\cos(100t - 50°)$ V en una resistencia de 4 Ω. Al trabajar en el dominio del tiempo, se descubre que la corriente debe ser

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = 2\cos(100t - 50°) \qquad \text{A}$$

La forma fasorial de la misma tensión es $8\underline{/-50°}$ V, por lo que

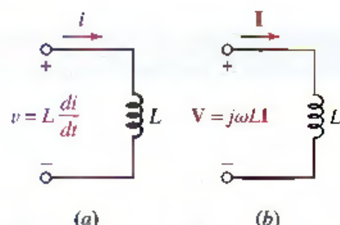
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = 2\underline{/-50°} \quad \text{A}$$

Si se transforma esta respuesta de nuevo en el dominio del tiempo, resulta evidente que se obtiene la misma expresión de la corriente. Se puede concluir que no hay ahorro de tiempo o esfuerzo cuando un circuito *resistivo* se analiza en el dominio de la frecuencia.

El inductor

Considerar ahora el inductor. La red en el dominio del tiempo se muestra en la figura 10.13*a*, y la ecuación de definición, una expresión en el dominio del tiempo, es

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad [19]$$



■ **FIGURA 10.13** Un inductor y su tensión y corriente asociadas en (*a*) el dominio del tiempo, $v = L\,di/dt$; y (*b*) en el dominio de la frecuencia, $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$.

Después de sustituir la ecuación [16] de la tensión compleja y la ecuación [17] de la corriente compleja en la ecuación [19], se tiene que

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = L\frac{d}{dt} I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

Tomando la derivada indicada,

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

y dividiendo entre $e^{j\omega t}$:

$$V_m e^{j\theta} = j\omega L I_m e^{j\phi}$$

se obtiene la relación fasorial que se desea:

$$\boxed{\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}} \qquad [20]$$

La ecuación diferencial [19] en el dominio del tiempo se ha convertido en la ecuación algebraica [20] en el dominio de la frecuencia. La relación fasorial se indica en la figura 10.13*b*. Observar que el ángulo del factor $j\omega L$ es exactamente +90° y que **I** debe, por lo tanto, estar retrasada de **V** de 90° en un inductor.

EJEMPLO 10.4

Aplicar la tensión $8\underline{/-50^\circ}$ V a una frecuencia $\omega = 100$ rad/s en un inductor de 4 H y determinar la corriente fasorial y la corriente en el dominio del tiempo.

Se utiliza la expresión del inductor que se acaba de obtener:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{8\underline{/-50^\circ}}{j100(4)} = -j0.02\underline{/-50^\circ} = (1\underline{/-90^\circ})(0.02\underline{/-50^\circ})$$

o

$$\mathbf{I} = 0.02\underline{/-140^\circ} \text{ A}$$

Si se expresa esta corriente en el dominio del tiempo, se tiene

$$i(t) = 0.02\cos(100t - 140^\circ) \text{ A} = 20\cos(100t - 140^\circ) \text{ mA}$$

El capacitor

El elemento final por considerar es el capacitor. La relación corriente-tensión en el dominio del tiempo es

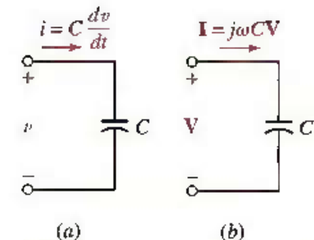
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

La expresión equivalente en el dominio de la frecuencia se obtiene una vez más dejando que $v(t)$ e $i(t)$ sean las cantidades complejas de las ecuaciones [16] y [17]; si se toma la derivada indicada, se suprime $e^{j\omega t}$, y se reconocen los fasores **V** e **I**, se obtiene

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \qquad [21]$$

De tal manera, **I** adelanta a **V** en 90° en un capacitor, lo cual, desde luego, no significa que ¡esté presente una respuesta de corriente un cuarto de periodo antes que la tensión que la provoca! Se está estudiando la respuesta de estado permanente, y se encuentra que la corriente máxima se debe a la tensión creciente que ocurre 90° antes que la tensión máxima.

Las representaciones en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia se comparan en la figura 10.14*a* y *b*. Se han obtenido ahora las relaciones **V**-**I** de los tres elementos pasivos. Los resultados se resumen en la tabla 10.1, donde las



■ **FIGURA 10.14** Relaciones (*a*) en el dominio del tiempo y (*b*) en el dominio de la frecuencia, entre la corriente del capacitor y la tensión.

TABLA **10.1** Comparación de las expresiones de tensión-corriente en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

Dominio del tiempo		Dominio de la frecuencia	
R (resistor, i, + v −)	$v = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$	*R* (resistor, **I**, + **V** −)
L (inductor, i, + v −)	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$	$j\omega L$ (inductor, **I**, + **V** −)
C (capacitor, i, + v −)	$v = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$	$\mathbf{V} = \dfrac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$	$1/j\omega C$ (capacitor, **I**, + **V** −)

expresiones *v-i* en el dominio del tiempo y las relaciones **V-I** en el dominio de la frecuencia de los tres elementos del circuito se muestran en columnas adyacentes. Todas las ecuaciones fasoriales son algebraicas, cada una es también lineal, y las ecuaciones que relacionan a la inductancia y la capacitancia guardan una gran similitud con la ley de Ohm. En realidad, se *usarán*, como se empleó la ley de Ohm.

Leyes de Kirchhoff con fasores

La ley de Kirchhoff de tensión en el dominio del tiempo establece que

$$v_1(t) + v_2(t) + \cdots + v_N(t) = 0$$

Se utiliza ahora la identidad de Euler para sustituir cada tensión real v_i por una tensión compleja que tenga la misma parte real, se suprime $e^{j\omega t}$ en todos lados y se obtiene

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_N = 0$$

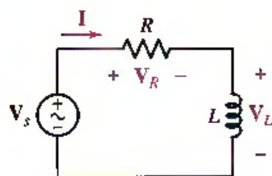


FIGURA 10.15 Circuito *RL* en serie con una tensión fasorial aplicada.

Por lo tanto, se verá que la ley de Kirchhoff de tensión se aplica a las tensiones fasoriales de la misma manera como ocurrió en el dominio del tiempo. Se prueba que la ley de corriente de Kirchhoff se cumple para las corrientes fasoriales mediante un argumento similar.

Considerar ahora brevemente el circuito RL en serie que se ha estudiado varias veces; se muestra en la figura 10.15 y se indican una corriente fasorial y varias tensiones fasoriales. Se obtendría la respuesta deseada, una corriente en el dominio del tiempo, mediante la determinación, en primer lugar, de la corriente fasorial. A partir de la ley de Kirchhoff de tensión, se tiene que

$$\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = \mathbf{V}_s$$

y utilizando las relaciones **V-I** de los elementos que acaban de obtenerse

$$R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} = \mathbf{V}_s$$

La corriente fasorial se encuentra entonces en términos de la tensión de la fuente $\mathbf{V}_s$:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{R + j\omega L}$$

Elegir una amplitud de la tensión de la fuente de V_m y un ángulo de fase de 0°. De tal modo,

$$\mathbf{I} = \frac{V_m\underline{/0^\circ}}{R + j\omega L}$$

La corriente se transformaría al dominio de tiempo si se le escribe primero en la forma polar, esto es,

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\underline{/(-\tan^{-1}(\omega L/R))}$$

y después, siguiendo la familiar secuencia de pasos para obtener de una manera muy sencilla el mismo resultado que se obtuvo anteriormente en este capítulo mediante el "camino difícil".

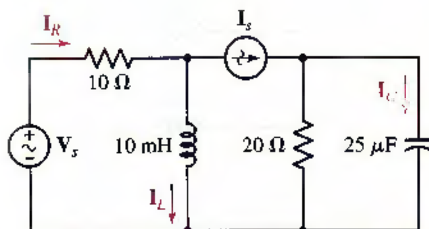


FIGURA 10.16

PRÁCTICA

10.8 En el circuito de la figura 10.16, sea $\omega = 1200$ rad/s, $\mathbf{I}_C = 1.2\underline{/28^\circ}$ A, e $\mathbf{I}_L = 3\underline{/53^\circ}$ A. Determinar (*a*) $\mathbf{I}_s$; (*b*) $\mathbf{V}_s$; (*c*) $i_R(t)$.

Respuesta: $2.33\underline{/-31.0^\circ}$ A; $34.9\underline{/74.5^\circ}$ V; $3.99\cos(1200t + 17.42^\circ)$ A.

10.6 IMPEDANCIA

Las relaciones de corriente-tensión de los tres elementos pasivos en el dominio de la frecuencia son (suponiendo que se satisface la convención de signos pasiva)

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

Si las ecuaciones se escriben como proporciones de tensión fasorial/corriente fasorial

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C}$$

se comprueba que las mismas son cantidades simples que dependen de los valores de los elementos (y de la frecuencia también, en el caso de la inductancia y la capacitancia). Estas proporciones se tratan de la misma manera que a las resistencias, con la excepción de que son cantidades complejas, por lo que todas las manipulaciones algebraicas deben ser las apropiadas para los números complejos.

Definir la proporción entre la tensión fasorial y la corriente fasorial como la ***impedancia***, simbolizada por la letra **Z**. Es una cantidad compleja que tiene las dimensiones en ohms; no es un fasor y no puede transformarse al dominio del tiempo multiplicándola por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real. En vez de eso, se piensa en un inductor que se representara en el dominio del tiempo mediante su inductancia L y en el dominio de la frecuencia por su impedancia $j\omega L$. Un capacitor en el dominio del tiempo tiene una capacitancia C; en el de la frecuencia, cuenta con una impedancia $1/j\omega C$. La impedancia es una parte del dominio de la frecuencia y no un concepto que sea parte del dominio del tiempo.



$\mathbf{Z}_R = R$
$\mathbf{Z}_L = j\omega L$
$\mathbf{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C}$

Combinaciones de impedancia en serie

La validez de las dos leyes de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia conduce al hecho de que pueden combinar las impedancias en serie y en paralelo mediante las mismas reglas ya establecidas para las resistencias. Por ejemplo, en $\omega = 10 \times 10^3$ rad/s, un inductor de 5 mH en serie con un capacitor de 100 μF se puede sustituir por una sola impedancia, que es la suma de las impedancias individuales. La impedancia del inductor es

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j50\ \Omega$$

la impedancia del capacitor está dada por

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = -j1\ \Omega$$

Por lo tanto, la impedancia de la combinación en serie corresponde a

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C = j50 - j1 = j49\ \Omega$$

Observar que $\frac{1}{j} = -j$.

La impedancia de inductores y de capacitores es una función de la frecuencia, y esta impedancia equivalente corresponde a una sola pulsación a la cual se calculó, ω = 10 000 rad/s. Si se cambia la frecuencia a ω = 5 000 rad/s, por ejemplo, $\mathbf{Z}_{eq} = j23\ \Omega$.



Combinaciones de impedancias en paralelo

La combinación en *paralelo* del inductor de 5 mH y el capacitor de 100 μF a ω = 10 000 rad/s se calcula exactamente del mismo modo que se calcularon las resistencias en paralelo:

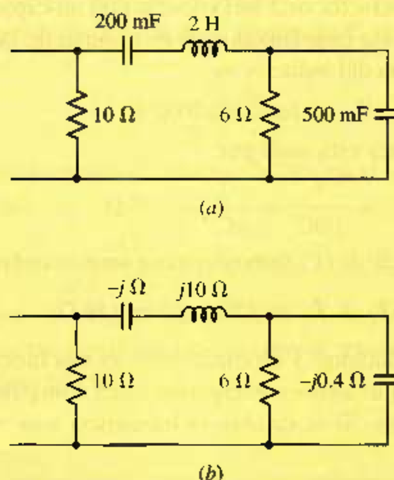
$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \frac{(j50)(-j1)}{j50 - j1} = \frac{50}{j49} = -j1.020\ \Omega$$

Con $\omega = 5\,000$ rad/s, el equivalente en paralelo es $-j2.17\ \Omega$.

El número complejo o cantidad que representa la impedancia puede expresarse en forma polar o en forma cartesiana. Por ejemplo, se dice que la impedancia $50 - j86.6\ \Omega$ tiene una *resistencia* de $50\ \Omega$ y una ***reactancia*** de $-86.6\ \Omega$. Por ello, la parte real de la impedancia se conoce con el nombre de ***resistencia***, mientras que la componente imaginaria (incluyendo el signo pero no la j) se conoce con el nombre de ***reactancia,*** la cual a menudo está simbolizada por la letra X. Ambas tienen unidades en ohms. En forma cartesiana, $\mathbf{Z} = R + jX$, y en forma polar, $\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}|\underline{/\theta}$. Por lo tanto, una resistencia tiene una reactancia cero, mientras que los capacitores e inductores (ideales) tienen una resistencia nula. Lo anterior también puede observarse directamente de la forma polar de la impedancia. Considerar de nuevo $\mathbf{Z} = 50 - j86.6\ \Omega$, que puede también escribirse como $100\underline{/-60^\circ}\ \Omega$. Puesto que el ángulo de fase no es cero, se sabe que la impedancia no es puramente resistiva a la frecuencia ω. Puesto que no es de $+90^\circ$ se sabe que no es puramente inductiva y, de manera similar, no es puramente capacitiva o el ángulo de fase sería de -90°. ¿Puede incluir una combinación en serie o en paralelo un capacitor y un inductor y tener una reactancia nula? *Claro que sí.* Considerar la situación donde $\omega = 1$ rad/s, $L = 1$ H, y $C = 1$ F, todas en serie con $R = 1\ \Omega$. La impedancia equivalente de esta red es $\mathbf{Z} = 1 + j(1)(1) - j/(1)(1) = 1\ \Omega$, como si (a la frecuencia de 1 rad/s) solamente estuviera presente una resistencia.

EJEMPLO 10.5

Determinar la impedancia equivalente de la red de la figura 10.17*a*, la cual produce una pulsación de operación de 5 rad/s.



■ **FIGURA 10.17** (*a*) Red que se va a sustituir por una sola impedancia equivalente. (*b*) Los elementos se sustituyen por sus impedancias en $\omega = 5$ rad/s.

En primer lugar se deben convertir las resistencias, capacitores y el inductor en las impedancias correspondientes, como se muestra en la figura 10.17*b*.

Luego de examinar la red resultante, se observa que la impedancia de 6 Ω está en paralelo con $-j0.4\ \Omega$. Esta combinación equivale a

$$\frac{(6)(-j0.4)}{6-j0.4} = 0.02655 - j0.3982\ \Omega$$

que está en serie con las impedancias $-j\ \Omega$ y $j10\ \Omega$ de modo que se tiene

$$0.0265 - j0.3982 - j + j10 = 0.02655 + j8.602\ \Omega$$

Esta nueva impedancia está en paralelo con 10 Ω, por lo que la impedancia equivalente de la red resulta ser

$$10 \parallel (0.02655 + j8.602) = \frac{10(0.02655 + j8.602)}{10 + 0.02655 + j8.602}$$
$$= 4.255 + j4.929\ \Omega$$

Alternativamente, se expresa la impedancia en forma polar como $6.511\underline{/49.20^\circ}\ \Omega$.

PRÁCTICA

10.9 De acuerdo con la red de la figura 10.18, determinar la impedancia de entrada $\mathbf{Z}_{ent}$ tque se mediría entre las terminales: (*a*) *a* y *g*; (*b*) *b* y *g*; (*c*) *a* y *b*.

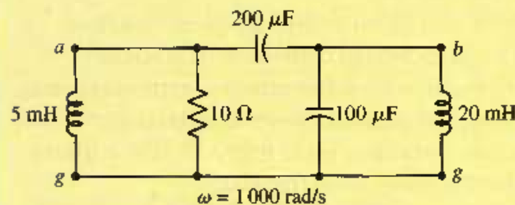


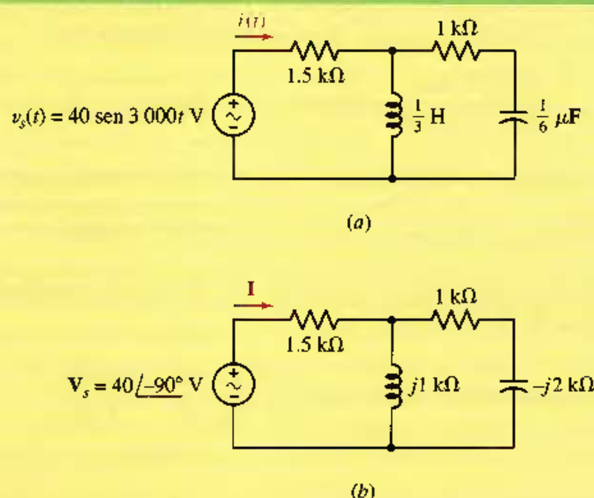
FIGURA 10.18

Respuestas: $2.81 + j4.49\ \Omega$; $1.798 - j1.124\ \Omega$; $0.1124 - j3.82\ \Omega$.

Es importante notar que la componente resistiva de la impedancia no necesariamente es igual a la resistencia que está presente en la red. Por ejemplo, una resistencia de 10 Ω y un inductor de 5 H en serie con $\omega = 4$ rad/s tiene una impedancia equivalente $\mathbf{Z} = 10 + j20\ \Omega$, o, en forma polar, $22.4\underline{/63.4^\circ}\ \Omega$. En este caso, la componente resistiva de la impedancia resulta igual a la resistencia en serie debido a que se trata de una red simple en serie. Sin embargo, si los dos elementos se ponen en paralelo, la impedancia equivalente es $10(j20)/(10 + j20)\ \Omega$, u $8 + j4\ \Omega$. El componente resistivo de la impedancia es ahora 8 Ω.

EJEMPLO 10.6

Determinar la corriente $i(t)$ en el circuito que se muestra en la figura 10.19*a*.



■ **FIGURA 10.19** (*a*) Circuito *RLC* para el que se desea la respuesta forzada senoidal $i(t)$. (*b*) Equivalente en el dominio de la frecuencia del circuito dado en $\omega = 3\,000$ rad/s.

Identificar el objetivo del problema.

Es necesario determinar la corriente senoidal de estado permanente que fluye por la resistencia de 1.5 kΩ debido a la fuente de tensión de 3 000 rad/s de pulsación.

Recopilar la información conocida.

En primer lugar debe dibujar un circuito en el dominio de la frecuencia. La fuente se transforma en la representación del dominio de la frecuencia $40\underline{/-90^\circ}$ V, la respuesta en el dominio de la frecuencia se representa como **I**, y las impedancias del inductor y el capacitor, determinadas a $\omega = 3\,000$ rad/s, son j kΩ y $-j2$ kΩ, respectivamente. En la figura 10.19*b* se ilustra el circuito correspondiente en el dominio de la frecuencia.

Decidir la técnica que mejor se ajusta al problema.

Se analizará el circuito de la figura 10.19*b* para obtener **I**; mediante la combinación de las impedancias y con base en el uso de la ley de Ohm es un método factible. Después se utilizará el hecho de que se conoce $\omega = 3\,000$ rad/s para convertir **I** en una expresión en el dominio del tiempo.

Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.

$$\mathbf{Z}_{eq} = 1.5 + \frac{(j)(1-2j)}{j+1-2j} = 1.5 + \frac{2+j}{1-j}$$

$$= 1.5 + \frac{2+j}{1-j}\frac{1+j}{1+j} = 1.5 + \frac{1+j3}{2}$$

$$= 2 + j1.5 = 2.5\underline{/36.87^\circ}\ \text{k}\Omega$$

En consecuencia, la corriente fasorial es simplemente:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}}$$

Determinar si se requiere información adicional.

Si se sustituyen los valores conocidos en la relación, se tendrá

$$\mathbf{I} = \frac{40\underline{/-90^\circ}}{2.5\underline{/36.87^\circ}} \text{ mA}$$

lo cual, junto con el conocimiento de que $\omega = 3\,000$ rad/s, resulta suficiente para resolver respecto de $i(t)$.

Buscar la solución.

Esta expresión compleja se simplifica con facilidad a un número complejo en forma polar:

$$\mathbf{I} = \frac{40}{2.5}\underline{/-90^\circ - 36.87^\circ} \text{ mA} \quad = 16.00\underline{/-126.9^\circ \text{ mA}}$$

Luego de transformar la corriente en el dominio del tiempo, se obtiene la respuesta deseada:

$$i(t) = 16\cos(3\,000t - 126.9^\circ) \text{ mA}$$

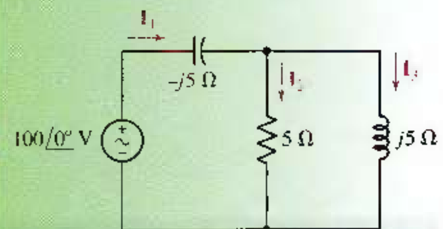
Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?

La impedancia efectiva conectada a la fuente tiene un ángulo de $+36.87^\circ$, lo que indica que presenta un carácter inductivo neto, o que la corriente estará retrasada respecto de la tensión. Puesto que la fuente de tensión tiene un ángulo de fase de -90° (luego de convertirse en una fuente de cosenos), se observa que la respuesta es congruente.

PRÁCTICA

10.10 En el circuito de la figura 10.20, determinar en el dominio de la frecuencia: (*a*) $\mathbf{I}_1$; (*b*) $\mathbf{I}_2$; (*c*) $\mathbf{I}_3$.

Respuestas: $28.3\underline{/45^\circ}$ A; $20\underline{/90^\circ}$ A; $20\underline{/0^\circ}$ A.



■ **FIGURA 10.20**



Antes de empezar a escribir muchas ecuaciones en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia, es muy importante que se evite la elaboración de ecuaciones que están parcialmente en el dominio del tiempo, parcialmente en el dominio de la frecuencia y son por completo incorrectas. Una pista que indica que se ha cometido un error es la aparición de un número complejo y de una t en la misma ecuación, salvo en el factor $e^{j\omega t}$. Y, puesto que $e^{j\omega t}$ desempeña un papel mucho mayor en las derivaciones que en las aplicaciones, conviene señalar que los estudiantes que descubran que crearon una ecuación con j y t, o con $\underline{/\ }$ y t, han formulado tal monstruo que el mundo estaría mejor sin él.

Por ejemplo, unas cuantas ecuaciones antes se vio que

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{40\underline{/-90^\circ}}{2.5\underline{/36.9^\circ}} = 16\underline{/-126.9^\circ} \text{ mA}$$

Por favor no intente nada como lo siguiente:

$$i(t) \not= \frac{40 \text{ sen } 3\,000t}{2.5\underline{/36.9^\circ}} \qquad \text{o} \qquad i(t) \not= \frac{40 \text{ sen } 3\,000t}{2 + j1.5}$$

10.7 ADMITANCIA

En ocasiones, se puede ver que el *recíproco* de la impedancia es una cantidad más conveniente. Con este espíritu, se define la ***admitancia*** **Y** de un elemento de circuito como la razón de la corriente fasorial y de la tensión fasorial (suponiendo que se satisface la convención de signos pasiva):

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}$$

y por ello

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}}$$

$$\mathbf{Y}_R = \frac{1}{R}$$

$$\mathbf{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}$$

$$\mathbf{Y}_C = j\omega C$$

La parte real de la admitancia es la ***conductancia*** G, y la parte imaginaria de la admitancia es la ***susceptancia*** B. De tal manera,

$$\mathbf{Y} = G + jB = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + jX} \qquad [22]$$



La ecuación [22] debe revisarse con cuidado; ¡*no* establece que la parte real de la admitancia sea igual al recíproco de la parte real de la impedancia, o que la parte imaginaria de la admitancia resulta igual al recíproco de la parte imaginaria de la admitancia!

La admitancia, la conductancia y la susceptancia se miden en siemens. Una impedancia

$$\mathbf{Z} = 1 - j2\ \Omega$$

que podría representarse, por ejemplo, mediante una resistencia de 1 Ω resistor en serie con un capacitor de 0.1 μF a $\omega = 5$ Mrad/s, posee una admitancia igual a

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{1 - j2} = \frac{1}{1 - j2}\frac{1 + j2}{1 + j2} = 0.2 + j0.4\ \text{S}$$

La admitancia equivalente de una red con varias ramas en paralelo es la suma de las admitancias de las ramas individuales. En consecuencia, el valor numérico de la admitancia que acaba de indicarse se puede obtener a partir de una conductancia de 0.2 S en paralelo con una susceptancia positiva de 0.4 S. Lo primero podría representarse por medio de una resistencia de 5 Ω y lo último por un capacitor de 0.08 μF a $\omega = 5$ Mrad/s, pues la admitancia de un capacitor es $j\omega C$.

Como una verificación del análisis, calcular la impedancia de esta última red, una resistencia de 5 Ω en paralelo con un capacitor de 0.08 μF a $\omega = 5$ Mrad/s. La impedancia equivalente se obtiene mediante

$$\mathbf{Z} = \frac{5(1/j\omega C)}{5 + 1/j\omega C} = \frac{5(-j2.5)}{5 - j2.5} = 1 - j2\,\Omega$$

como antes. Estas dos redes representan sólo a dos de un número infinito de redes diferentes que poseen esta misma impedancia y admitancia a esta frecuencia. Sin embargo, representan las únicas redes de dos elementos, y por ello podrían considerarse como las redes más simples que tienen una impedancia de $1 - j2$ Ω y una admitancia de $0.2 + j0.4$ S a la frecuencia $\omega = 5 \times 10^6$ rad/s.

A veces se usa el término ***inmitancia***, una combinación de las palabras *impedancia* y *admitancia,* como una expresión general tanto de la impedancia

como de la admitancia. Por ejemplo, resulta evidente que conocer la tensión fasorial en una inmitancia dada permite calcular la corriente que circula por ella.

PRÁCTICA

10.11 Determinar la admitancia (en forma rectangular) de: (*a*) una impedancia $\mathbf{Z} = 1\,000 + j400\ \Omega$; (*b*) una red compuesta por la combinación en paralelo de una resistencia de 800 Ω, un inductor de 1 mH y un capacitor de 2 nF si $\omega = 1$ Mrad/s; (*c*) una red constituida por la combinación en serie de una resistencia de 800 Ω, un inductor de 1 mH y un capacitor de 2 nF, si $\omega = 1$ Mrad/s.

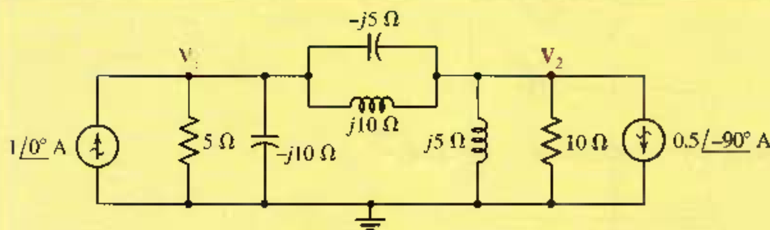
Respuestas: $0.862 - j0.345$ mS; $1.25 + j1$ mS; $0.899 - j0.562$ mS.

10.8 ANÁLISIS NODAL Y DE MALLA

Anteriormente se hizo un gran trabajo con las técnicas de análisis nodal y de malla, por lo que resulta razonable preguntar si podría ser válido un procedimiento similar en términos de fasores e impedancias para el estado senoidal permanente. Ya se sabe que ambas leyes de Kirchhoff resultan válidas en el caso de los fasores; además, se tiene una ley similar a la de Ohm para los elementos pasivos $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$. En otras palabras, las leyes sobre las que se sustenta el análisis nodal son verdaderas para los fasores y, por lo tanto, se debería proceder a analizar circuitos mediante técnicas nodales en el estado senoidal permanente. Con argumentos similares, se establece que los métodos del análisis de malla también resultan válidos (y a menudo útiles).

EJEMPLO 10.7

Determinar las tensiones de nodo $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en el dominio del tiempo del circuito de la figura 10.21.



■ **FIGURA 10.21** Circuito en el dominio de la frecuencia en el que se identifican las tensiones de nodo $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$.

Se indican como fasores dos fuentes de corriente, así como las tensiones de nodo fasoriales $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$. En el nodo izquierdo se aplica la LKC, de lo que resulta que:

$$\frac{\mathbf{V}_1}{5} + \frac{\mathbf{V}_1}{-j10} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{j10} = 1\underline{/0^\circ} = 1 + j0$$

(Continúa en la siguiente página)

En el nodo derecho:

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{j10} + \frac{\mathbf{V}_2}{j5} + \frac{\mathbf{V}_2}{10} = -(0.5\underline{/-90^\circ}) = j0.5$$

Combinando términos, se tiene

$$(0.2 + j0.2)\mathbf{V}_1 - j0.1\mathbf{V}_2 = 1$$

y

$$-j0.1\mathbf{V}_1 + (0.1 - j0.1)\mathbf{V}_2 = j0.5$$

Estas ecuaciones se resuelven con facilidad en la mayoría de las calculadoras científicas, y el resultado será $\mathbf{V}_1 = 1 - j2$ V y $\mathbf{V}_2 = -2 + j4$ V.

Las soluciones en el dominio del tiempo se obtienen expresando $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ en la forma polar:

$$\mathbf{V}_1 = 2.24\underline{/-63.4^\circ}$$
$$\mathbf{V}_2 = 4.47\underline{/116.6^\circ}$$

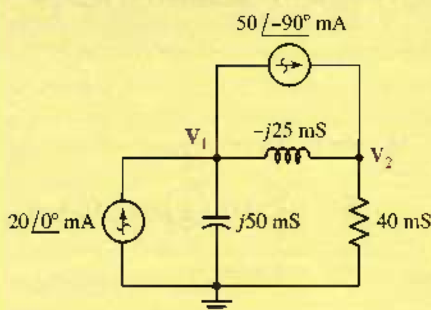
y pasando al dominio del tiempo:

$$v_1(t) = 2.24\cos(\omega t - 63.4^\circ)\ \text{V}$$
$$v_2(t) = 4.47\cos(\omega t + 116.6^\circ)\ \text{V}$$

Observar que el valor de ω tendría que conocerse para calcular los valores de impedancia dados en los diagramas de circuitos. También, *ambas fuentes deben operar a la misma frecuencia.*

PRÁCTICA

10.12 Aplicar el análisis nodal en el circuito de la figura 10.22 para determinar $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$.



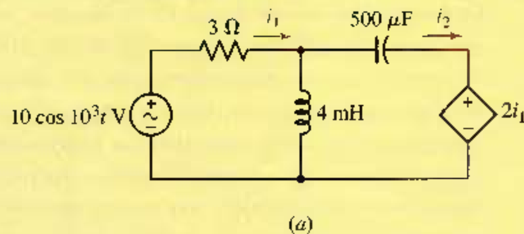
■ **FIGURA 10.22**

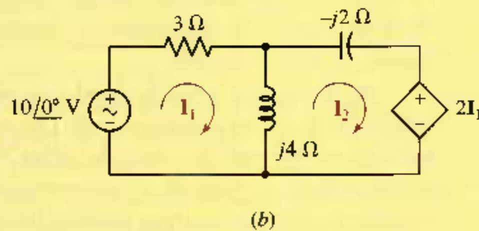
Respuesta: $1.062\underline{/23.3^\circ}$ V; $1.593\underline{/-50.0^\circ}$ V.

Considerar ahora un ejemplo del análisis de malla, teniendo presente de nuevo que todas las fuentes deben operar a la misma frecuencia. De otra forma, es imposible definir un valor numérico para cualquier reactancia en el circuito. Como se estudiará en la sección siguiente, la única manera de salvar un dilema de este tipo es mediante la superposición.

EJEMPLO 10.8

Obtener expresiones de las corrientes en el dominio del tiempo i_1 e i_2 en el circuito de la figura 10.23*a*.





■ **FIGURA 10.23** (*a*) Circuito en el dominio del tiempo que contiene una fuente dependiente. (*b*) Circuito correspondiente en el dominio de la frecuencia.

Al observar en la fuente izquierda del circuito de la figura 10.23*b* que $\omega = 10^3$ rad/s, se dibuja el circuito en el dominio de la frecuencia y se asignan las corrientes de malla $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. Alrededor de la malla 1, se tiene que

$$3\mathbf{I}_1 + j4(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 10\underline{/0^\circ}$$

o

$$(3 + j4)\mathbf{I}_1 - j4\mathbf{I}_2 = 10$$

mientras la malla 2 tiene como resultado

$$j4(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - j2\mathbf{I}_2 + 2\mathbf{I}_1 = 0$$

o

$$(2 - j4)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = 0$$

Despejando,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24\underline{/29.7^\circ}\text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77\underline{/56.3^\circ}\text{ A}$$

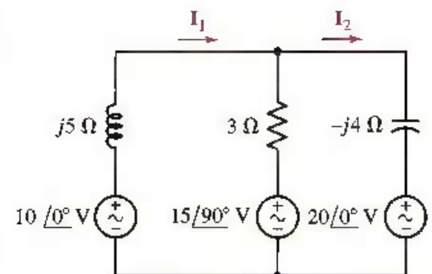
Por consiguiente,

$$i_1(t) = 1.24\cos(10^3t + 29.7^\circ)\text{ A}$$
$$i_2(t) = 2.77\cos(10^3t + 56.3^\circ)\text{ A}$$

PRÁCTICA

10.13 Aplicar el análisis de malla en el circuito de la figura 10.24 a fin de determinar $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$.

Respuestas: $4.87\underline{/-164.6^\circ}$ A; $7.17\underline{/-144.9^\circ}$ A.



■ **FIGURA 10.24**

APLICACIÓN PRÁCTICA

Frecuencia de corte de un amplificador transistorizado

Los circuitos del amplificador basados en transistores constituyen una parte integral de muchos instrumentos electrónicos modernos. Una aplicación común se encuentra en los teléfonos celulares (figura 10.25), donde las señales de audio se superponen sobre ondas portadoras de alta frecuencia. Desafortunadamente, los transistores incluyen capacitancias integradas que implican limitaciones en las frecuencias a las cuales pueden usarse, así que este hecho debe considerarse cuando se elige un transistor para una aplicación específica.

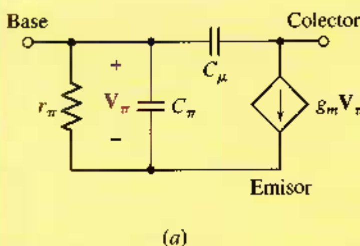


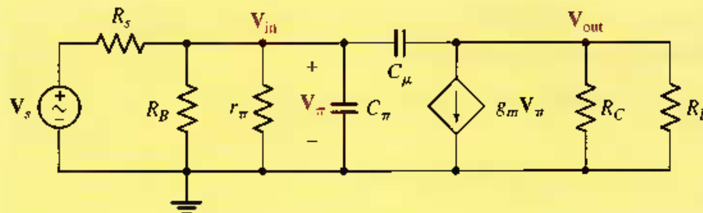
■ **FIGURA 10.25** Los amplificadores transistorizados se utilizan en muchos dispositivos, entre ellos los teléfonos celulares. A menudo, los modelos de circuitos lineales se utilizan para analizar su desempeño en función de la frecuencia.
Cortesía de Nokia.

La figura 10.26*a* muestra lo que se conoce comúnmente como un *modelo híbrido* π *de alta frecuencia* para un transistor de unión bipolar. En la práctica, aunque los transistores son dispositivos *no lineales*, se encuentra que este circuito *lineal* simple efectúa un trabajo razonablemente preciso al hacer el modelo del comportamiento del dispositivo real. Los dos capacitores C_π y C_μ se utilizan para representar capacitancias internas que caracterizan al transistor particular utilizado; además, se agregan capacitores adicionales, así como resistencias, para aumentar la exactitud del modelo, según sea necesario. La figura 10.26*b* muestra el modelo de transistor insertado en un circuito de amplificador conocido como amplificador de emisor común.

Suponiendo una señal de estado senoidal permanente representada por su equivalente de Thévenin $\mathbf{V}_s$ y R_s, interesa la razón entre la tensión de salida $\mathbf{V}_{sal}$ con respecto a la tensión de entrada $\mathbf{V}_{ent}$. La presencia de las capacitancias de transistor internas provoca una reducción en la amplificación a medida que aumenta la frecuencia de $\mathbf{V}_s$; a la larga, este fenómeno limita las frecuencias a las cuales el circuito operará de manera apropiada. Al escribir una ecuación nodal a la salida se obtiene

$$-g_m\mathbf{V}_\pi = \frac{\mathbf{V}_{sal} - \mathbf{V}_{ent}}{(1/j\omega C_\mu)} + \frac{\mathbf{V}_{sal}}{(R_C \parallel R_L)}$$





■ **FIGURA 10.26** (*a*) Modelo de transistor híbrido π de alta frecuencia. (*b*) Circuito amplificador de emisor común que utiliza el modelo de transistor híbrido π.

10.9 SUPERPOSICIÓN, TRANSFORMACIONES DE FUENTE Y TEOREMA DE THÉVENIN

Después de que se presentaron los inductores y los capacitores en el capítulo 7, se puede ver que los circuitos que contienen tales elementos mantenían su linealidad y que los beneficios de ésta estaban otra vez disponibles. Entre dichos beneficios se encuentran el principio de superposición, los teoremas de Thévenin y de Norton y las transformaciones de fuente.

Al resolver para $\mathbf{V}_{sal}$ en términos de $\mathbf{V}_{ent}$, y observar que $\mathbf{V}_\pi = \mathbf{V}_{ent}$, se tiene una expresión para la ganancia del amplificador:

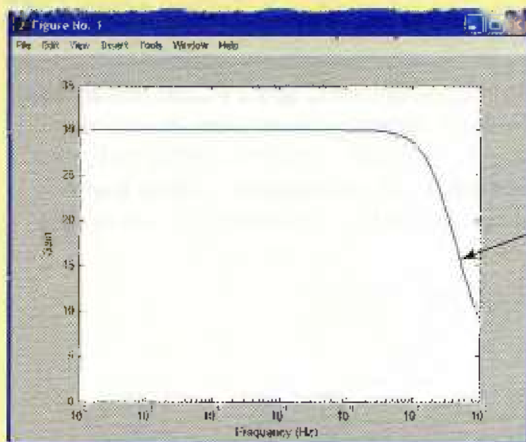
$$\frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = \frac{-g_m(R_C\|R_L)(1/j\omega C_\mu) + (R_C\|R_L)}{(R_C\|R_L) + (1/j\omega C_\mu)}$$

$$= \frac{-g_m(R_C\|R_L) + j\omega(R_C\|R_L)C_\mu}{1 + j\omega(R_C\|R_L)C_\mu}$$

Dados los valores típicos $g_m = 30\,\text{mS}, R_C = R_L = 2\,\text{k}\Omega$, y $C_\mu = 5$ pF, se grafica la magnitud de la ganancia como una función de la frecuencia (hay que recordar que $\omega = 2\pi f$). La gráfica semilogarítmica se muestra en la figura 10.27*a*, y la serie de instrucciones de MATLAB utilizadas para generar la figura se indica en la figura 10.27*b*. Resulta interesante, aunque quizá no totalmente sorprendente, ver que una característica como la ganancia del amplificador depende de la frecuencia. En realidad, se podría tener la intención de utilizar un circuito de este tipo como un medio para descartar las frecuencias que no interesan. Sin embargo, al menos en el caso de frecuencias relativamente bajas, se ve que la ganancia es en esencia independiente de la frecuencia de nuestra fuente de entrada.

Cuando se caracterizan los amplificadores, suele hacerse referencia a la frecuencia a la cual se reduce la ganancia hasta $1/\sqrt{2}$ veces su valor máximo. De acuerdo con la figura 10.27*a*, se observa que la magnitud de ganancia máxima es 30 y que se reduce hasta $30/\sqrt{2} = 21$ en el caso de una frecuencia de casi 30 MHz. A menudo, esta frecuencia recibe el nombre de frecuencia de *corte* (ruptura) o de *esquina* del amplificador. Si se requiere una operación a frecuencia más alta, deben reducirse las capacitancias internas (es decir, debe usarse un transistor diferente) o rediseñarse el circuito de alguna manera.

En este punto se observa que definir la ganancia relativa a $\mathbf{V}_{ent}$ no presenta una imagen completa del comportamiento dependiente de la frecuencia del amplificador. Esto quizá sea patente si se considera en forma breve la capacitancia C_π: conforme $\omega \to \infty$, $Z_{C_\pi} \to 0$, por lo que $\mathbf{V}_{ent} \to 0$. Este efecto no se manifiesta por sí solo en la ecuación que se obtuvo. Un método más completo consiste en desarrollar una ecuación de $\mathbf{V}_{sal}$ en términos de $\mathbf{V}_s$, en cuyo caso ambas capacitancias aparecerán en la expresión; lo anterior requiere un poco más de álgebra.



Ya no se amplifica de manera eficaz

(*a*)

```
EDU» frequency = logspace(3,9,100);
EDU» numerator = -30e-3*1000 + i*frequency*1000*5e-12;
EDU» denominator = 1 + i*frequency*1000*5e-12;
EDU» for k = 1:100
gain(k) = abs(numerator(k)/denominator(k));
end
EDU» semilogx(frequency/2/pi,gain);
EDU» xlabel('Frequency (Hz)');
EDU» ylabel('Gain');
EDU» axis([100 1e8 0 35]);
```

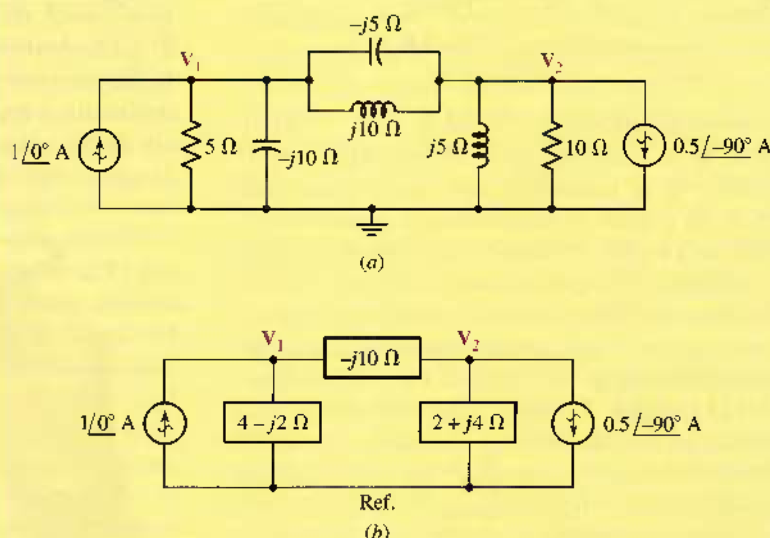
(*b*)

FIGURA 10.27 (*a*) Ganancia del amplificador como una función de la frecuencia. (*b*) MATLAB utilizada para crear la gráfica.

Así, se sabe que se podrían utilizar estos métodos en los circuitos que se consideran ahora; el hecho de que por casualidad se apliquen fuentes senoidales y que se busque sólo la respuesta forzada no tiene importancia. Igualmente ocurre con el hecho de que se analicen los circuitos en términos de fasores, pues son circuitos que mantienen su linealidad. También se podría recordar que se recurrió a ésta y a la superposición cuando se combinaron fuentes reales e imaginarias para obtener una fuente compleja.

EJEMPLO 10.9

Aplicar la superposición para determinar $\mathbf{V}_1$ en el circuito de la figura 10.21, que, por conveniencia, aparece repetido en la figura 10.28*a*.



■ **FIGURA 10.28** (*a*) Circuito de la figura 10.21 para el que se desea $\mathbf{V}_1$. (*b*) $\mathbf{V}_1$ puede encontrarse mediante la superposición de las respuestas fasoriales separadas.

Primero se vuelve a dibujar el circuito como en la figura 10.28*b*, donde cada par de impedancias en paralelo se sustituye por una sola impedancia equivalente. Esto es, $5 \| -j10\ \Omega$ es $4 - j2\ \Omega$; $j10 \| -j5\ \Omega$ es $-j10\ \Omega$; y $10 \| j5$ es igual a $2 + j4\ \Omega$. Para determinar $\mathbf{V}_1$, se activa primero sólo la fuente izquierda y se obtiene la respuesta parcial, $\mathbf{V}_{1L}$. La fuente $1\underline{/0^\circ}$ está en paralelo con una impedancia de

$$(4 - j2) \| (-j10 + 2 + j4)$$

por lo que

$$\mathbf{V}_{1L} = 1\underline{/0^\circ}\,\frac{(4 - j2)(-j10 + 2 + j4)}{4 - j2 - j10 + 2 + j4}$$

$$= \frac{-4 - j28}{6 - j8} = 2 - j2 \text{ V}$$

Con sólo la fuente de la derecha activa, la división de corriente y la ley de Ohm permiten escribir la siguiente relación

$$\mathbf{V}_{1R} = (-0.5\underline{/-90^\circ})\left(\frac{2 + j4}{4 - j2 - j10 + 2 + j4}\right)(4 - j2) = -1 \text{ V}$$

Al sumar

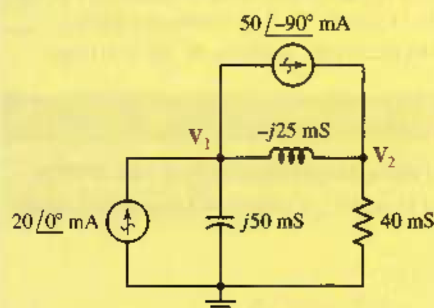
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1L} + \mathbf{V}_{1R} = 2 - j2 - 1 = 1 - j2 \qquad \text{V}$$

lo cual concuerda con el resultado anterior del ejemplo 10.7.

Como se verá, la superposición es también extremadamente útil cuando se trabaja con un circuito en el que no todas las fuentes operan a la misma frecuencia.

PRÁCTICA

10.14 Si la superposición se aplica en el circuito de la figura 10.29, determinar $\mathbf{V}_1$ con: (*a*) sólo la fuente de $20\underline{/0^\circ}$-mA en operación; (*b*) en operación sólo la fuente de $50\underline{/-90^\circ}$-mA.

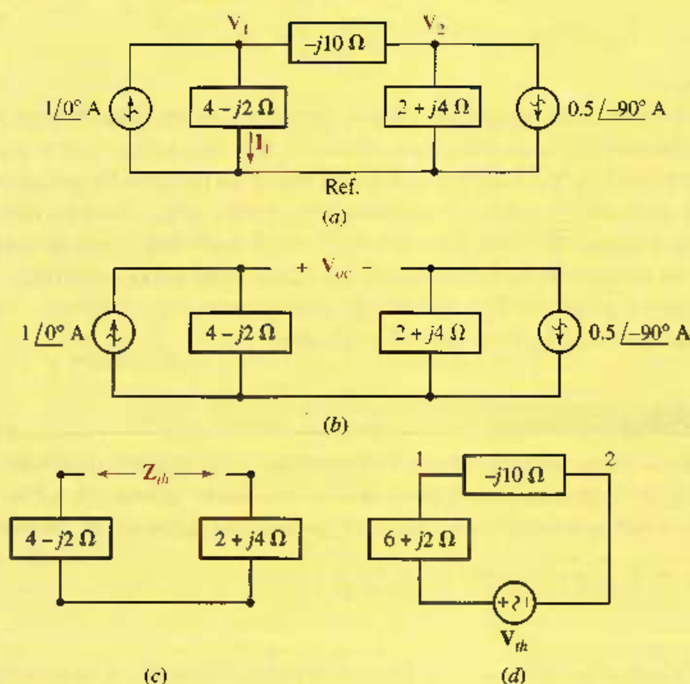


■ **FIGURA 10.29**

Respuestas: $0.1951 - j0.556$ V; $0.780 + j0.976$ V.

EJEMPLO 10.10

Determinar el equivalente de Thévenin visto por la impedancia $-j10\ \Omega$ de la figura 10.30*a*, y utilizarlo para calcular $\mathbf{V}_1$.



■ **FIGURA 10.30** (*a*) Circuito de la figura 10.28*b*. Se desea el equivalente de Thévenin visto por la impedancia $-j10\ \Omega$. (*b*) Se define $\mathbf{V}_{oc}$; (*c*) Se define $\mathbf{Z}_{th}$. (*d*) El circuito se vuelve a dibujar utilizando el equivalente de Thévenin.

(Continúa en la siguiente página)

La tensión en circuito abierto que se define en la figura 10.30*b*, es

$$\mathbf{V}_{oc} = (1\underline{/0^\circ})(4 - j2) - (-0.5\underline{/-90^\circ})(2 + j4)$$
$$= 4 - j2 + 2 - j1 = 6 - j3 \text{ V}$$

La impedancia del circuito inactivo de la figura 10.30*c*, como *se observa desde las terminales de la carga*, es simplemente la suma de las dos impedancias restantes. En consecuencia,

$$\mathbf{Z}_{th} = 6 + j2\ \Omega$$

De este modo, cuando se reconecta el circuito como en la figura 10.30*d*, la corriente dirigida desde el nodo 1 hasta el nodo 2, a través de la carga $-j10\ \Omega$ resulta

$$\mathbf{I}_{12} = \frac{6 - j3}{6 + j2 - j10} = 0.6 + j0.3 \text{ A}$$

Se sabe ahora la corriente que fluye por la impedancia de $-j10\ \Omega$ de la figura 10.30*a*. *Observar que no se puede calcular* $\mathbf{V}_1$ *mediante el circuito de la figura 10.30d pues el nodo de referencia ya no existe*. Volviendo al circuito original, pues, y restando la corriente $0.6 + j0.3$ A de la fuente de corriente izquierda, se determina la corriente hacia abajo que pasa por la rama $(4 - j2)\ \Omega$:

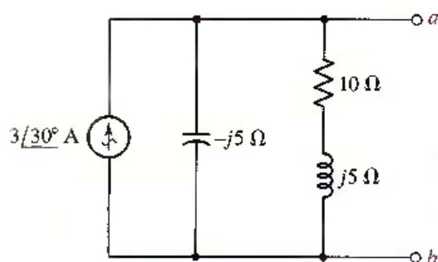
$$\mathbf{I}_1 = 1 - 0.6 - j0.3 = 0.4 - j0.3 \qquad \text{A}$$

y, por ello,

$$\mathbf{V}_1 = (0.4 - j0.3)(4 - j2) = 1 - j2 \qquad \text{V}$$

como antes.

Se pudo haber sido más astuto y haber utilizado el teorema de Norton en los tres elementos de la derecha de la figura 10.30*a*, suponiendo que el principal interés está en $\mathbf{V}_1$. También se utilizan en forma repetida las transformaciones de fuente para simplificar el circuito. Por lo tanto, todos los atajos y trucos que surgieron en los capítulos 4 y 5 están disponibles para analizar circuitos en el dominio de la frecuencia. La ligera complejidad adicional, evidente ahora, surge por la necesidad de emplear números complejos, y no por alguna otra consideración teórica implicada.



■ **FIGURA 10.31**

PRÁCTICA

10.15 En el circuito de la figura 10.31, determinar: (*a*) la tensión en circuito abierto $\mathbf{V}_{ab}$; (*b*) la corriente hacia abajo en un cortocircuito entre *a* y *b*; (*c*) la impedancia equivalente de Thévenin $\mathbf{Z}_{ab}$ en paralelo con la fuente de corriente.

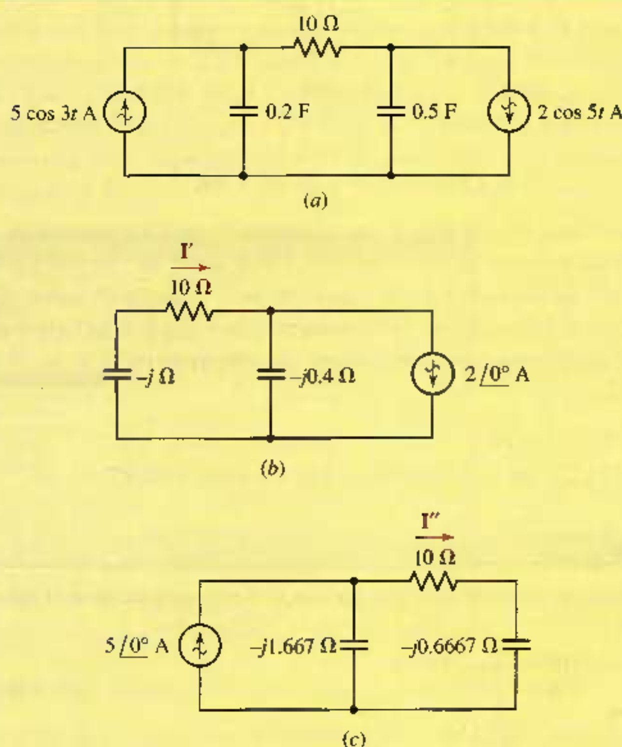
Respuesta: $16.77\underline{/-33.4^\circ}$ V; $2.60 + j1.500$ A; $2.5 - j5\ \Omega$.

Vale la pena un comentario final. Hasta este punto, el estudio se ha restringido a circuitos de una sola fuente o de fuentes múltiples en los que *cada una de ellas opera exactamente en la misma frecuencia*. Esto resulta necesario a fin de definir valores de impedancia específicos de elementos inductivos y capacitivos. Sin embargo, el concepto del análisis fasorial se extiende con facilidad a circuitos con fuentes múltiples que operan a diferentes frecuencias. En tales

casos, sólo se emplea la superposición para determinar las tensiones y las corrientes debidas a cada fuente, y después se suman los resultados en el *dominio del tiempo*. Si varias fuentes operan a la misma frecuencia, la superposición también permitirá considerar aquellas fuentes en el mismo tiempo, y agregar la respuesta resultante a la(s) respuesta(s) de otra(s) fuente(s) que operan a una frecuencia diferente.

EJEMPLO 10.11

Determinar la potencia disipada por la resistencia de 10 Ω en el circuito de la figura 10.32*a*.



■ **FIGURA 10.32** (*a*) Circuito simple que tiene fuentes que operan a diferentes frecuencias. (*b*) Circuito con la fuente izquierda suprimida. (*c*) Circuito con la fuente derecha suprimida.

Después de observar el circuito, se podría estar tentado a escribir de inmediato dos ecuaciones nodales, o quizás a efectuar dos conjuntos de transformaciones de fuente y lanzarse de inmediato a determinar la tensión en la resistencia de 10 Ω.

Desafortunadamente, esos procedimientos son imposibles de implementar, pues se tienen *dos* fuentes que operan a frecuencias *diferentes*. En una situación de este tipo, no hay manera de calcular la impedancia de ningún capacitor o inductor en el circuito. En este caso, ¿cuál ω se usa?

La única forma de salir de este dilema es mediante la superposición, agrupando todas las fuentes con la misma frecuencia en el mismo subcircuito, como se indica en la figura 10.32*b* y *c*.

En estudios futuros sobre el procesamiento de señales, se presentará también el método Jean-Bapiste Fourier, matemático francés que desarrolló una técnica para representar casi cualquier función arbitraria mediante una combinación de senoides. Cuando se trabaja con circuitos lineales, una vez que se sabe la respuesta de un circuito particular a una función forzada senoidal de tipo general, se puede predecir con facilidad la respuesta del circuito a una forma de onda arbitraria representada por una función de la serie de Fourier, simplemente mediante la superposición.

(Continúa en la siguiente página)

En el subcircuito de la figura 10.32*b*, se calcula sin dificultad la corriente **I**′ mediante la división de corriente:

$$\mathbf{I}' = 2\underline{/0^\circ}\left[\frac{-j0.4}{10 - j - j0.4}\right]$$
$$= 79.23\underline{/-82.03^\circ} \text{ mA}$$

por lo que

$$i' = 79.23 \cos(5t - 82.03^\circ) \text{ mA}$$

De igual modo, se observa que

$$\mathbf{I}'' = 5\underline{/0^\circ}\left[\frac{-j1.667}{10 - j0.6667 - j1.667}\right]$$
$$= 811.7\underline{/-76.86^\circ} \text{ mA}$$

por lo cual

$$i'' = 811.7 \cos(3t - 76.86^\circ) \text{ mA}$$

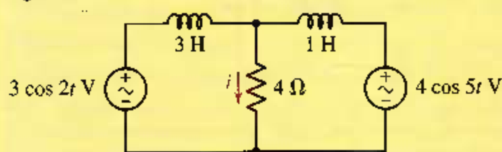


Debe observarse en este punto que, sin importar qué tan tentado se pudiera estar para sumar las dos corrientes fasoriales **I**′ e **I**″, en la figura 10.32*b* y *c*, *esto sería incorrecto*. El siguiente paso consiste en sumar las dos corrientes en el dominio del tiempo, elevar al cuadrado el resultado y multiplicar por 10 para obtener la potencia que absorbe la resistencia de 10 Ω en la figura 10.32*a*:

$$p_{10} = (i' + i'')^2 \times 10$$
$$= 10[79.23 \cos(5t - 82.03^\circ) + 811.7 \cos(3t - 76.86^\circ)]^2 \ \mu\text{W}$$

PRÁCTICA

10.16 Determinar la corriente *i* que pasa por la resistencia de 4 Ω de la figura 10.33.



■ **FIGURA 10.33**

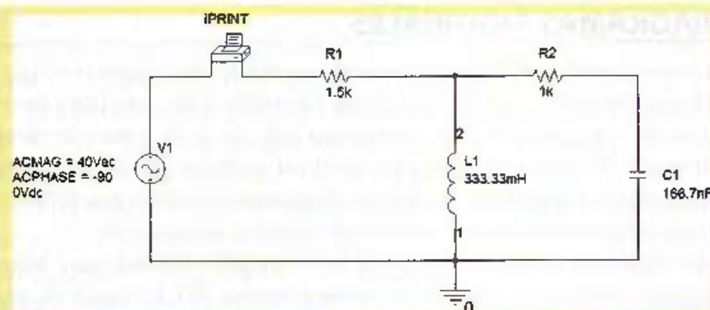
Respuesta: $i = 175.6 \cos(2t - 20.55^\circ) + 547.1 \cos(5t - 43.16^\circ)$ mA.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

Se tienen varias opciones en PSpice para analizar circuitos en el estado senoidal permanente. Tal vez el método más directo consista en utilizar las dos fuentes diseñadas de modo especial: VAC e IAC. La magnitud y fase de cualquier fuente se elige haciendo doble clic sobre la componente.

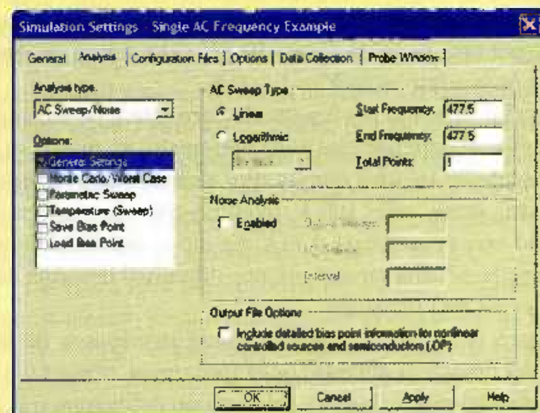
Se simulará el circuito de la figura 10.19a que se ha dibujado nuevamente en la figura 10.34.

La frecuencia de cualquier fuente no se elige en la ventana de diálogo Property Editor, sino a través de la ventana de diálogo análisis de barrido de ca.



■ **FIGURA 10.34** Circuito senoidal simple que opera a $\omega = 3000$ rad/s, para el que se desea la corriente a través de la resistencia de 1.5 kΩ.

Lo anterior se lleva a cabo eligiendo **AC Sweep/Noise** para **Analysis**, cuando se presenta con la ventana Simulation Settings. Se selecciona un barrido **Linear** y se fija **Total Points** a un valor 1. Puesto que sólo se está interesado en la frecuencia de 3 000 rad/s (477.5 Hz), se fijan ambos parámetros **Start Frequency** y **End Frequency** en 477.5 como se muestra en la figura 10.35.



■ **FIGURA 10.35** Ventana de diálogo para configurar la frecuencia de la fuente.

Observar que en el diagrama aparece un "componente" adicional, el cual se denomina IPRINT y permite imprimir una variedad de parámetros de corriente. En esta simulación, se está interesado en los atributos **AC, MAG,** y **PHASE**. Para que PSpice imprima estas cantidades haga doble clic sobre el símbolo IPRINT en el esquema e ingrese *y es* en cada uno de los campos apropiados.

Los resultados de la simulación se obtienen escogiendo la opción **View Output File** bajo **PSpice** en la ventana Capture CIS.

```
FREQ          IM(V_PRINT1)   IP(V_PRINT1)

4.775E+02     1.600E-02       -1.269E+02
```

De tal modo, la magnitud de la corriente es de 16 mA, y el ángulo de fase corresponde a $-126.9°$, por lo que la corriente que circula por la resistencia de 1.5 kΩ resulta igual a

$$i = 16\cos(3000t - 126.9°)\text{ mA}$$
$$= 16\,\text{sen}(3000t - 36.9°)\text{ mA}$$

10.10 DIAGRAMAS FASORIALES

El *diagrama fasorial* es un nombre que se asigna a un dibujo en el plano complejo que muestra las relaciones entre las tensiones fasoriales y las corrientes fasoriales de un circuito específico; ofrece también un método gráfico para resolver ciertos problemas y se puede utilizar para verificar métodos de análisis más exactos. En el siguiente capítulo se encontrarán diagramas similares que exhiben las relaciones de potencia compleja en el estado senoidal permanente.

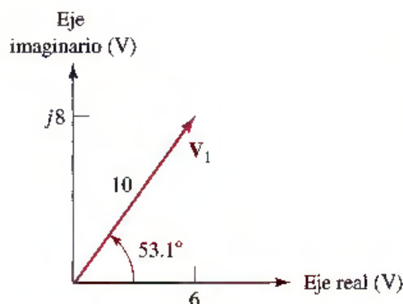
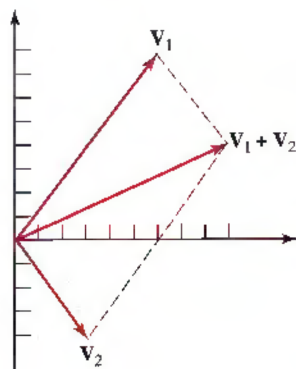


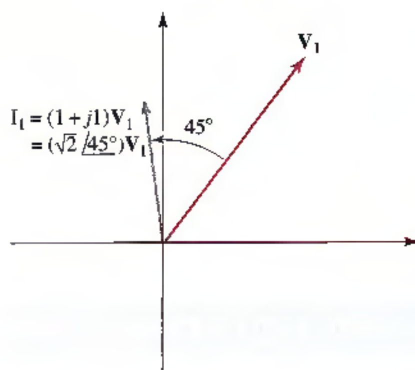
FIGURA 10.36 Diagrama fasorial simple que muestra al fasor de tensión de $\mathbf{V}_1 = 6 + j8 = 10\underline{/53.1^\circ}$ V.

El lector ya debe estar familiarizado con el uso del plano complejo para identificar gráficamente números complejos y su suma y sustracción. En razón de que las tensiones y corrientes fasoriales son números complejos, también se deben identificar como puntos en un plano complejo. Por ejemplo, la tensión fasorial $\mathbf{V}_1 = 6 + j8 = 10\underline{/53.1^\circ}$ V se identifica sobre el plano de tensión complejo que se muestra en la figura 10.36. El eje x es el eje de tensión real, y el de y corresponde al eje de tensión imaginario; la tensión $\mathbf{V}_1$ se localiza por medio de una flecha dibujada desde el origen. En vista de que la suma y la sustracción resultan muy sencillas de llevar a cabo y de exhibir sobre un plano complejo, los fasores se suman y se restan con facilidad en un diagrama fasorial. La multiplicación y la división originan la suma y la sustracción de ángulos y un cambio de amplitud. La figura 10.37a presenta la suma de $\mathbf{V}_1$ y una segunda tensión fasorial $\mathbf{V}_2 = 3 - j4 = 5\underline{/-53.1^\circ}$ V, por otra parte, la figura 10.37b ilustra la corriente $\mathbf{I}_1$, que es el producto de $\mathbf{V}_1$ y de la admitancia $\mathbf{Y} = 1 + j1$ S.

Este último diagrama fasorial presenta los fasores de corriente y de tensión sobre el mismo plano complejo; se entiende que cada uno tendrá su propia escala de amplitud, pero una escala de ángulos común. Por ejemplo, una tensión fasorial de 1 cm de largo podría representar 100 V, mientras que una corriente fasorial de la misma longitud quizás indicaría 3 mA. Graficar ambos fasores sobre el mismo diagrama permite determinar sin ninguna dificultad la forma de onda que está adelantada y la que está retrasada.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 10.37 (*a*) Diagrama fasorial que muestra la suma de $\mathbf{V}_1 = 6 + j8$ V y $\mathbf{V}_2 = 3 - j4$ V, $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = 9 + j4$ V $= 9.85\underline{/24.0^\circ}$ V. (*b*) El diagrama fasorial muestra $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$, donde $\mathbf{I}_1 = \mathbf{YV}_1$ e $\mathbf{Y} = 1 + jS = \sqrt{2}\underline{/45^\circ}$ S. Las escalas de amplitud de la corriente y de la tensión son diferentes.

El diagrama fasorial ofrece también una interpretación interesante de la transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, pues el diagrama se podría interpretar desde el punto de vista del dominio del tiempo o del correspondiente al dominio de la frecuencia. Hasta ahora, se ha empleado este último, ya que se mostraron de manera directa los fasores sobre el diagrama fasorial. Sin embargo, se procederá desde el punto de vista del dominio del tiempo indicando primero la tensión fasorial $\mathbf{V} = V_m\underline{/\alpha}$ a como se dibuja en la figura 10.38a. Para transformar $\mathbf{V}$ al dominio del tiempo, el siguiente paso necesario es la multiplicación del fasor por $e^{j\omega t}$; así, se tiene ahora la tensión compleja $V_m e^{j\alpha} e^{j\omega t} = V_m\underline{/\omega t + \alpha}$. Esta tensión también se interpreta como un fasor: uno con un ángulo de fase que aumenta de manera lineal con el tiempo. Por lo tanto, sobre un diagrama fasorial, éste representa un segmento de recta rotatorio,

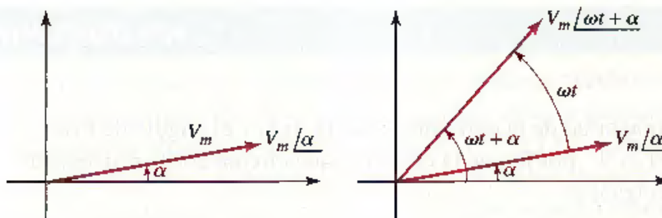


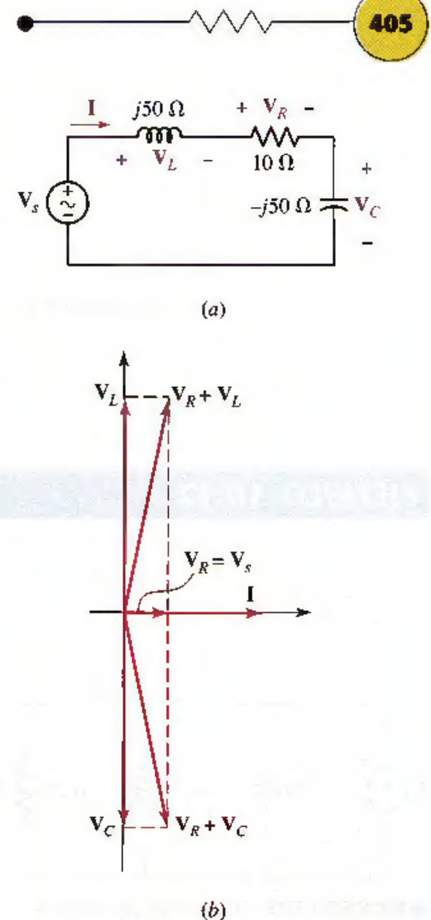
FIGURA 10.38 (*a*) Tensión fasorial $V_m\underline{/\alpha}$. (*b*) Tensión compleja $V_m\underline{/\omega t + \alpha}$ que se muestra como un fasor en un instante de tiempo particular y que adelanta a $V_m\underline{/\alpha}$ por ωt radianes.

ubicándose en la posición instantánea ωt radianes adelante (en dirección contraria a la de las manecillas del reloj) de $V_m\underline{/\alpha}$. En la figura 10.38*b* se muestran tanto $V_m\underline{/\alpha}$ como $V_m\underline{/\omega t+\alpha}$.

El paso hacia el dominio del tiempo se completa ahora tomando la parte real de $V_m\underline{/\omega t+\alpha}$. La parte real de esta cantidad compleja es la proyección de $V_m\underline{/\omega t+\alpha}$ sobre el eje real: $V_m\cos(\omega t+\alpha)$.

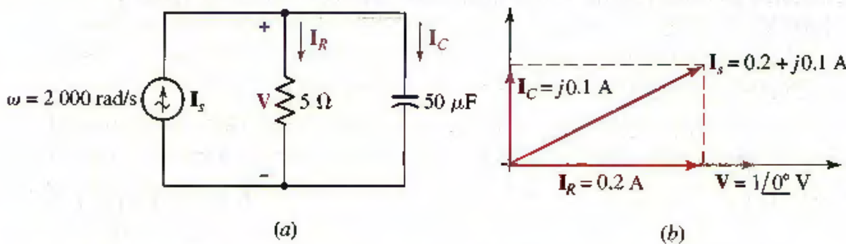
En resumen, el fasor en el dominio de la frecuencia aparece sobre el diagrama fasorial, y la transformación hacia el dominio del tiempo se consigue permitiendo que el fasor gire en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, a una velocidad angular de ω rad/s y visualizando luego la proyección sobre el eje real. Resulta útil considerar a la flecha que representa al fasor **V** en el diagrama fasorial como la fotografía, tomada en $\omega t = 0$, de la flecha rotatoria cuya proyección sobre el eje real es la tensión instantánea $v(t)$.

A continuación se construirán los diagramas fasoriales de varios circuitos simples. El circuito *RLC* en serie de la figura 10.39*a* tiene diferentes tensiones asociadas, aunque sólo una corriente. El diagrama fasorial se construye con mayor facilidad considerando la corriente simple como el fasor de referencia. De manera arbitraria se elige $\mathbf{I} = I_m\underline{/0°}$ y se coloca a lo largo del eje real del diagrama fasorial, como se observa en la figura 10.39*b*. De esta forma, las tensiones respectivas de la resistencia, el capacitor y el inductor se deben calcular y ubicarse sobre el diagrama, donde se mantienen con toda claridad las relaciones de fase de 90° La suma vectorial de las tres tensiones respectivas es la tensión de la fuente; así que para este circuito, que es lo que se definirá en el capítulo subsecuente como "condición resonante", puesto que $\mathbf{Z}_C = -\mathbf{Z}_L$, son iguales la tensión de la fuente y la tensión de la resistencia. La tensión total de la resistencia y del inductor, o en la resistencia y en el capacitor, se obtienen del diagrama sumando los fasores apropiados, como se ilustra.



■ **FIGURA 10.39** (*a*) Circuito *RLC* en serie. (*b*) Diagrama fasorial de este circuito; la corriente **I** se usa como un fasor de referencia conveniente.

La figura 10.40*a* es un circuito en paralelo simple en el que resulta lógico utilizar la tensión simple entre los dos nodos como un fasor de referencia. Suponga que $\mathbf{V} = 1\underline{/0°}$ V. La corriente de la resistencia, $\mathbf{I}_R = 0.2\underline{/0°}$ A, está en fase con esta tensión; además, la corriente en el capacitor, $\mathbf{I}_C = j0.1$ A, adelanta a la tensión de referencia por 90°. Después de que estas dos corrientes se agregan al diagrama fasorial, que se muestra en la figura 10.40*b*, se podrían sumar a fin de obtener la corriente de la fuente. El resultado es $\mathbf{I}_s = 0.2 + j0.1$ A.



■ **FIGURA 10.40** (*a*) Circuito *RC* en paralelo. (*b*) Diagrama de este circuito; la tensión de nodo **V** se usa como un útil fasor de referencia.

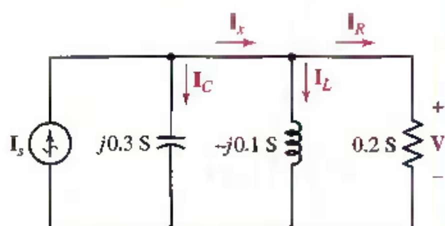
Si la corriente de la fuente se especifica en un principio con el conveniente valor de $1\underline{/0°}$ A y no se conoce al inicio la tensión del nodo, sigue siendo útil empezar la construcción del diagrama fasorial bajo el supuesto de una tensión de nodo (por ejemplo, $\mathbf{V} = 1\underline{/0°}$ V otra vez) y utilizarlo como el fasor de referencia. De esta forma, el diagrama se completa como antes y la corriente de la fuente que circula como resultado de la tensión de nodo supuesta de nuevo es igual a $0.2 + j0.1$ A. Sin embargo, la verdadera corriente de fuente es $1\underline{/0°}$ A, y

por ello la tensión verdadera se obtiene al multiplicar la tensión de nodo supuesta por $1\underline{/0^\circ}/(0.2 + j0.1)$; la verdadera tensión de nodo es una consecuencia $4 - j2$ V $= \sqrt{20}\underline{/-26.6^\circ}$ V. La tensión supuesta implica un diagrama fasorial que difiere del verdadero por un cambio de escala (el diagrama supuesto es más pequeño por un factor de $1/\sqrt{20}$) y una rotación angular (el diagrama supuesto está rotado 26.6° en dirección contraria a la de las manecillas del reloj).

La construcción de los diagramas fasoriales suele ser muy simple, así que la mayoría de los análisis de estado senoidal permanente serán más significativos si se incluyen tales diagramas. A menudo aparecerán ejemplos adicionales del uso de diagramas fasoriales en lo que resta de este estudio.

EJEMPLO 10.12

Construir un diagrama fasorial que muestre $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$, e $\mathbf{I}_C$ del circuito de la figura 10.41. Mediante la combinación de estas corrientes, determinar el ángulo mediante el cual $\mathbf{I}_s$ adelanta a $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_C$, e $\mathbf{I}_x$.

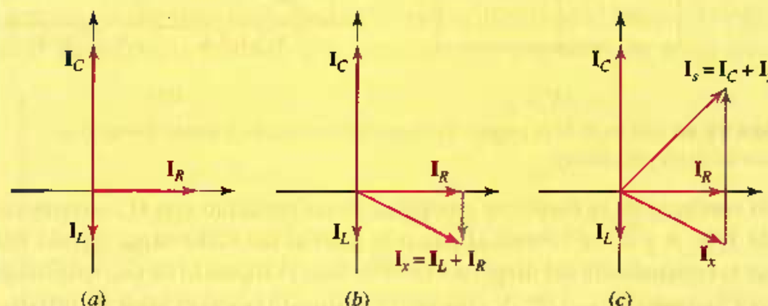


■ **FIGURA 10.41** Circuito simple para el que se requieren varias corrientes.

Se elige primero un fasor de referencia adecuado. Luego de examinar el circuito y las variables a determinar, se ve que una vez que se conoce **V** se calculan, $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$, e $\mathbf{I}_C$ mediante la aplicación simple de la ley de Ohm. Por lo tanto, se elige $\mathbf{V} = 1\underline{/0^\circ}$ V por simplicidad, y después se calcula

$$\mathbf{I}_R = (0.2)1\underline{/0^\circ} = 0.2\underline{/0^\circ}\text{ A}$$
$$\mathbf{I}_L = (-j0.1)1\underline{/0^\circ} = 0.1\underline{/-90^\circ}\text{ A}$$
$$\mathbf{I}_C = (j0.3)1\underline{/0^\circ} = 0.3\underline{/90^\circ}\text{ A}$$

El diagrama fasorial correspondiente se presenta en la figura 10.42*a*. También es necesario determinar las corrientes fasoriales $\mathbf{I}_s$ e $\mathbf{I}_x$. La figura 10.42*b* muestra la determinación de $\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_R = 0.2 - j0.1 = 0.224\underline{/-26.6^\circ}$ A, y la figura 10.42*c* indica la determinación de $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_x = 0.283\underline{/45^\circ}$ A. De la figura 10.42*c*, se puede afirmar que $\mathbf{I}_s$ adelanta a $\mathbf{I}_R$ a 45°, $\mathbf{I}_C$ en −45°, e $\mathbf{I}_x$ en 45° + 26.6° = 71.6°. Sin embargo, estos ángulos son sólo relativos; los valores numéricos exactos dependen de $\mathbf{I}_s$, del que depende también el valor real de **V** (supuesto aquí, por conveniencia, igual a $1\underline{/0^\circ}$ V).



■ **FIGURA 10.42** (*a*) Diagrama fasorial construido con un valor de referencia de $\mathbf{V} = 1\underline{/0^\circ}$. (*b*) Determinación gráfica de $\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_R$. (*c*) Determinación gráfica de $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_x$.

PRÁCTICA

10.17 Elegir algún valor de referencia conveniente para $\mathbf{I}_C$ en el circuito de la figura 10.43, dibujar un diagrama fasorial que muestre $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_1$, y $\mathbf{V}_s$, y mida la proporción entre las longitudes de: (*a*) $\mathbf{V}_s$ y $\mathbf{V}_1$; (*b*) $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$; (*c*) $\mathbf{V}_s$ y $\mathbf{V}_R$.

Respuestas: 1.90; 1.00; 2.12

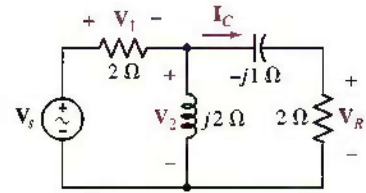


FIGURA 10.43

RESUMEN Y REPASO

- Si dos ondas senoidales (o dos ondas cosenoidales) tienen ambas magnitudes positivas y la misma frecuencia, es posible determinar la forma de onda que está adelantada y la que está retrasada, al comparar sus ángulos de fase.
- La respuesta forzada de un circuito lineal a una tensión senoidal o a una fuente de corriente siempre se escribe como una senoidal simple que tiene la misma frecuencia que la fuente senoidal.
- Se puede efectuar una transformada fasorial sobre cualquier función senoidal y viceversa: $V_m \cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow V_m \underline{/\phi}$.
- Un fasor tiene magnitud y ángulo de fase; se entiende que la frecuencia es la de la fuente senoidal que acciona el circuito.
- Cuando se transforma un circuito en el dominio del tiempo al circuito correspondiente en el dominio de la frecuencia, las resistencias, capacitores e inductores se sustituyen por impedancias (o, de vez en cuando, por admitancias).
- La impedancia de una resistencia es simplemente su resistencia.
- La impedancia de un capacitor es igual a $1/j\omega C\ \Omega$.
- La impedancia de un inductor es igual a $j\omega L\ \Omega$.
- Las impedancias agrupan combinaciones en serie y en paralelo de la misma manera que las resistencias.
- Todas las técnicas de análisis usadas en los circuitos resistivos se aplican a los circuitos con capacitores y/o inductores una vez que todos los elementos se sustituyen por sus equivalentes en el dominio de la frecuencia.
- El análisis fasorial sólo se efectúa sobre circuitos de una sola frecuencia. En otro caso, debe recurrirse a la superposición y sumarse las respuestas parciales en el *dominio del tiempo*, a fin de obtener la respuesta completa.
- El poder que tienen los diagramas fasoriales es evidente cuando una función forzada conveniente se utiliza desde un inicio y el resultado inicial se escala apropiadamente.

LECTURAS ADICIONALES

Una buena referencia sobre las técnicas de análisis basadas en fasores se puede encontrar en

R.A. DeCarlo y P.M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2a. ed. Nueva York: Oxford University Press, 2001.

Los modelos de transistores dependientes de la frecuencia se estudian desde una perspectiva fasorial en el capítulo 7 de

W.H. Hayt, Jr. y G.W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design*, 2a. ed. Nueva York: Wiley, 1995.

EJERCICIOS

10.1 Características de las senoides

1. Una onda seno, $f(t)$, es cero y aumenta en $t = 2.1$ ms, además, el máximo positivo siguiente de 8.5 ocurre en $t = 7.5$ ms. Expresar la onda en la forma $f(t)$ igual a: (*a*) C_1 sen$(\omega t + \phi)$, donde ϕ es positivo, lo más pequeño posible, y se mide en grados; (*b*) $C_2 \cos(\omega t + \beta)$, donde β tiene la magnitud más pequeña posible y está en grados; (*c*) $C_3 \cos \omega t + C_4$ sen ωt.

2. (*a*) Si $-10 \cos \omega t + 4$ sen $\omega t = A \cos(\omega t + \phi)$, donde $A > 0$ y $-180° < \phi \leq 180°$, determinar A y ϕ. (*b*) Si $200 \cos(5t + 130°) = F \cos 5t + G$ sen $5t$, determinar F y G. (*c*) Encontrar tres valores de t, $0 \leq t \leq 1$ s, para los cuales $i(t) = 5 \cos 10t - 3$ sen $10t = 0$. (*d*) ¿En qué intervalo del tiempo entre $t = 0$ y $t = 10$ ms es $10 \cos 100\pi t \geq 12$ sen $100\pi t$?

3. Dadas las dos formas de onda senoidales, $f(t) = -50 \cos \omega t - 30$ sen ωt y $g(t) = 55 \cos \omega t - 15sen\omega t$, determinar: (*a*) la amplitud de cada una, y (*b*) el ángulo de fase mediante el cual $f(t)$ adelanta a $g(t)$.

4. Sustituir la respuesta de corriente supuesta en la ecuación [3], $i(t) = A \cos(\omega t - \theta)$, en forma directa en la ecuación diferencial, $L(di/dt) + Ri = V_m \cos \omega t$ para demostrar que se obtienen valores de A y θ que concuerdan con la ecuación [4].

5. Cierto suministro de potencia genera una onda de tensión con forma de onda coseno $V_m \cos(\omega t + \phi)$ a una frecuencia de 13.56 MHz. Si el suministro entrega una potencia máxima de 300 W a una carga de 5 Ω y la tensión alcanza un mínimo en $t = 21.15$ ms, ¿cuánto valen V_m, ω, y ϕ?

6. Comparar los siguientes pares de formas y determinar cuál es la adelantada: (*a*) -33sen$(8t - 9°)$ y $12 \cos(8t - 1°)$. (*b*) $15 \cos(1\,000t + 66°)$ y $-2 \cos(1\,000t + 450°)$. (*c*) sen$(t - 13°)$ y $\cos(t - 90°)$. (*d*) sen t y $\cos(t - 90°)$.

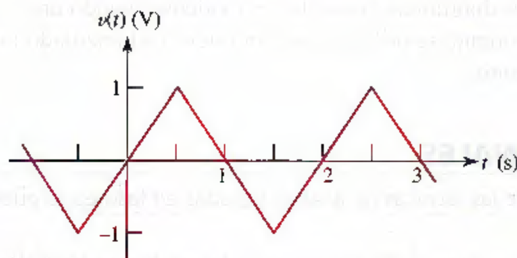
7. Encontrar la forma de ondas en cada par que está retrasada con respecto a la otra: (*a*) $6 \cos(2\pi 60t - 9°)$ y $-6 \cos(2\pi 60t + 9°)$. (*b*) $\cos(t - 100°)$ y $-\cos(t - 100°)$. (*c*) $-$sen t y sen t. (*d*) $7\,000 \cos(t - \pi)$ y $9 \cos(t - 3.14°)$.

8. Demostrar que la tensión $v(t) = V_1 \cos \omega t - V_2$ sen ωt se puede escribir como una función coseno simple $V_m \cos(\omega t + \phi)$. Obtener expresiones apropiadas de V_m y ϕ.

9. El teorema de Fourier es una herramienta común tanto en la ciencia como en la ingeniería. Dicho teorema demuestra que la forma de onda periódica de la figura 10.44 es igual a la suma infinita:

$$v(t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\text{sen}\,\pi t - \frac{1}{3^2}\,\text{sen}3\pi t + \frac{1}{5^2}\,\text{sen}5\pi t - \frac{1}{7^2}\,\text{sen}\,7\pi t + \cdots\right)$$

(*a*) Calcular el valor exacto de $v(t)$ en $t = 0.4$ s. Determinar el aproximado de $v(t)$ mediante la serie de Fourier anterior; (*b*) sólo el primer término; (*c*) únicamente los primeros cuatro términos; (*d*) sólo los cinco primeros términos.



■ **FIGURA 10.44**

10. Las tensiones eléctricas domésticas casi siempre se indican como 110 V, 115 V, o 120 V. Sin embargo, estos valores no representan la tensión de ca máxima. Más bien,

señalan lo que se conoce como la raíz cuadrática media de la tensión, definida como

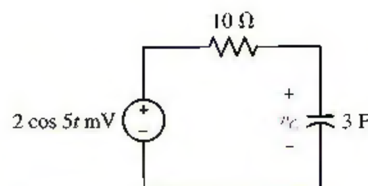
$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t)\,dt}$$

donde T = periodo de la forma de onda, V_m es la tensión máxima y ω = la frecuencia de la forma de onda ($f = 60$ Hz en Norteamérica).

(*a*) Efectuar la integración indicada y demostrar que para una tensión senoidal se tiene

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

(*b*) Calcular las tensiones máximas correspondientes a las tensiones rms de 110, 115, y 120 V.



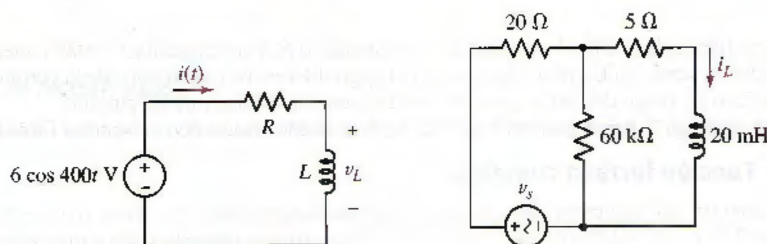
■ **FIGURA 10.45**

10.2 Respuesta forzada a funciones senoidales

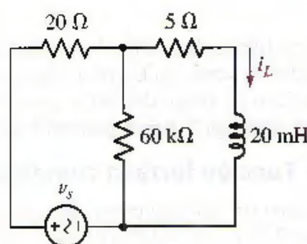
11. Encontrar a tensión en estado estable $v_C(t)$ como se indica en el circuito de la figura 10.45.

12. Determinar la tensión $v_L(t)$ del inductor del circuito de la figura 10.46, suponiendo 10.46, $R = 100\ \Omega$, $L = 2$ H, y que todos los transitorios han desaparecido hace mucho tiempo.

13. Sea $v_s = 20 \cos 500t$ V en el circuito de la figura 10.47. Después de simplificar un poco el circuito, determinar $i_L(t)$.

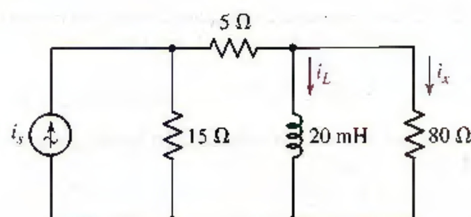


■ **FIGURA 10.46**

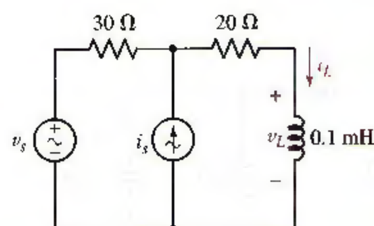


■ **FIGURA 10.47**

14. Si $i_s = 0.4 \cos 500t$ A en el circuito de la figura 10.48, simplificar el circuito hasta que esté en la forma de la figura 10.4 y después determinar: (*a*) $i_L(t)$; (*b*) $i_x(t)$.



■ **FIGURA 10.48**

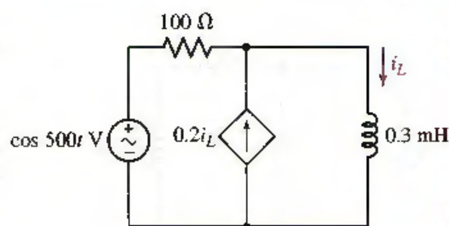


■ **FIGURA 10.49**

15. Una fuente de tensión senoidal $v_s = 100 \cos 10^5 t$ V, una resistencia de 500 Ω y un inductor de 8 mH están conectados en serie. Determinar los instantes de tiempo, $0 \le t < \frac{1}{2}T$, en los que la potencia cero: (*a*) se entrega a la resistencia, (*b*) se entrega al inductor, (*c*) la genera la fuente.

16. En el circuito de la figura 10.49, sea $v_s = 3 \cos 10^5 t$ V e $i_s = 0.1 \cos 10^5 t$. Después de utilizar la superposición y el teorema de Thévenin, proporcionar los valores instantáneos de i_L y v_L en $t = 10\ \mu$s.

17. Determinar $i_L(t)$ en el circuito que se presenta en la figura 10.50.



■ **FIGURA 10.50**

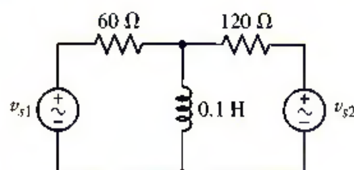


FIGURA 10.51

18. Ambas fuentes de tensión del circuito de la figura 10.51 están dadas por $120 \cos 120\pi t$ V. (*a*) Deducir la expresión de la energía instantánea almacenada en el inductor, y (*b*) utilizarla para determinar el valor promedio de la energía almacenada.
19. En el circuito de la figura 10.51, las fuentes de tensión son $v_{s1} = 120 \cos 200t$ V y $v_{s2} = 180 \cos 200t$ V. Calcular la corriente hacia abajo en el inductor.
20. Suponer que el amp op de la figura 10.52 es ideal ($R_i = \infty$, $R_o = 0$, y $A = \infty$). Además, observar que la entrada del integrador tiene aplicadas dos señales, $-V_m \cos \omega t$ y v_{sal}. Si el producto R_1C_1 se iguala con la razón L/R en el circuito de la figura 10.4, demostrar que v_{sal} es igual a la tensión en R (referencia + a la izquierda) en la figura 10.4.

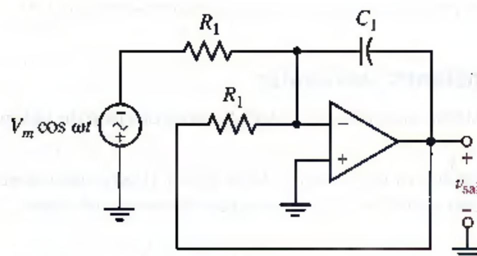


FIGURA 10.52

21. Una fuente de tensión $V_m \cos \omega t$, una resistencia o R, y un capacitor C están conectados en serie. (*a*) Escribir una ecuación integrodiferencial en términos de la corriente de lazo i y luego derivarla para obtener la ecuación diferencial del circuito. (*b*) Suponga la forma general adecuada de la respuesta exacta de la respuesta forzada.

10.3 Función forzada compleja

22. Convertir las siguientes expresiones a la forma rectangular (cartesiana): (*a*) $7\underline{/-90^\circ}$; (*b*) $3 + j + 7\underline{/-17^\circ}$; (*c*) $14e^{j15^\circ}$; (*d*) $1\underline{/0^\circ}$. Convertir las siguientes a la forma polar: (*e*) $-2(1 + j9)$; (*f*) 3.
23. Efectuar las operaciones indicadas y expresar la respuesta como un número complejo en forma rectangular: (*a*) $3 + 15\underline{/-23^\circ}$; (*b*) $12j(17\underline{/180^\circ})$; (*c*) $5 - 16\dfrac{(1+j)(2-j7)}{33\underline{/-9^\circ}}$.
24. Hacer la operación u operaciones indicadas y expresar su respuesta como un número complejo en forma polar: (*a*) $5\underline{/9^\circ} - 9\underline{/-17^\circ}$; (*b*) $(8 - j15)(4 + j16) - j$; (*c*) $\dfrac{(14-j9)}{(2-j8)} + 5\underline{/-30^\circ}$; (*d*) $17\underline{/-33^\circ} + 6\underline{/-21^\circ} + j3$.
25. Expresar las siguientes expresiones como un número complejo en forma polar: (*a*) $e^{j14^\circ} + 9\underline{/3^\circ} - \dfrac{8-j6}{j^2}$; (*b*) $\dfrac{5\underline{/30^\circ}}{2\underline{/-15^\circ}} + \dfrac{2e^{j5^\circ}}{2-j2}$.
26. Convertir estos números complejos a la forma rectangular (cartesiana): (*a*) $5\underline{/-110^\circ}$; (*b*) $6e^{j160^\circ}$; (*c*) $(3 + j6)(2\underline{/50^\circ})$. Convertir a la forma polar: (*d*) $-100 - j40$; (*e*) $2\underline{/50^\circ} + 3\underline{/-120^\circ}$.
27. Realizar los cálculos indicados y expresar el resultado en forma polar: (*a*) $40\underline{/-50^\circ} - 18\underline{/25^\circ}$; (*b*) $3 + \dfrac{2}{j} + \dfrac{2-j5}{1+j2}$; (*c*) $(2.1\underline{/25^\circ})^3$; (*d*) $0.7e^{j0.3}$.
28. En el circuito de la figura 10.53, sea i_C expresada como la respuesta compleja $20e^{j(40t+30^\circ)}$ A, expresar v_s como una función forzada compleja.
29. En el circuito de la figura 10.54, sea la corriente i_L expresada como la respuesta compleja $20e^{j(10t+25^\circ)}$ A, expresar la corriente de la fuente $i_s(t)$ como una función compleja forzada.
30. En una red lineal, como la que se ilustra en la figura 10.8, una tensión de fuente senoidal, $v_s = 80 \cos(500t - 20^\circ)$ V, produce una corriente de salida

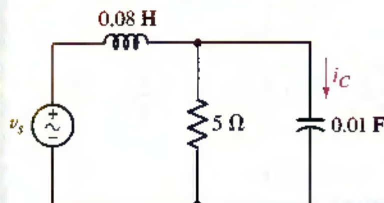


FIGURA 10.53

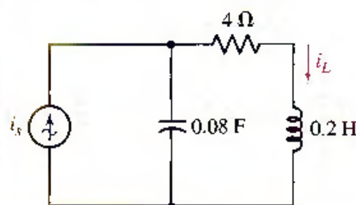


FIGURA 10.54

$i_{sal} = 5\cos(500t + 12°)$ A. Determinar i_{sal} si v_s es igual a: (*a*) $40\cos(500t + 10°)$ V; (*b*) $40\,\text{sen}(500t + 10°)$ V; (*c*) $40e^{j(500t+10°)}$ V; (*d*) $(50 + j20)e^{j500t}$ V.

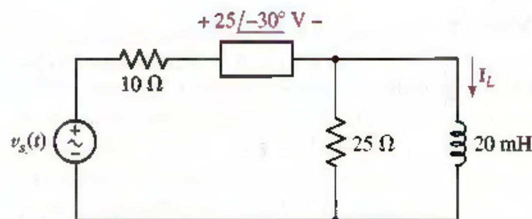
10.4 Fasor

31. Expresar cada una de las siguientes corrientes como un fasor: (*a*) $12\,\text{sen}(400t + 110°)$ A; (*b*) $-7\,\text{sen}800t - 3\cos 800t$ A; (*c*) $4\cos(200t - 30°) - 5\cos(200t + 20°)$ A. Si $\omega = 600$ rad/s, determinar el valor instantáneo de cada una de las siguientes tensiones en $t = 5$ ms: (*d*) $70\underline{/30°}$ V; (*e*) $-60 + j40$ V.

32. Sea $\omega = 4$ krad/s; determinar el valor instantáneo de i_x en $t = 1$ ms si $\mathbf{I}_x$ es igual a: (*a*) $5\underline{/-80°}$ A; (*b*) $-4 + j1.5$ A. Expresar en forma polar la tensión fasorial $\mathbf{V}_x$ si $v_x(t)$ es igual a: (*c*) $50\,\text{sen}(250t - 40°)$ V; (*d*) $20\cos 108t - 30\,\text{sen}108t$ V; (*e*) $33\cos(80t - 50°) + 41\cos(80t - 75°)$ V.

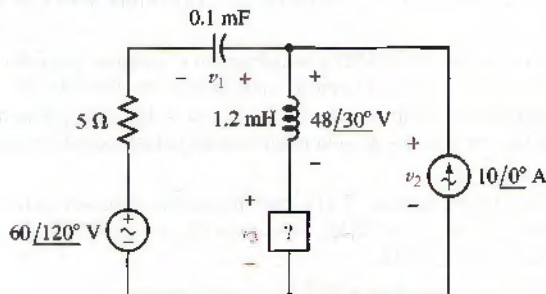
33. Las ecuaciones fasoriales $\mathbf{V}_1 = 10\underline{/90°}$ mV a $\omega = 500$ rad/s y $\mathbf{V}_2 = 8\underline{/90°}$ mV a $\omega = 1200$ rad/s se suman en conjunto en un amp op. Si el amp op multiplica esta entrada por un factor de -5, determinar la salida en $t = 0.5$ ms.

34. Si $\omega = 500$ rad/s e $\mathbf{I}_L = 2.5\underline{/40°}$ A en el circuito de la figura 10.55, calcular $v_s(t)$.



■ **FIGURA 10.55**

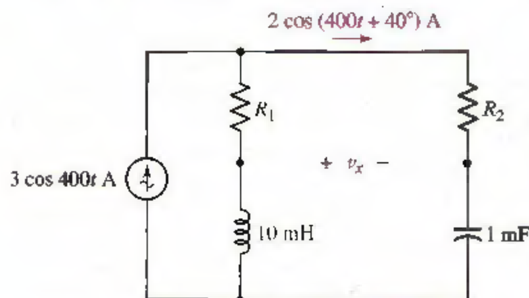
35. Sea $\omega = 5$ krad/s en el circuito de la figura 10.56. Determinar: (*a*) $v_1(t)$; (*b*) $v_2(t)$; (*c*) $v_3(t)$.



■ **FIGURA 10.56**

36. Una corriente fasorial de $1\underline{/0°}$ A fluye por una combinación en serie de 1 Ω, 1 H, y 1 F. ¿A qué frecuencia la amplitud de la tensión en los extremos de la red es el doble de la que se presenta en los extremos de la resistencia?

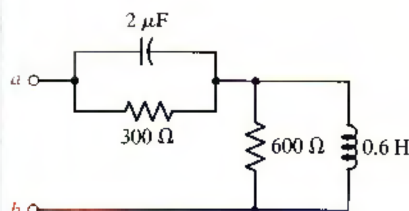
37. Determinar v_x en el circuito de la figura 10.57.



■ **FIGURA 10.57**

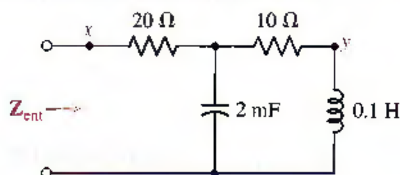
38. Una caja negra con tiras amarillas contiene dos fuentes de corriente, $\mathbf{I}_{s1}$ e $\mathbf{I}_{s2}$. La tensión de salida se identifica como $\mathbf{V}_{sal}$. Si $\mathbf{I}_{s1} = 2\angle 20^\circ$ A e $\mathbf{I}_{s2} = 3\angle -30^\circ$ A, entonces $\mathbf{V}_{sal} = 80\angle 10^\circ$ V. Sin embargo, si $\mathbf{I}_{s1} = \mathbf{I}_{s2} = 4\angle 40^\circ$ A, entonces $\mathbf{V}_{sal} = 90 - j30$ V. Proporcionar $\mathbf{V}_{sal}$ si $\mathbf{I}_{s1} = 2.5\angle -60^\circ$ A e $\mathbf{I}_{s2} = 2.5\angle 60^\circ$ A.

10.6 Impedancia



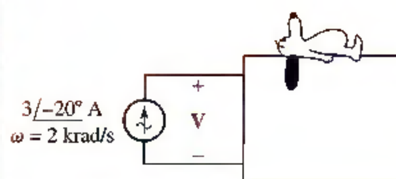
■ FIGURA 10.58

39. Calcular la impedancia de una combinación en serie formada por una capacitor de 1 mF, otro de 2 mF y otro de 3 mF si trabajan a una frecuencia de (*a*) 1 Hz; (*b*) 100 Hz; (*c*) 1 kHz; (*d*) 1 GHz.
40. Calcular la impedancia de una resistencia de 5 Ω en paralelo con un inductor de 1 nH y un inductor de 5 nH si la frecuencia de operación es (*a*) 1 Hz; (*b*) 1 kHz; (*c*) 1 MHz; (*d*) 1 GHz; (*e*) 1 THz.
41. Determinar $\mathbf{Z}_{ent}$ en las terminales *a* y *b* de la figura 10.58 si ω es igual a: (*a*) 800 rad/s; (*b*) 1 600 rad/s.
42. Sean $\omega = 100$ rad/s en el circuito de la figura 10.59. Calcular: (*a*) $\mathbf{Z}_{ent}$; (*b*) $\mathbf{Z}_{ent}$ si se conecta un cortocircuito de *x* a *y*.



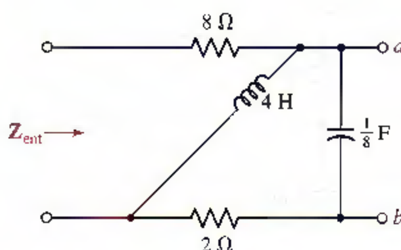
■ FIGURA 10.59

43. Si una fuente de tensión $v_s = 120 \cos 800t$ V se conecta a las terminales *a* y *b* de la figura 10.58 (referencia+ en la parte superior), ¿qué corriente fluye hacia la derecha en la resistencia de 300?



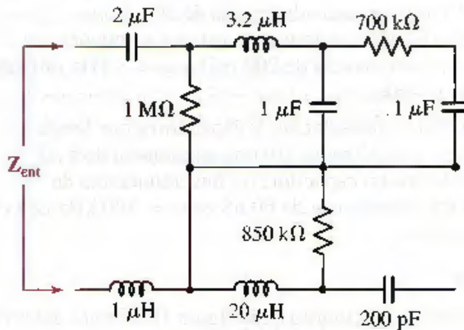
■ FIGURA 10.60

44. Obtener **V** en la figura 10.60 si la caja contiene: (*a*) 3 Ω en serie con 2 mH; (*b*) 3 Ω en serie con 125 μF; (*c*) 3 Ω, 2 mH, y 125 μF en serie; (*d*) 3 Ω, 2 mH, y 125 μF en serie pero $\omega = 4$ krad/s.
45. Un inductor de 10 H, una resistencia de 200 Ω y un capacitor *C* están en paralelo. (*a*) Calcular la impedancia de la combinación en paralelo para $\omega = 100$ rad/s, si $C = 20$ μF. (*b*) Si la magnitud de la impedancia es 125 Ω a $\omega = 100$ rad/s, determinar *C*. (*c*) ¿Con cuáles de los dos valores de ω la magnitud de la impedancia es igual a 100 Ω si $C = 20$ μF?
46. Un inductor de 20 mH y una resistencia de 30 Ω están en paralelo. Obtener la frecuencia angular ω a la cual: (*a*) $|\mathbf{Z}_{ent}| = 25$ Ω; (*b*) ángulo $(\mathbf{Z}_{ent}) = 25^\circ$; (*c*) $\text{Re}(\mathbf{Z}_{ent}) = 25\Omega$; (*d*) $\text{Im}(\mathbf{Z}_{ent}) = 10\,\Omega$.
47. Determinar R_1 y R_2 en el circuito de la figura 10.57.
48. Una red de dos elementos tiene una impedancia de entrada de $200 + j80\,\Omega$ a la frecuencia $\omega = 1200$ rad/s. Determinar qué capacitancia *C* debe ponerse en paralelo con la red para proporcionar una impedancia de entrada con: (*a*) reactancia cero (*b*) una magnitud de 100 Ω?
49. Para la red de la figura 10.61, determinar $\mathbf{Z}_{ent}$ at $\omega = 4$ rad/s si las terminales *a* y *b* están: (*a*) en circuito abierto; (*b*) en cortocircuito.



■ FIGURA 10.61

50. Calcular la impedancia equivalente de la red presentada en la figura 10.62, suponiendo una frecuencia de $f = 1$ MHz.



■ **FIGURA 10.62**

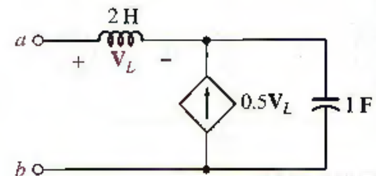
D 51. Diseñar una combinación de inductores, resistencias y capacitores que tenga (*a*) una impedancia de $1 + j4\,\Omega$ en $\omega = 1$ rad/s; (*b*) una impedancia de 5 Ω a $\omega = 1$ rad/s, construida utilizando al menos un inductor; (*c*) una impedancia de $7\underline{/80^\circ}\ \Omega$ en $\omega = 100$ rad/s; y (*d*) utilizando el menor número de componentes posible, una impedancia de 5 Ω a $f = 3$ THz.

D 52. Diseñar una combinación de inductores, resistencias y capacitores que tenga (*a*) una impedancia de $1 + j4$ kΩ a $\omega = 230$ rad/s; (*b*) una impedancia de 5 MΩ a $\omega = 10$ rad/s, construido utilizando al menos un capacitor; (*c*) una impedancia de $80\underline{/-22^\circ}\ \Omega$ a $\omega = 50$ rad/s; y (*d*) utilizando el menor número de componentes posible, una impedancia de 300 Ω a $\omega = 3$ krad/s.

10.7 Admitancia

53. Calcular la admitancia de una combinación en paralelo compuesta por un capacitor de 1 mF, otro de 2 mF y otro de 4 mF si trabajan a una frecuencia de (*a*) 2 Hz; (*b*) 200 Hz; (*c*) 20 kHz; (*d*) 200 GHz.

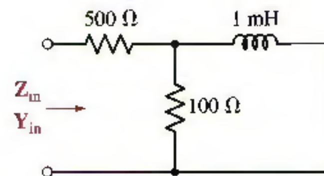
54. ¿Cuál es la susceptancia de la combinación en paralelo de (*a*) dos resistencias de 100 Ω cada una; (*b*) una resistencia de 1 Ω en paralelo con un capacitor de 1 F si la frecuencia de trabajo es de 100 rad/s; (*c*) una resistencia de 1 Ω en serie con un inductor de 2 H si la frecuencia angular de trabajo es de 50 rad/s?



■ **FIGURA 10.63**

55. Calcular la admitancia de una entrada $\mathbf{Y}_{ab}$ de la red que se muestra en la figura 10.63 y dibujarla como la combinación en paralelo de una resistencia R y una inductancia L, indicando los valores de R y L si $\omega = 1$ rad/s.

56. Una resistencia de 5 Ω, una inductancia de 20 mH y una capacitancia de 2 mF forman una red en serie que tiene terminales a y b. (*a*) Trabajar con las admitancias para determinar la cantidad de capacitancia que se debe conectar entre a y b de manera que $\mathbf{Z}_{\text{ent},ab} = R_{\text{ent},ab} + j0$ a $\omega = 500$ rad/s. (*b*) ¿Cuál es el valor de $R_{\text{ent},\,ab}$? (*c*) Con la C determinada, ¿cuál es el valor de $\mathbf{Y}_{\text{ent},\,ab}$ a $\omega = 100$ rad/s?



■ **FIGURA 10.64**

57. En la red que se muestra en la figura 10.64, determinar la frecuencia a la que: (*a*) $R_{\text{ent}} = 550\,\Omega$; (*b*) $X_{\text{ent}} = 50\Omega$; (*c*) $G_{\text{ent}} = 1.8$ mS; (*d*) $B_{\text{ent}} = -150\,\mu$S.

58. Dos admitancias, $\mathbf{Y}_1 = 3 + j4$ mS y $\mathbf{Y}_2 = 5 + j2$ mS, se encuentran en paralelo y una tercera admitancia. $\mathbf{Y}_3 = 2 - j4$ mS, está en serie con la combinación en paralelo. Si una corriente $\mathbf{I}_1 = 0.1\underline{/30^\circ}$ A fluye por $\mathbf{Y}_1$, determinar la magnitud de la tensión en (*a*) $\mathbf{Y}_1$; (*b*) $\mathbf{Y}_2$; (*c*) $\mathbf{Y}_3$; (*d*) la red completa.

59. La admitancia de la combinación en paralelo de una resistencia de 10 Ω y de una capacitancia de 50 μF a $\omega = 1$ krad/s es la misma que la admitancia R_1 y C_1 en serie a esa frecuencia. (*a*) Calcular R_1 y C_1. (*b*) Repetir para $\omega = 2$ krad/s.

60. Un plano de coordenadas cartesiano contiene un eje horizontal sobre el que G_{ent} se da en siemens, y un eje vertical a lo largo del cual B_{ent} se mide, también, en S. Considerar que $\mathbf{Y}_{\text{ent}}$ representa la combinación en serie de una resistencia de 1 Ω y un capacitor de 0.1 F. (*a*) Determinar $\mathbf{Y}_{\text{ent}}$, G_{ent}, y B_{ent} como funciones de ω.

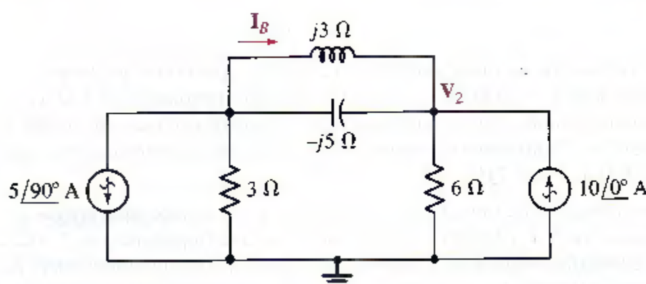
(*b*) Localizar los pares de coordenadas (G_{ent}, B_{ent}) sobre el plano a los valores de frecuencia $\omega = 0, 1, 2, 5, 10, 20$, y 10^6 rad/s.

D 61. Diseñar una combinación de inductores, resistencias y capacitores que tenga (*a*) una admitancia de $1 - j4$ S en $\omega = 1$ rad/s; (*b*) una admitancia de 200 mS a $\omega = 1$ rad/s, construido utilizando al menos un inductor; (*c*) una admitancia de $7\underline{/80^\circ}$ μS a $\omega = 100$ rad/s; y (*d*) una admitancia de 200 mΩ a $\omega = 3$ THz utilizando el menor número de componentes posible.

D 62. Diseñar una combinación de inductores, resistencias y capacitores que tenga (*a*) una admitancia de $1 - j4$ pS en $\omega = 30$ rad/s; (*b*) una admitancia de 5 μS a $\omega = 560$ rad/s, construido con al menos un capacitor; (*c*) una admitancia de $4\underline{/-10^\circ}$ nS a $\omega = 50$ rad/s; y (*d*) una admitancia de 60 nS en $\omega = 300$ kHz con el menor número de componentes posible.

10.8 Análisis nodal y de malla

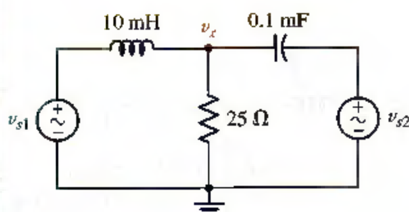
63. Utilizar el análisis de fasores y nodal en el circuito de la figura 10.65 para determinar $\mathbf{V}_2$.



■ **FIGURA 10.65**

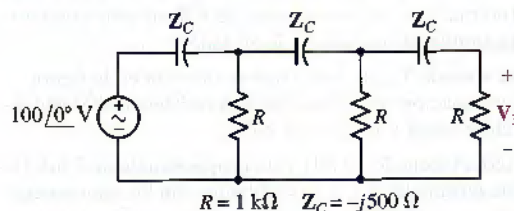
64. Utilizar el análisis fasorial y de malla en el circuito de la figura 10.65 para obtener $\mathbf{I}_B$.

65. Obtener $v_x(t)$ en el circuito de la figura 10.66 si $v_{s1} = 20 \cos 1000t$ V y $v_{s2} = 20 \text{ sen } 1000t$ V.



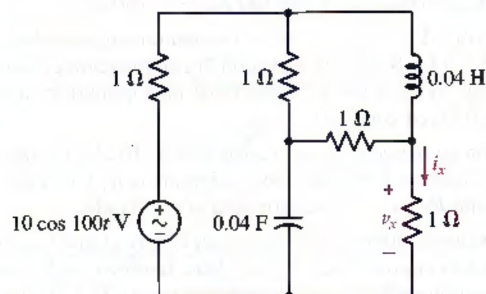
■ **FIGURA 10.66**

66. (*a*) Determinar $\mathbf{V}_3$ en el circuito de la figura 10.67. (*b*) ¿A qué valores idénticos deben cambiarse las tres impedancias capacitivas, de manera que $\mathbf{V}_3$ esté a 180° fuera de fase respecto de la tensión de la fuente?



■ **FIGURA 10.67**

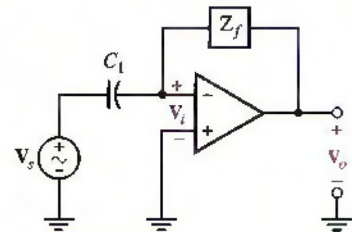
67. Utilizar el análisis de malla para determinar $i_x(t)$ en el circuito que se presenta en la figura 10.68.



■ **FIGURA 10.68**

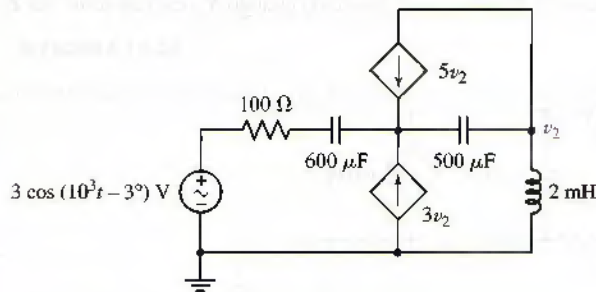
68. Determinar $v_x(t)$ para el circuito de la figura 10.68 mediante el análisis fasorial y el nodal.

69. El amp op que se presenta en la figura 10.69 tiene una impedancia de entrada infinita, impedancia de salida cero y una ganancia grande pero finita (positiva, real), $A = -\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ (*a*) Construir un diferenciador básico poniendo $\mathbf{Z}_f = R_f$, determinar $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$, y luego mostrar que $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s \rightarrow -j\omega C_1 R_f$ conforme $\mathbf{A} \rightarrow \infty$. (*b*) Sea $\mathbf{Z}_f$ el representante de C_f y R_f estando en paralelo, determinar $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$, y luego mostrar que $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s \rightarrow -j\omega C_1 R_f/(1 + j\omega C_f R_f)$ conforme $\mathbf{A} \rightarrow \infty$.

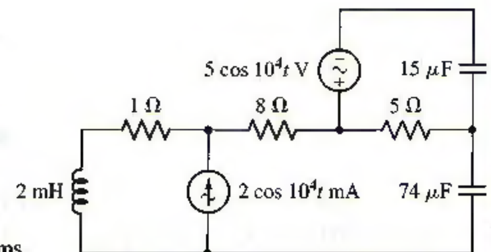


■ **FIGURA 10.69**

70. En el circuito de la figura 10.70, determinar la tensión v_2.



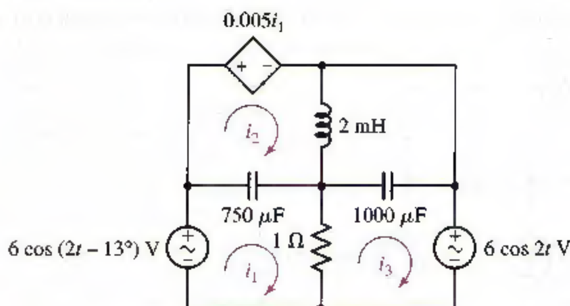
■ **FIGURA 10.70**



■ **FIGURA 10.71**

71. Calcular la potencia disipada por la resistencia de 1 Ω en la figura 10.71 en $t = 1$ ms.

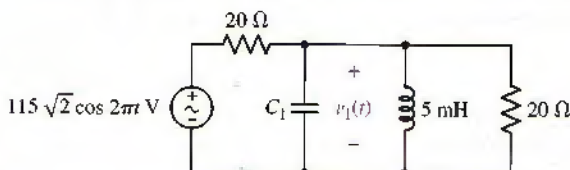
72. Utilizar el análisis fasorial para determinar las tres corrientes de malla $i_1(t)$, $i_2(t)$, e $i_3(t)$ en el circuito de la figura 10.72.



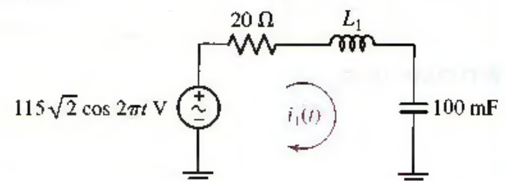
■ **FIGURA 10.72**

73. En el circuito de la figura 10.73, la tensión $v_1(t) = 6.014 \cos(2\pi t + 85.76°)$ volts. ¿Cuál es la capacitancia de C_1?

74. En el circuito de la figura 10.74, la corriente $i_1(t) = 8.132 \cos 2\pi t$ A. ¿Cuál es la inductancia de L_1?



■ **FIGURA 10.73**



■ **FIGURA 10.74**

75. De acuerdo con el circuito de un amplificador transistorizado de la figura 10.26*b*, (*a*) obtener la ecuación del ángulo de fase de la salida como función de la frecuencia,

bajo el supuesto de una señal de entrada $\mathbf{V}_s = 1\underline{/0^\circ}$ volts. (*b*) Graficar su ecuación sobre una escala semilogarítmica para frecuencias entre 100 Hz y 10 GHz. Utilizar $R_s = 300\,\Omega$, $R_B = 5\,\text{k}\Omega$, $r_\pi = 2.2\,\text{k}\Omega$, $C_\pi = 5$ pF, $C_\mu = 2$ pF, $g_m = 38$ mS, $R_C = 4.7\,\text{k}\Omega$, y $R_L = 1.2\,\text{k}\Omega$. (*c*) Sobre qué intervalo de frecuencias la salida está desfasada exactamente 180° con respecto de la entrada? ¿Más o menos a qué frecuencia dicha relación de fase empieza a cambiar?

10.9 Superposición, transformaciones de fuente y teorema de Thévenin

76. Determinar el equivalente de Thévenin en el dominio de la frecuencia de la red que se muestra en la figura 10.75. Mostrar el resultado cuando $\mathbf{V}_{th}$ está en serie con $\mathbf{Z}_{th}$.

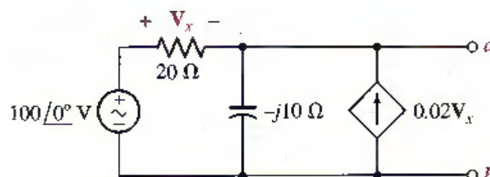


FIGURA 10.75

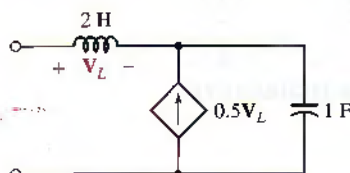


FIGURA 10.76

77. Calcular la admitancia de entrada del circuito que se presenta en la figura 10.76 y representarlo como la combinación en paralelo de una resistencia *R* y una inductancia *L*, indicando los valores de *R* y *L* si $\omega = 1$ rad/s.

78. De acuerdo con el circuito de la figura 10.77, considerar la superposición y determinar la parte de $v_1(t)$ debida a: (*a*) la fuente de tensión que actúa sola; (*b*) la fuente de corriente que actúa sola.

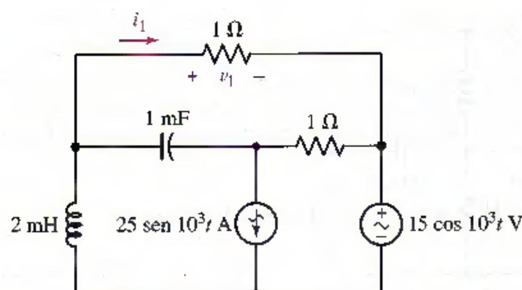


FIGURA 10.77

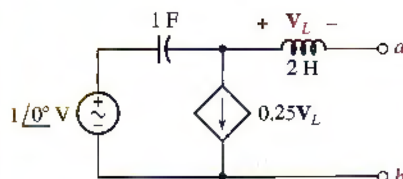


FIGURA 10.78

79. Utilizar $\omega = 1$ rad/s, y determinar el equivalente de Norton de la red que se presenta en la figura 10.78. Construir el equivalente de Norton como una fuente de corriente $\mathbf{I}_N$ en paralelo con una resistencia R_N así como una inductancia L_N o una capacitancia C_N.

80. En el circuito de la figura 10.79 sea, $i_{s1} = 2\cos 200t$ A, $i_{s2} = 1\cos 100t$ A, y $v_{s3} = 2\,\text{sen}\,200t$ V. Determinar $v_L(t)$.

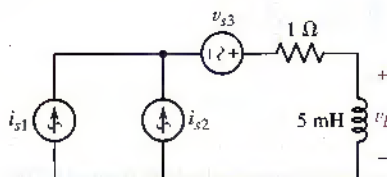
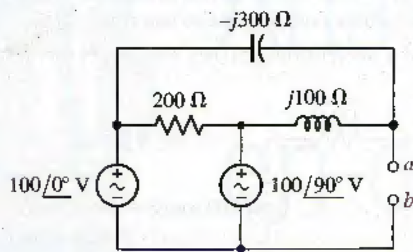


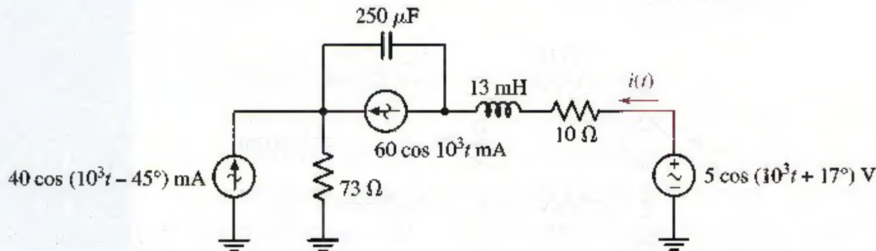
FIGURA 10.79

81. Obtener el circuito equivalente de Thévenin de la figura 10.80.



■ **FIGURA 10.80**

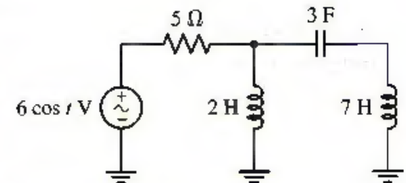
82. Determinar la corriente $i(t)$ que fluye por la fuente de tensión de la figura 10.81.



■ **FIGURA 10.81**

83. (*a*) Calcular la tensión en el capacitor de 3 F de la figura 10.82. (*b*) Verificar su respuesta con PSpice.

84. (*a*) Obtener el equivalente de Thévenin visto por el inductor de $j5\ \Omega$ de la figura 10.21. (*b*) Bajo el supuesto de una frecuencia de 100 rad/s, verificar la respuesta con PSpice.

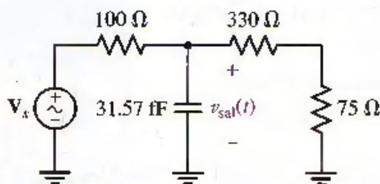


■ **FIGURA 10.82**

85. Con una sola resistencia, un solo capacitor, una fuente de tensión senoidal y el principio de división de tensión, diseñar un circuito para "filtrar" altas frecuencias (Sugerencia: definir una tensión de salida en uno de los dos elementos pasivos y considerar a la fuente senoidal como la entrada. Al interpretar "filtrar" eso implicará una tensión de salida reducida).

86. Con una sola resistencia, un solo capacitor, una fuente de tensión senoidal y el principio de división de tensión, diseñar un circuito para "filtrar" bajas frecuencias (Sugerencia: Definir una tensión de salida en uno de los dos elementos pasivos e imaginar que la fuente senoidal es la entrada. Al interpretar "filtrar" eso implicará una tensión de salida reducida).

87. (*a*) Reducir el circuito de la figura 10.83 a un circuito *RC* en serie simple. (*b*) Obtener la ecuación de la magnitud de la proporción de tensión $\mathbf{V}_{ent}/\mathbf{V}_s$ como una función de la frecuencia. (*c*) Graficar su ecuación sobre el intervalo de frecuencia de 100 Hz a 1 MHz, y comparar su resultado con una simulación adecuada de PSpice del circuito original.



■ **FIGURA 10.83**

88. Consultar la figura 10.26*b*. (*a*) Demostrar que la ganancia de tensión máxima del circuito amplificador (definida como $\mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{\pi}$) es $-g_m(R_C \| R_L)66$. (*b*) Si $R_S = 100\ \Omega$, $R_L = 8\ \Omega$, el valor máximo de R_C es $10\ k\Omega$, $r_\pi g_m = 300$, y todos los demás

parámetros pueden modificarse, ¿cómo podría cambiarse el diseño para incrementar la ganancia máxima? (*c*) ¿Cómo dicha modificación de diseño afectaría la frecuencia de corte del amplificador? ¿De qué manera compensaría lo anterior?

89. Utilizar la superposición para determinar las tensiones $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en el circuito de la figura 10.84.

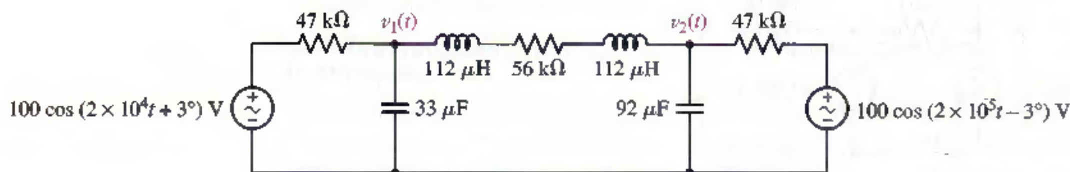


FIGURA 10.84

90. Utilizar la superposición para determinar las tensiones $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en el circuito de la figura 10.85.

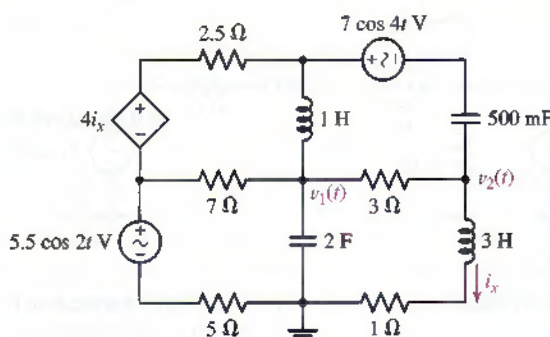


FIGURA 10.85

10.10 Diagramas fasoriales

91. (*a*) Calcular los valores de $\mathbf{I}_L$, $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_C$, $\mathbf{V}_L$, $\mathbf{V}_R$, y $\mathbf{V}_C$ (más $\mathbf{V}_s$) para el circuito de la figura 10.86. (*b*) Utilizando escalas de 50 V correspondiente a 1 pulgada y 25 A a 1 pulgada, mostrar las siete cantidades sobre un diagrama fasorial e indicar que $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_C$ y $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_R$.

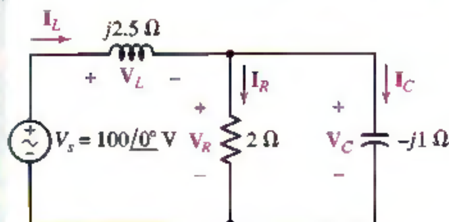


FIGURA 10.86

92. En el circuito de la figura 10.87, calcular los valores de: (*a*) $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, e $\mathbf{I}_3$. (*b*) Mostrar $\mathbf{V}_s$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, e $\mathbf{I}_3$ sobre un diagrama fasorial (las escalas de 50 V/pulgada y 2 A/pulgada funcionan bien). (*c*) Determinar gráficamente $\mathbf{I}_s$ e indicar su amplitud y su ángulo de fase.

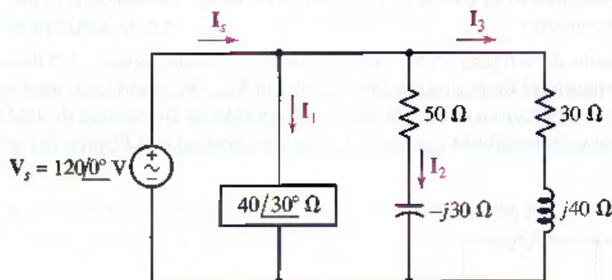


FIGURA 10.87

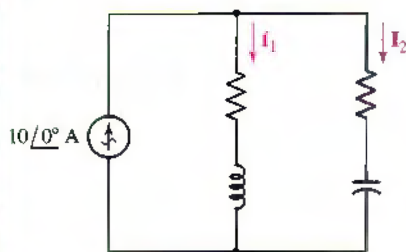


FIGURA 10.88

93. En el circuito de la figura 10.88, se sabe que $|\mathbf{I}_1| = 5$ A e $|\mathbf{I}_2| = 7$ A. Determinar $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ utilizando compás, regla, escuadra, transportador y demás objetos similares.

94. Sea $\mathbf{V}_1 = 100\underline{/0°}$ V, $|\mathbf{V}_2| = 140$ V, y $|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2| = 120$ V. Utilizar métodos gráficos para determinar dos valores posibles del ángulo de $\mathbf{V}_2$.

CAPÍTULO 11

Análisis de potencia en circuitos de ca

CONCEPTOS CLAVE

- Cálculo de la potencia instantánea.
- Potencia promedio (activa) proporcionada por una fuente senoidal.
- Valores raíz media cuadrada (RMS).
- Potencia reactiva.
- La relación entre potencia compleja, promedio y reactiva.
- Factor de potencia de una carga.

INTRODUCCIÓN

A menudo, una parte integral del análisis de circuitos es la determinación de la potencia entregada o la potencia absorbida (o ambas). En el contexto de la potencia de ca, se puede observar que el método relativamente sencillo que se ha utilizado en los capítulos anteriores no proporciona un panorama apropiado de la forma en que opera un sistema en particular, por lo que, en este capítulo, se presentarán algunas cantidades relacionadas con la potencia.

Se comenzará por considerar la potencia *instantánea* como el producto de la tensión y de la corriente, ambas en el dominio del tiempo que se asocia con el elemento o la red de interés. En ocasiones, la potencia instantánea resulta bastante útil por derecho propio, debido a que su valor máximo podría verse limitado a fin de no exceder el intervalo de operación seguro o útil de un dispositivo físico. Por ejemplo, los amplificadores de potencia transistorizados y de bulbos de vacío producen una salida distorsionada, por lo que los altavoces generan un sonido con esa característica cuando la potencia máxima excede cierto valor límite. Sin embargo, el interés principal se concentra sobre todo en la potencia instantánea por la simple razón de que proporciona medios para calcular una cantidad más importante, la potencia *promedio (activa)*. De manera similar, el recorrido de un viaje a través del campo se describe mejor mediante la velocidad promedio; el interés en la velocidad instantánea se limita a evitar las velocidades máximas que harían peligrar la seguridad de una persona o darían pie a que interviniese la patrulla de caminos.

En los problemas prácticos se tratará con valores de potencia promedio que varían desde una pequeña fracción de un picowatt en una señal de telemetría del espacio exterior, unos cuantos watts en la potencia de audio suministrada a los altavoces de un sistema estéreo de alta fidelidad, hasta varios cientos de watts que se requieren para operar la cafetera por las mañanas o los 10 mil millones de watts generados en la presa Grand Coulee. Aun así,

se verá que el concepto de potencia promedio tiene sus limitaciones, en especial cuando se trata del intercambio de energía entre cargas reactivas y fuentes de potencia. Lo anterior puede manejarse de manera sencilla mediante la presentación de los conceptos de potencia reactiva, potencia compleja y factor de potencia, todos muy comunes en el ámbito de la industria eléctrica.

11.1 POTENCIA INSTANTÁNEA

La ***potencia instantánea*** que se suministra a cualquier dispositivo está dada por el producto de la tensión instantánea a través del dispositivo y la corriente instantánea que circula por él (se respeta la convención de signos pasiva). Así,[1]

$$p(t) = v(t)i(t) \quad [1]$$

Si el dispositivo en cuestión consiste en una resistencia R, entonces la potencia quizá se exprese sólo en términos de su corriente o nada más mediante la corriente o la tensión:

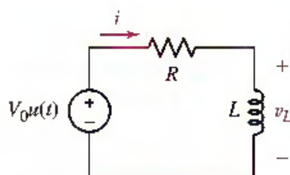
$$p(t) = v(t)i(t) = i^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R} \quad [2]$$

Si la tensión y la corriente se asocian con un dispositivo que es completamente inductivo, entonces:

$$p(t) = v(t)i(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}v(t)\int_{-\infty}^{t} v(t')\,dt' \quad [3]$$

donde se supone de manera arbitraria que la tensión es cero en $t = -\infty$. En el caso de un capacitor,

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t)\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt' \quad [4]$$



■ **FIGURA 11.1** La potencia instantánea que se entrega a R es $p_R(t) = i^2(t)R = (V_0^2/R)(1 - e^{-Rt/L})^2u(t)$.

donde se hace un supuesto similar en relación con la corriente. Sin embargo, la lista de ecuaciones de la potencia en términos de sólo una corriente o una tensión muy pronto se convierte en algo pesado y complicado, a medida que se comienzan a considerar redes más generales. La lista también resulta absolutamente innecesaria, pues sólo es necesario determinar la corriente y la tensión en las terminales de la red. Como ejemplo, se podría considerar el circuito RL en serie que se indica en la figura 11.1 excitado mediante una fuente de tensión de escalón. La respuesta de corriente familiar está dada por:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})u(t)$$

y por ello la potencia total suministrada por la fuente o absorbida por la red pasiva se obtiene mediante

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})u(t)$$

puesto que el cuadrado de la función de escalón unitario es sencillamente la propia función de escalón unitario.

(1) Antes, se convenía en que las variables minúsculas en itálicas se considerarían funciones del tiempo, así que se ha mantenido este espíritu hasta ahora. Sin embargo, para subrayar el hecho de que estas cantidades deben evaluarse en un instante de tiempo específico, se denotará de manera explícita la dependencia del tiempo a lo largo de este capítulo

La potencia proporcionada a la resistencia se calcula a través de

$$p_R(t) = i^2(t)R = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})^2u(t)$$

Para determinar la potencia que absorbe el inductor, se calcula primero la tensión en el inductor:

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$= V_0e^{-Rt/L}u(t) + \frac{LV_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})\frac{du(t)}{dt}$$

$$= V_0e^{-Rt/L}u(t)$$

puesto que $du(t)/dt$ es cero para $t > 0$ y $(1 - e^{-Rt/L})$ es cero en $t = 0$. Por lo tanto, la potencia que absorbe el inductor es

$$p_L(t) = v_L(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R}e^{-Rt/L}(1 - e^{-Rt/L})u(t)$$

Sólo se requiere un poco de manipulación algebraica para demostrar que

$$p(t) = p_R(t) + p_L(t)$$

lo cual sirve para verificar la exactitud de este trabajo; los resultados se representan en la gráfica de la figura 11.2.

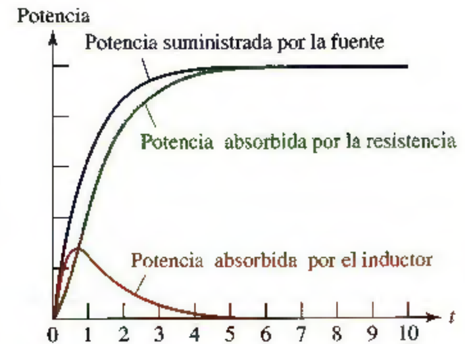


FIGURA 11.2 Gráficas de $p(t)$, $p_R(t)$, y $p_L(t)$. A medida que desaparece el transitorio, el circuito vuelve a la operación de estado permanente. Puesto que la única fuente que queda en el circuito es de cd, a la larga el inductor actúa como un cortocircuito que absorbe potencia cero.

Potencia debida a la excitación senoidal

Se cambiará la fuente de tensión en el circuito de la figura 11.1 por la fuente senoidal $V_m \cos \omega t$. La respuesta común en el dominio del tiempo está dada por

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

donde:

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{y} \quad \phi = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

Por lo tanto, la potencia instantánea que se suministra a todo el circuito en el estado senoidal permanente es:

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi)\cos \omega t$$

que es conveniente reescribir de la forma obtenida empleando la identidad trigonométrica del producto de dos funciones coseno. Por consiguiente,

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}[\cos(2\omega t + \phi) + \cos\phi]$$

$$= \frac{V_m I_m}{2}\cos\phi + \frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \phi)$$

La última ecuación posee varias características válidas en general para circuitos en estado senoidal permanente. Un término, el primero, no es una función del tiempo, en tanto que el segundo término tiene una variación cíclica en el *doble* de la frecuencia aplicada. Debido a que el término es una onda coseno y en vista de que las ondas seno y las coseno tienen valores promedio de cero (cuando se promedia un número entero de periodos), este ejemplo sugiere que la potencia *promedio* (activa) corresponde a $\frac{1}{2}V_m I_m \cos\phi$; como se verá dentro de poco, en realidad ello es lo que ocurre.

EJEMPLO **11.1**

Una fuente de tensión, $40 + 60u(t)$ V, un capacitor de 5 μF y una resistencia de 200 Ω están en serie. Determinar la potencia que absorben el capacitor y la resistencia en $t = 1.2$ ms.

Antes de $t = 0^-$, no fluye ninguna corriente, por lo que una tensión de 40 V aparece en los extremos del capacitor. En $t = 0^+$, la tensión de la combinación en serie de un capacitor y una resistencia salta a 100 V. Puesto que v_C no puede cambiar de manera instantánea, la tensión en la resistencia en $t = 0^+$ corresponde a 60 V.

Por lo tanto, la corriente que circula por los tres elementos en $t = 0^+$ es de $60/200 = 300$ mA y para $t > 0$ está dada por:

$$i(t) = 300e^{-t/\tau} \text{ mA}$$

donde $\tau = RC = 1$ ms. De tal modo, la corriente que fluye en $t = 1.2$ ms es de 90.36 mA y la potencia que absorbe el resistor *en ese instante corresponde* simplemente a

$$i^2(t)R = 1.633 \text{ W}.$$

La potencia instantánea que absorbe el capacitor es $i(t)v_C(t)$. Al reconocer que la tensión total en ambos elementos en $t > 0$ siempre será de 100 V y que la tensión en el resistor está dada por $60e^{-t/\tau}$, se tiene

$$v_C(t) = 100 - 60e^{-t/\tau}$$

de modo que se observa que $v_C(1.2 \text{ ms}) = 100 - 60e^{-1.2} = 81.93$ V. De esta forma, la potencia que está absorbiendo el capacitor en $t = 1.2$ ms es (90.36 mA) (81.93 V) = 7.403 W.

PRÁCTICA

11.1 Una fuente de corriente de 12 cos 2 000t A, una resistencia de 200 Ω y un inductor de 0.2 H están en paralelo. Suponer que existen condiciones de estado permanente. En $t = 1$ ms, determinar la potencia que absorbe: (*a*) la resistencia; (*b*) el inductor y (*c*) la fuente senoidal.

Respuestas: 13.98 kW; −5.63 kW; −8.35 kW.

11.2 POTENCIA PROMEDIO O ACTIVA

Cuando se habla de un valor promedio de la potencia instantánea, debe definirse con toda claridad el intervalo durante el que se lleva a cabo el proceso de promedio. Se elige primero un intervalo general de t_1 a t_2. Se podría obtener el valor promedio al integrar $p(t)$ desde t_1 hasta t_2 y dividir el resultado entre el intervalo $t_2 - t_1$. De tal modo:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt \qquad [5]$$

El valor promedio se denota mediante la letra mayúscula P, puesto que no es una función del tiempo y suele aparecer sin ningún subíndice específico que la identifique como un valor promedio. Aunque P no es una función del tiempo, *es* una

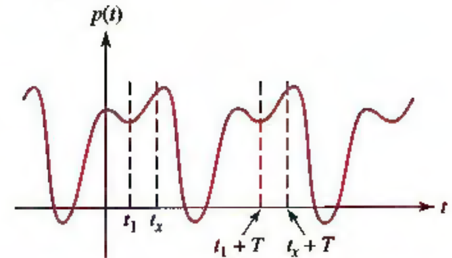
función de t_1 y t_2, los dos instantes que definen el intervalo de integración. Esta dependencia de P en el intervalo específico se expresaría de una manera más simple si $p(t)$ fuese una función periódica. Se considera primero este importante caso.

Potencia promedio (activa) de formas de onda periódicas

Suponga que la función forzada y que las respuestas de circuito son periódicas; se ha alcanzado una condición de estado permanente, aunque no necesariamente el estado senoidal permanente. Se podría definir de manera matemática una función *periódica* $f(t)$ al requerir que

$$f(t) = f(t+T) \qquad [6]$$

donde T es el periodo. A continuación se demostrará que el valor promedio de la potencia instantánea, según se expresa mediante la ecuación [5], se calcularía sobre un intervalo de un periodo que tiene un inicio arbitrario.



■ **FIGURA 11.3** El valor promedio de P de una función periódica $p(t)$ es el mismo sobre cualquier periodo T.

Una forma de onda periódica general se ilustra en la figura 11.3 y se identifica como $p(t)$. Se calcula primero la potencia integrando desde t_1 hasta un tiempo t_2 que está un periodo después, $t_2 = t_1 + T$:

$$P_1 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} p(t)\,dt$$

y se integra luego desde algún otro tiempo t_x hasta $t_x + T$:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T} p(t)\,dt$$

La igualdad de P_1 y P_x debe ser evidente a partir de la interpretación gráfica de las integrales; la naturaleza periódica de la curva requiere que ambas áreas sean iguales. De tal modo, la ***potencia promedio (activa)*** se calcula integrando la potencia instantánea durante cualquier intervalo que sea de un periodo de longitud, y luego se divide entre el periodo:

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T} p(t)\,dt \qquad [7]$$

Es importante observar que se integraría también sobre cualquier número entero de periodos, siempre que se divida entre el mismo número entero de periodos. En consecuencia:

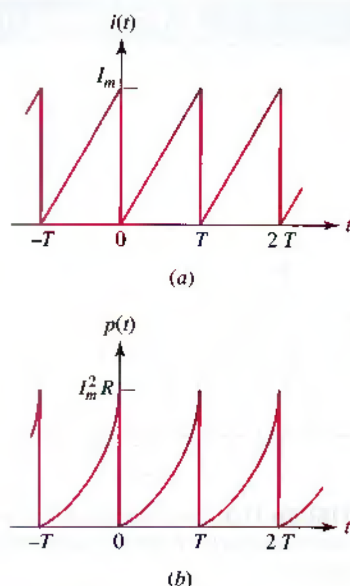
$$P = \frac{1}{nT}\int_{t_x}^{t_x+nT} p(t)\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad [8]$$

Si se lleva este concepto al extremo integrando sobre todo el tiempo, se obtiene otro resultado útil. Primero se proporcionan los límites simétricos en la integral

$$P = \frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2} p(t)\,dt$$

y luego se toman los límites cuando n se vuelve infinita,

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2} p(t)\,dt$$



■ **FIGURA 11.4** (*a*) Forma de onda de corriente diente de sierra, y (*b*) forma de onda de potencia instantánea que se produce en una resistencia *R*.

En tanto que $p(t)$ es una función con buen comportamiento matemático, como lo son todas las funciones y respuestas forzadas *físicamente*, resulta claro que si se sustituye un entero n mayor por un número un poco más grande no entero, entonces el valor de la integral y de P cambian en una cantidad despreciable; además, el error disminuye cuando n crece. Sin justificar este paso de manera rigurosa, se sustituye así la variable discreta nT por la variable continua

$$P = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t)\,dt \qquad [9]$$

Se verá que es conveniente en varias ocasiones integrar funciones periódicas sobre este "periodo infinito". A continuación se dan ejemplos del uso de las ecuaciones [7], [8] y [9].

Se ejemplificará el cálculo de la potencia promedio de una onda periódica al encontrar la potencia promedio suministrada a una resistencia R por la forma de onda de corriente diente de sierra (periódica) que se ilustra en la figura 11.4*a*. Se tiene

$$i(t) = \frac{I_m}{T}t, \qquad 0 < t \le T$$

$$i(t) = \frac{I_m}{T}(t - T), \qquad T < t \le 2T$$

etcétera; y

$$p(t) = \frac{1}{T^2}I_m^2 Rt^2, \qquad 0 < t \le T$$

$$p(t) = \frac{1}{T^2}I_m^2 R(t - T)^2, \qquad T < t \le 2T$$

y así sucesivamente, como se presenta en la figura 11.4*b*. Al integrar sobre el intervalo más simple de un periodo, desde $t = 0$ hasta $t = T$, se tiene

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m^2 R}{T^2}t^2\,dt = \frac{1}{3}I_m^2 R$$

La selección de otros intervalos de un periodo, como de $t = 0.1T$ a $t = 1.1T$, produciría la misma respuesta. La integración desde 0 hasta $2T$ y la división entre $2T$—es decir, la aplicación de la ecuación [8] con $n = 2$ y $t_x = 0$— proporcionaría la misma respuesta.

Potencia promedio (activa) en el estado senoidal permanente

Se obtendrá el resultado general del estado senoidal permanente. Se supondrá la tensión senoidal general

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta)$$

y la corriente

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$$

asociadas con el dispositivo en cuestión. La potencia instantánea se calcula mediante

$$p(t) = V_m I_m\cos(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \phi)$$

Si se expresa otra vez el producto de dos funciones coseno como la semisuma del coseno del ángulo diferencia y el coseno del ángulo suma,

$$p(t) = \tfrac{1}{2}V_m I_m\cos(\theta - \phi) + \tfrac{1}{2}V_m I_m\cos(2\omega t + \theta + \phi) \qquad [10]$$

Recordar que $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$.

es posible ahorrar parte de la integración mediante la inspección del resultado. El primer término es una constante, independiente de t. El otro es una función coseno; $p(t)$ es en consecuencia periódica y su periodo es igual a $\frac{1}{2}T$. Observar que el periodo T se asocia con la corriente y la tensión dadas, y no con la potencia; la función potencia tiene un periodo $\frac{1}{2}T$. Sin embargo, se debe integrar sobre un intervalo de T para determinar el valor promedio, si así se desea; sólo es necesario dividir también entre T. No obstante, la familiaridad que se tiene con las ondas coseno y seno indica que el valor promedio de cualquiera sobre un periodo es cero. Por ello no hay necesidad de integrar de manera formal la ecuación [10]; por inspección, el valor promedio del segundo término es cero sobre un periodo T (o $\frac{1}{2}T$) y el valor promedio del primer término, una constante, debe ser también la propia constante. Por lo tanto,

$$\boxed{P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi)} \qquad [11]$$

Este importante resultado, que se presentó en la sección anterior para un circuito específico, es por lo tanto bastante general del estado senoidal permanente. La potencia promedio resulta la semisuma del producto de la amplitud de cresta de la tensión, la amplitud de cresta de la corriente y el coseno de la diferencia del ángulo de fase entre la corriente y la tensión; el sentido de la diferencia no tiene importancia.

EJEMPLO 11.2

Dada la tensión en el dominio del tiempo $v = 4\cos(\pi t/6)$ V, determinar la potencia promedio y la expresión de la potencia instantánea que se produce cuando la tensión fasorial correspondiente a $\mathbf{V} = 4\underline{/0°}$ V se aplica a través de una impedancia $\mathbf{Z} = 2\underline{/60°}\ \Omega$.

La corriente fasorial es $\mathbf{V}/\mathbf{Z} = 2\underline{/-60°}$ A, y la potencia promedio (activa)

$$P = \frac{1}{2}(4)(2)\cos 60° = 2 \text{ W}$$

la tensión en el dominio del tiempo es

$$v(t) = 4\cos\frac{\pi t}{6} \text{ V}$$

la corriente en el dominio del tiempo

$$i(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 60°\right) \text{A}$$

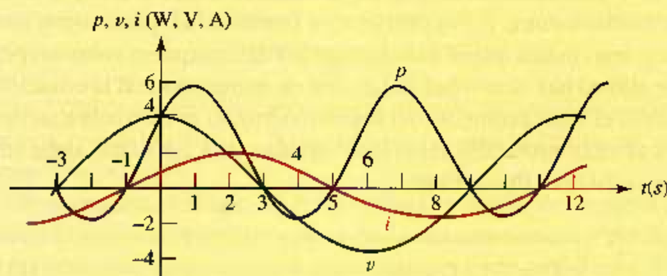
y la potencia instantánea

$$p(t) = 8\cos\frac{\pi t}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 60°\right)$$

$$= 2 + 4\cos\left(\frac{\pi t}{3} - 60°\right) \text{W}$$

(Continúa en la siguiente página)

se dibujan sobre el mismo eje de tiempo de la figura 11.5. Tanto el valor promedio de 2 W de la potencia como su periodo de 6 s, la mitad del periodo de la corriente o de la tensión, resultan evidentes. También es claro el valor cero de la potencia instantánea en cada instante, cuando la tensión o la corriente es cero.



■ **FIGURA 11.5** Las curvas de $v(t)$, $i(t)$, y $p(t)$ se grafican como funciones de tiempo de un circuito simple en el cual la tensión fasorial $\mathbf{V} = 4\underline{/0^\circ}$ V se aplica a la impedancia $\mathbf{Z} = 2\underline{/60^\circ}\ \Omega$ con $\omega = \pi/6$ rad/s.

PRÁCTICA

11.2 Dada la tensión fasorial $\mathbf{V} = 115\sqrt{2}\underline{/45^\circ}$ V en una impedancia $\mathbf{Z} = 16.26\underline{/19.3^\circ}\ \Omega$, obtener la expresión de la potencia instantánea y calcular la potencia promedio si $\omega = 50$ rad/s.

Respuestas: $767.5 + 813.2\cos(100t + 70.7^\circ)$ W; 767.5 W.

Vale la pena considerar por separado dos casos especiales, la potencia promedio entregada a una resistencia ideal y la correspondiente a un reactor ideal (cualquier combinación de sólo capacitores e inductores).

Potencia promedio absorbida por una resistencia ideal

La diferencia de ángulo de fase entre la corriente y la tensión en una resistencia pura es cero. De tal modo,

Considerar que se está calculando la potencia ***promedio*** entregada a una resistencia por una fuente senoidal; tener cuidado de no confundir esta cantidad con la potencia ***instantánea*** que tiene una forma similar.

$$P_R = \tfrac{1}{2}V_m I_m \cos 0 = \tfrac{1}{2}V_m I_m$$

o

$$P_R = \tfrac{1}{2}I_m^2 R \qquad [12]$$

o

$$P_R = \frac{V_m^2}{2R} \qquad [13]$$



Las últimas dos fórmulas, que permiten determinar la potencia promedio entregada a una resistencia pura a partir del conocimiento de la corriente o de la tensión senoidal, son simples e importantes. Desafortunadamente, *se usan de manera incorrecta.* El error más común se comete al tratar de aplicarlas en casos donde la tensión incluida en la ecuación [13] *no es la que se presenta en la resistencia.* Si se tiene cuidado al emplear la corriente que circula por la resistencia de la ecuación [12] y la tensión a través de la misma en la ecuación [13], se garantiza una operación satisfactoria. Además, ¡no hay que olvidar el factor de $\frac{1}{2}$!

Potencia promedio (activa) absorbida por elementos puramente reactivos

La potencia promedio entregada a cualquier dispositivo que es puramente reactivo (es decir, que no contiene resistencias) debe ser cero. Éste es un resultado directo de la diferencia de fase de 90°, que debe existir entre la corriente y la tensión; en consecuencia, $\cos(\theta - \phi) = \cos \pm 90° = 0$ y

$$P_X = 0$$

La potencia *promedio* que se entrega a cualquier red compuesta totalmente por inductores y capacitores ideales es cero; la potencia *instantánea* es cero sólo en instantes específicos. Por lo tanto, la potencia fluye hacia la red en una parte del ciclo, y fuera de la misma durante otra parte del ciclo, *sin* potencia perdida.



EJEMPLO 11.3

Encontrar la potencia promedio (activa) que se entrega a una impedancia $\mathbf{Z}_L = 8 - j11\ \Omega$ por la que circula una corriente $\mathbf{I} = 5\underline{/20°}$ A.

Se podría encontrar la solución bastante rápido si se utiliza la ecuación [12]. Sólo la resistencia de 8 Ω entra en el cálculo de la potencia promedio, ya que la componente $j11\ \Omega$ no absorberá ninguna potencia *promedio*. En consecuencia,

$$P = \tfrac{1}{2}(5^2)8 = 100 \text{ W}$$

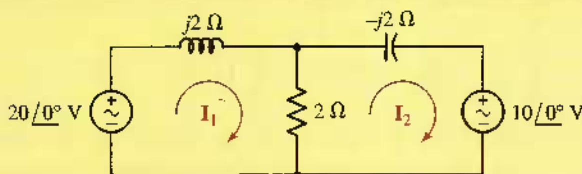
PRÁCTICA

11.3 Calcular la potencia promedio suministrada a la impedancia $6\underline{/25°}\ \Omega$ por la que circula una corriente $\mathbf{I} = 2 + j5$ A.

Respuesta: 78.85 W.

EJEMPLO 11.4

Determinar la potencia promedio que absorbe cada uno de los tres elementos pasivos de la figura 11.6, así como la potencia promedio que suministra cada fuente.



■ **FIGURA 11.6** La potencia promedio que se entrega a cada elemento reactivo es cero en el estado permanente senoidal.

Sin hacer un análisis del circuito, ya se sabe que la potencia promedio absorbida por dos elementos reactivos es cero.

(Continúa en la siguiente página)

Los valores de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ se calculan mediante cualquiera de los diversos métodos, como el análisis de malla, el análisis nodal o la superposición. Dichos valores son

$$\mathbf{I}_1 = 5 - j10 = 11.18\underline{/-63.43^\circ} \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_2 = 5 - j5 = 7.071\underline{/-45^\circ} \text{ A}$$

La corriente hacia abajo que pasa por la resistencia de 2 Ω es

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = -j5 = 5\underline{/-90^\circ} \text{ A}$$

por lo que $I_m = 5$ A, y la potencia promedio que absorbe la resistencia se calcula de manera más fácil mediante la ecuación [12]:

$$P_R = \tfrac{1}{2} I_m^2 R = \tfrac{1}{2}(5^2)2 = 25 \text{ W}$$

Este resultado se verifica utilizando la ecuación [11] o la [13]. A continuación se concentrará la atención en la fuente izquierda. La tensión $20\underline{/0^\circ}$ V y la corriente asociada $\mathbf{I}_1 = 11.18\underline{/-63.43^\circ}$ satisface la convención de signos *activa* y por ello la potencia que *entrega* esta fuente es

$$P_{\text{izquierda}} = \tfrac{1}{2}(20)(11.18)\cos[0^\circ - (-63.43^\circ)] = 50 \text{ W}$$

De manera similar, se obtiene que la potencia *absorbida* por la fuente derecha, utilizando la convención de signos *pasiva* es

$$P_{\text{derecha}} = \tfrac{1}{2}(10)(7.071)\cos(0^\circ + 45^\circ) = 25 \text{ W}$$

Puesto que $50 = 25 + 25$, se confirman las relaciones de potencia.

PRÁCTICA

11.4 En el circuito de la figura 11.7, calcular la potencia promedio entregada a cada uno de los elementos pasivos. Verificar la respuesta mediante el cálculo de la potencia que entregan las dos fuentes.

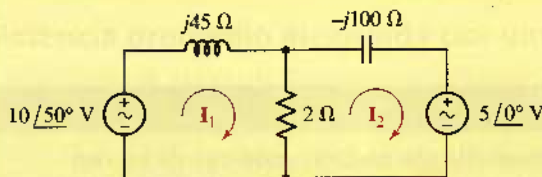


FIGURA 11.7

Respuesta: 0, 37.6 mW, 0, 42.0 mW, −4.4 mW.

Transferencia de potencia máxima

La notación $\mathbf{Z}^*$ denota el ***conjugado complejo*** del número complejo $\mathbf{Z}$ que se forma mediante la sustitución de todas las "j" por "$-j$". Consultar el apéndice 5 para mayores detalles.

Se consideró antes el teorema de transferencia de potencia máxima cuando se aplica a cargas resistivas y a impedancias de fuentes resistivas. En el caso de una fuente de Thévenin $\mathbf{V}_{th}$ e impedancia $\mathbf{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$ conectada a una carga $\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$, se demostraría que la potencia promedio que se entrega a la carga es un máximo cuando $R_L = R_{th}$ y $X_L = -X_{th}$, es decir, cuando $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$.

Este resultado a menudo se dignifica llamándolo *teorema de transferencia de potencia máxima del estado senoidal permanente:*

> Una fuente de tensión independiente en *serie* con una impedancia $\mathbf{Z}_{th}$ o en una fuente de corriente independiente en *paralelo* con una impedancia $\mathbf{Z}_{th}$ entrega una ***potencia promedio máxima*** a una impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ que el conjugado de $\mathbf{Z}_{th}$ o $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$.

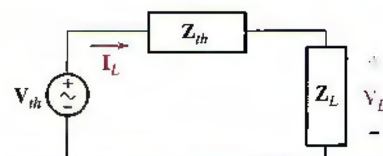


FIGURA 11.8 Circuito de lazo simple que se utiliza para ilustrar la deducción del teorema de transferencia de potencia máxima, cuando se aplica a circuitos que operan en estado senoidal permanente.

Los detalles de la demostración se dejan para el ejercicio 11, aunque el método básico se comprende al considerar el circuito de lazo simple de la figura 11.18. Se podría escribir la impedancia equivalente de Thévenin $\mathbf{Z}_{th}$ como la suma de dos componentes, $R_{th} + jX_{th}$, y de manera similar, la impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ se expresa como $R_L + jX_L$. La corriente que circula por el lazo se calcula mediante

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{th}}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L}$$
$$= \frac{\mathbf{V}_{th}}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \frac{\mathbf{V}_{th}}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

y

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_{th}\frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L}$$
$$= \mathbf{V}_{th}\frac{R_L + jX_L}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \mathbf{V}_{th}\frac{R_L + jX_L}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

La magnitud de $\mathbf{I}_L$ es

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}|}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

y el ángulo de fase corresponde a

$$\underline{/\mathbf{V}_{th}} - \tan^{-1}\left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L}\right)$$

De manera similar, la magnitud de $\mathbf{V}_L$ es igual a

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}|\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

y su ángulo de fase está dado por

$$\underline{/\mathbf{V}_{th}} + \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R_L}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L}\right)$$

En relación con la ecuación [11], entonces, se encuentra la expresión de la potencia promedio P entregada a la impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$:

$$P = \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{V}_{th}|^2\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R_L}\right)\right) \qquad [14]$$

Para probar que la potencia promedio máxima en realidad se entrega a la carga cuando $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$, se deben efectuar dos pasos independientes. Primero, la derivada de la ecuación [14] con respecto a R_L debe igualarse a cero. Segundo,

la derivada de la ecuación [14] con respecto a X_L también se debe igualar a cero. Los detalles restantes se dejan como ejercicio para el lector ávido.

EJEMPLO 11.5

Un circuito está compuesto por la combinación en serie de una fuente de tensión senoidal 3 cos(100t − 3°) V, una resistencia de 500 Ω, un inductor de 30 mH y una impedancia desconocida. Si se está seguro de que la fuente de tensión está entregando la potencia promedio (activa) máxima a la impedancia desconocida, ¿cuál es su valor?

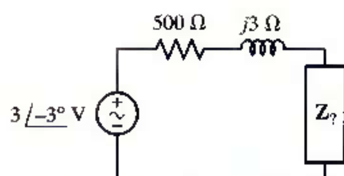


FIGURA 11.9 Representación fasorial de un circuito en serie simple compuesto por una fuente de tensión senoidal, una resistencia, un inductor y una impedancia desconocida.

La representación de fasores del circuito se dibuja en la figura 11.9 y éste se observa con facilidad como una impedancia desconocida $\mathbf{Z}_?$ en serie con un equivalente de Thévenin compuesto por la fuente $3\underline{/-3^\circ}$ V y una impedancia de Thévenin $500 + j3\ \Omega$.

Debido a que el circuito de la figura 11.9 ya está en la forma que se requiere para aplicar el teorema de transferencia de potencia promedio máxima, se sabe que ésta se transferirá a una impedancia igual al complejo conjugado de $\mathbf{Z}_{th}$, o

$$\mathbf{Z}_? = \mathbf{Z}_{th}^* = 500 - j3\ \Omega$$

Se construye esta impedancia de varias maneras, pero la más simple es una resistencia de 500 Ω, en serie con un capacitor que tiene $-j3\ \Omega$. En razón de que la frecuencia de operación del circuito equivale a 100 rad/s, corresponde a una capacitancia de 3.333 mF.

PRÁCTICA

11.5. Si el inductor de 30 mH del ejemplo 11.5 se sustituye por un capacitor de 10 μF ¿cuál es el valor de la componente inductiva de la impedancia desconocida $\mathbf{Z}_?$ si se sabe que está absorbiendo una potencia máxima?

Respuesta: 10 H.

Potencia promedio (activa) de funciones no periódicas

Se debe prestar cierta atención a las funciones *no periódicas*. La salida de potencia de un radiotelescopio dirigido hacia una "radioestrella" constituye un ejemplo práctico de una función de potencia no periódica para la que se desea un valor de potencia promedio. Otro es la suma de varias funciones periódicas, cada una con un periodo diferente, de tal manera que no pueda encontrarse un periodo mayor de la combinación. Por ejemplo, la corriente

$$i(t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} \pi t \qquad [15]$$

es no periódica debido a que la proporción de los periodos de las dos ondas senoidales es un número irracional. En $t = 0$, ambos términos son cero y crecientes. Sin embargo, el primer término es cero y creciente sólo cuando $t = 2\pi n$, donde n es un entero y por lo tanto la periodicidad exige que πt o $\pi(2\pi n)$ deban ser iguales a $2\pi m$, donde m es también un entero. No es posible

una solución para esta ecuación (valores enteros de m y n) Quizá resulte útil comparar la expresión no periódica de la ecuación [15] con la función *periódica:*

$$i(t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 3.14t \qquad [16]$$

donde 3.14 es una expresión decimal exacta y no se interpreta como 3.141592 . . . Con un poco de esfuerzo,[2] se demuestra que el periodo de esta onda de corriente mide igual a 100π segundos.

El valor promedio de la potencia que se entrega a una resistencia de 1 Ω mediante una corriente periódica, como la ecuación [16], o a partir de una no periódica como la ecuación [15], se determina integrando sobre un intervalo finito. De esta forma se reduce mucho la integración real debido al conocimiento amplio que se tiene de los valores promedio de las funciones simples. Por lo tanto, se obtiene la potencia promedio que entrega la corriente en la ecuación [15] aplicando la ecuación [9]:

$$P = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 \pi t + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \pi t)\, dt$$

Se considera ahora a P como la suma de tres valores promedio. El valor promedio de $\operatorname{sen}^2 t$ sobre un intervalo infinito se determina sustituyendo $\operatorname{sen}^2 t$ por $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t)$; el promedio no es más que $\frac{1}{2}$. De manera similar, el valor promedio de $\operatorname{sen}^2 \pi t$ también es $\frac{1}{2}$, y el último término se expresa como la suma de dos funciones coseno, cada una de las cuales debe tener ciertamente un valor promedio de cero. Por lo tanto,

$$P = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \text{ W}$$

Un resultado idéntico se obtiene en el caso de la corriente periódica de la ecuación [16]. Al aplicar este mismo método a la función de corriente, que es la suma de varias senoides de *periodos diferentes* y amplitudes arbitrarias,

$$i(t) = I_{m1} \cos \omega_1 t + I_{m2} \cos \omega_2 t + \cdots + I_{mN} \cos \omega_N t \qquad [17]$$

se calcula la potencia promedio entregada a una resistencia R,

$$P = \tfrac{1}{2}\left(I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \cdots + I_{mN}^2\right) R \qquad [18]$$

El resultado es invariable si se asigna un ángulo de fase arbitrario a cada componente de la corriente. Este importante resultado es sorprendentemente simple cuando se piensa en los pasos que se requieren para su deducción: elevar al cuadrado la función corriente, integrarla y tomar el límite. El resultado es igual de sorpresivo, pues muestra que, *en este caso especial de una corriente como la de la ecuación [17], la superposición se aplica a la potencia, esto es, no* se aplica a una corriente que sea la suma de dos corrientes directas, ni a una corriente que sea la suma de dos senoides de la misma frecuencia.



EJEMPLO 11.6

Determinar la potencia promedio (activa) que entrega la corriente $i_1 = 2 \cos 10t - 3 \cos 20t$ A a una resistencia de 4 Ω.

En razón de que los dos términos coseno están a frecuencias *diferentes,* los dos valores de potencia promedio se podrían calcular por separado y se sumarían. De tal modo, esta corriente entrega $\frac{1}{2}(2^2)4 + \frac{1}{2}(3^2)4 = 8 + 18 = 26$ W a una resistencia de 4 Ω.

(2) $T_1 = 2\pi$ y $T_2 = 2\pi/3.14$. Por lo tanto, se buscan valores integrales de m y n tales que $2\pi n = 2\pi m/3.14$, o $3.14n = m$, o $\frac{314}{100}n = m$ o $157n = 50\,m$. De tal modo, los valores enteros más pequeños de n y m son $n = 50$ y $m = 157$. En consecuencia, el periodo es $T = 2\pi n = 100\pi$, o $T = 2\pi(157/3.14) = 100\pi$ s.

EJEMPLO 11.7

Determinar la potencia que entrega la corriente $i_2 = 2 \cos 10t - 3 \cos 10t$ A a una resistencia de 4 Ω.

En este caso, ambas componentes de la corriente *están* a la *misma* frecuencia, por lo cual deben combinarse en una sola senoide a dicha frecuencia. De tal manera, $i_2 = 2\cos 10t - 3\cos 10t = -\cos 10t$ entrega sólo $\frac{1}{2}(1^2)4 = 2$ W de potencia promedio a una resistencia de 4 Ω.

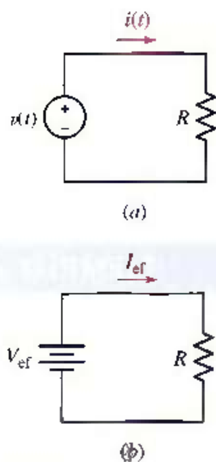
PRÁCTICA

11.6 Una fuente de tensión v_s se conecta a una resistencia de 4 Ω. Determinar la potencia promedio absorbida por la resistencia, si v_s es igual a: (*a*) 8 sen 200*t* V; (*b*) 8 sen 200*t* − 6 cos(200*t* − 45°) V; (*c*) 8 sen 200*t* − 4 sen 100*t* V; (*d*) 8 sen 200*t* − 6 cos(200*t* − 45°) − 5 sen 100*t* + 4 V.

Respuestas: 8.00 W; 4.01 W; 10.00 W; 11.14 W.

11.3 VALORES EFICACES DE CORRIENTE Y DE TENSIÓN

La mayoría de la gente está consciente de que la tensión disponible en las tomas de energía eléctrica en Norteamérica es una tensión senoidal con 60 Hz de frecuencia y 115 V de magnitud (en cualquier otro lado, es típicamente de 50 Hz y 240 V). Pero, ¿qué se entiende por "115 volts"? No es en realidad el valor instantáneo de la tensión, pues ésta no es una constante. No es tampoco la amplitud simbolizada como V_m; si se presenta la forma de onda de tensión sobre un osciloscopio calibrado, se descubriría que la amplitud de esta tensión en una de las tomas de ca es $115\sqrt{2}$, o 162.6, volts. Tampoco se puede hacer corresponder el concepto de un valor promedio con los 115 V, debido a que un valor promedio de la onda senoidal es cero. Se podría tratar de ser un poco más precisos y calcular la magnitud del promedio sobre un semiciclo positivo o negativo; mediante el uso de un voltímetro tipo rectificador en la toma eléctrica, se debe medir 103.5 V. Sin embargo, sucede que los 115 V son el ***valor eficaz*** de esta tensión senoidal. El valor es una medida de la eficacia de la fuente de tensión al suministrar potencia a una carga resistiva.



■ **FIGURA 11.10** Si la resistencia recibe la misma potencia promedio en los incisos *a* y *b*, entonces el valor eficaz de *i*(*t*) es igual a I_{ef}, y el valor eficaz de *v*(*t*) es igual a V_{ef}.

Valor eficaz de una forma de onda periódica

Se define de manera arbitraria el valor eficaz en términos de una forma de onda de corriente, si bien sería igualmente posible elegir una tensión. El *valor eficaz* de cualquier corriente periódica resulta igual al valor de la corriente directa que, al fluir a través de una resistencia de *R*-ohm entrega la misma potencia promedio a la resistencia que la corriente periódica.

En otras palabras, se deja que una corriente periódica dada fluya por la resistencia, se determina la potencia instantánea i^2R, y luego se obtiene el valor promedio de i^2R sobre un periodo; esto es la potencia promedio (activa). Se provoca después que una corriente directa fluya por esta misma resistencia y se ajusta el valor de la corriente directa hasta que se obtenga el mismo valor de potencia promedio. La magnitud resultante de la corriente directa es igual al valor eficaz de la corriente periódica dada. Estas ideas se ilustran en la figura 11.10.

La expresión matemática general del valor eficaz de $i(t)$ se obtiene después con facilidad. La potencia promedio (activa) que entrega la corriente periódica $i(t)$ a la resistencia se obtiene mediante

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\,dt = \frac{R}{T}\int_0^T i^2\,dt$$

donde el periodo de $i(t)$ es T. La potencia que entrega la corriente directa corresponde a

$$P = I_{ef}^2 R$$

Igualando las expresiones de potencia y despejando I_{ef}, se obtiene

$$\boxed{I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}} \qquad [19]$$

El resultado es independiente de la resistencia R, como debe ser para que se cuente con un concepto ventajoso. Se obtiene una expresión similar del valor eficaz de una tensión periódica al reemplazar i e I_{ef} por v y V_{ef}, respectivamente.

Observar que el valor eficaz se obtiene al elevar al cuadrado primero la función del tiempo, tomando luego el valor promedio de la función al cuadrado sobre un periodo, y considerando por último la raíz cuadrada del promedio de la función al cuadrado. En lenguaje abreviado, la operación que implica determinar un valor eficaz es la *raíz (cuadrada)* de la media del cuadrado; por esta razón, a menudo el valor eficaz se denomina como el valor de la ***raíz cuadrática media*** o simplemente el valor ***rms***.

Valor eficaz (RMS) de una forma de onda senoidal

El caso especial más importante es el de la forma de onda senoidal. Seleccionar la corriente senoidal

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

que tiene un periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

y sustituirla en la ecuación [19] para obtener el valor eficaz

$$\begin{aligned} I_{ef} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)\,dt} \\ &= I_m\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + 2\phi)\right]dt} \\ &= I_m\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}[t]_0^{2\pi/\omega}} \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

De esta forma, el valor eficaz de una corriente senoidal es una cantidad real independiente del ángulo de fase y numéricamente igual a $1/\sqrt{2} = 0.707$ veces la amplitud de la corriente. Por lo tanto, una corriente $\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$ A, tiene un

valor eficaz de 1 A y entregará la misma potencia promedio a cualquier resistencia, como lo hará una corriente directa de 1 A.

Debe observarse con cuidado que el factor $\sqrt{2}$ que se obtuvo como la proporción entre la amplitud de la corriente periódica y el valor eficaz sólo se aplica cuando la función periódica es *senoidal.* Por ejemplo, para la forma de onda de diente de sierra de la figura 11.4, el valor eficaz es igual al valor máximo dividido entre $\sqrt{3}$. El factor mediante el cual el valor máximo debe dividirse para obtener el valor eficaz depende de la forma matemática de la función periódica dada; quizá sea racional o irracional, lo cual depende de la naturaleza de la función.

Uso de los valores RMS para calcular la potencia promedio

La utilización del valor eficaz simplifica también un poco la expresión de la potencia promedio que entrega una corriente o una tensión senoidal, al evitar el uso del factor $\frac{1}{2}$. Por ejemplo, la potencia promedio que se entrega a una resistencia de R ohms a partir de una corriente senoidal, se calcula mediante

$$P = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

El hecho de que el valor eficaz se defina en términos de una cantidad de cd equivalente, proporciona fórmulas de potencia promedio para circuitos resistivos que son idénticas a las utilizadas en el análisis de cd.

En razón de que $I_{ef} = I_m/\sqrt{2}$, la potencia promedio se escribirá como

$$P = I_{ef}^2 R \qquad [20]$$

Las otras expresiones también se escribirían en términos de valores eficaces:

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(\theta - \phi) \qquad [21]$$

$$P = \frac{I_{ef}^2}{R} \qquad [22]$$

Aunque se ha tenido éxito al eliminar el factor $\frac{1}{2}$ de las relaciones de potencia promedio, se debe tener cuidado de determinar si una cantidad senoidal se expresa en términos de su amplitud o de su valor eficaz. En la práctica, suele usarse el valor eficaz en las áreas de la transmisión o distribución de potencia y con maquinaria rotatoria; en las aplicaciones de la electrónica y las comunicaciones, se usa más a menudo la amplitud. Se supondrá que la amplitud se especifica, a menos que el término "rms" se utilice de manera explícita o que se indique otra cosa.

En el estado senoidal permanente, las tensiones y las corrientes fasoriales se indicarían como valores eficaces o como amplitudes; las dos expresiones difieren sólo por un factor de $\sqrt{2}$. La tensión $50\underline{/30^\circ}$ V se expresa en términos de una amplitud; en cuanto a la tensión rms, se la debe describir como $35.4\underline{/30^\circ}$ V rms.

Valor eficaz con circuitos de frecuencia múltiple

Para determinar el valor eficaz de una forma de onda periódica o no periódica, compuesta por la suma de varias senoides con frecuencias diferentes, se podría emplear la relación apropiada de la potencia promedio de la ecuación [18], formulada en la sección anterior, reescribiendo en términos de valores eficaces las distintas componentes:

$$P = \left(I_{1ef}^2 + I_{2ef}^2 + \cdots + I_{Nef}^2\right) R \qquad [23]$$

A partir de lo anterior se observa que el valor eficaz de una corriente, compuesta por varias corrientes senoidales de frecuencias *diferentes*, se expresa como

$$I_{ef} = \sqrt{I_{1ef}^2 + I_{2ef}^2 + \cdots + I_{Nef}^2} \qquad [24]$$

Estos resultados indican que si una corriente senoidal de 5 A rms a 60 Hz fluye por una resistencia de 2 Ω, la resistencia absorbe una potencia promedio de $5^2(2) = 50$ W si también está presente una segunda corriente —tal vez de 3 A rms a 120 Hz— la potencia que se absorbe corresponde a $3^2(2) + 50 = 68$ W. Al recurrir más bien a la ecuación [24], se puede observar que el valor eficaz de la suma de las corrientes de 60 y 120 Hz es 5.831 A. De tal modo, $P = 5.831^2(2) = 68$ W como antes. Sin embargo, si la segunda corriente está también a 60 Hz, el valor eficaz de la suma de ambas corrientes de 60 Hz podría tener cualquier valor entre 2 y 8 A. En este caso, la potencia absorbida tendría *cualquier* valor entre 8 W y 128 W, según sea la fase relativa de las dos componentes de corriente.

Observar que el valor eficaz de una cantidad de cd, K es simplemente K, no $\frac{K}{2}$.

PRÁCTICA

11.7 Calcular el valor eficaz de cada una de las tensiones periódicas: (*a*) $6 \cos 25t$; (*b*) $6 \cos 25t + 4 \operatorname{sen}(25t + 30°)$; (*c*) $6 \cos 25t + 5 \cos^2(25t)$; (*d*) $6 \cos 25t + 5 \operatorname{sen} 30t + 4$ V.

Respuestas: 4.24 V; 6.16 V; 5.23 V; 6.82 V.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

PSpice proporciona varias técnicas útiles para calcular cantidades de potencia. En particular, las funciones incorporadas de Probe permiten graficar la potencia instantánea y calcular la potencia promedio. Por ejemplo, considerar el circuito divisor de tensión simple de la figura 11.11, que se acciona mediante una onda senoidal de 60 Hz con una amplitud de $115\sqrt{2}$ V.

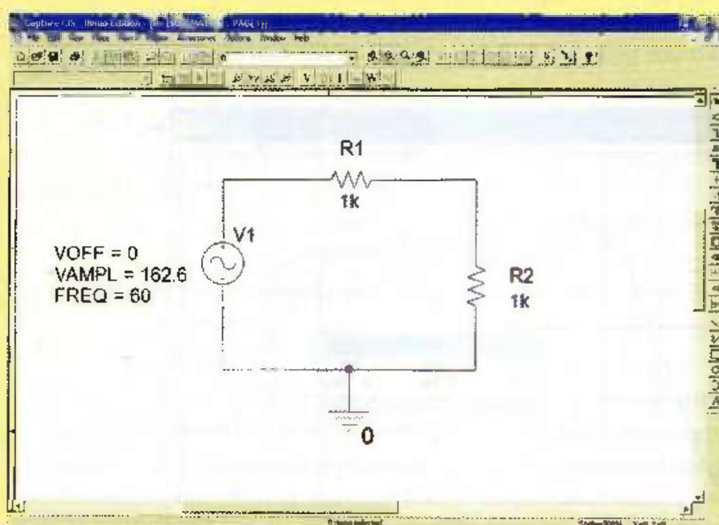
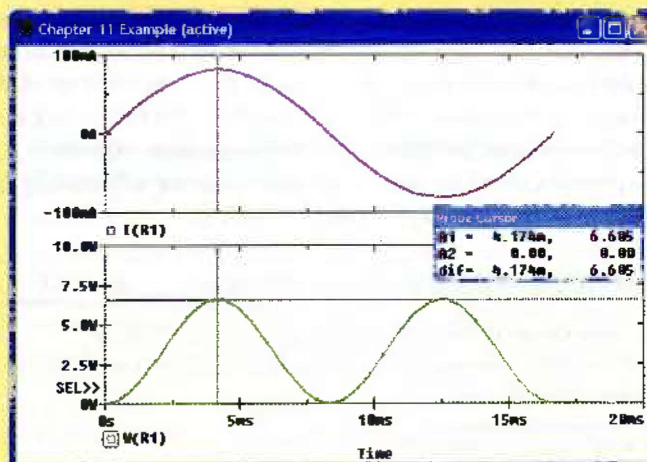


FIGURA 11.11 Circuito divisor de tensión simple accionado por una rms de 115 V y que opera a 60 Hz.

(Continúa en la siguiente página)

Para empezar, se llevará a cabo una simulación transitoria sobre un periodo de la forma de onda de tensión, $\frac{1}{60}$ s.

La corriente, junto con la potencia instantánea que se disipa en la resistencia R1 se grafica en la figura 11.12 empleando la opción **Add Plot to Window** bajo **Plot**. La potencia instantánea es periódica, con un valor promedio distinto de cero y un máximo de 6.61 W.



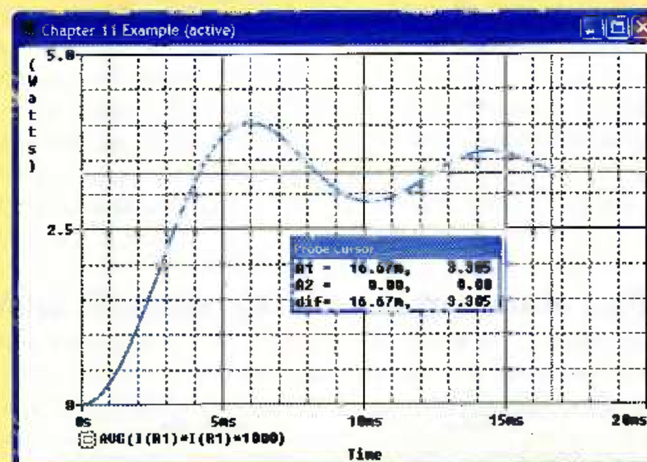
■ **FIGURA 11.12** Corriente y potencia instantáneas asociadas con la resistencia R1 de la figura 11.11.

La forma más sencilla de utilizar Probe para obtener la potencia promedio (activa), que se espera que sea $\frac{1}{2}\left(162.6\frac{1000}{1000+1000}\right)(81.3 \times 10^{-3}) = 3.305$ W, radica en utilizar la característica incorporada "ejecución de la función promedio". Luego de que aparece la ventana de diálogo **Add Traces** (**Trace**, **Add Trace . . .**), se teclea:

AVG(I(R1) * I(R1) * 1000)

en la ventana **Trace Expression.**

Como puede observarse en la figura 11.13, el valor promedio de la potencia de uno o dos periodos es 3.305 W, de acuerdo con el cálculo manual.



■ **FIGURA 11.13** Ejecución del promedio de la potencia disipada por la resistencia R1.

Probe permite también calcular el promedio de un intervalo específico utilizando la función incorporada avgx. Por ejemplo, al emplear esta función para calcular la potencia promedio durante un periodo sencillo, en este caso $1/120 = 8.33$ ms, se debe teclear

AVGX(I(R1) * I(R1) * 1000, 8.33 m)

Cualquier procedimiento originará un valor de 3.305 W en el punto final de la gráfica.

11.4 POTENCIA APARENTE Y FACTOR DE POTENCIA

Desde una perspectiva histórica, la introducción de los conceptos de potencia aparente y de factor de potencia puede remontarse hasta la industria eléctrica, donde se requiere transferir grandes cantidades de energía eléctrica de un punto a otro; la eficiencia con la cual se efectúa tal transferencia se relaciona de manera directa con el costo de la energía eléctrica, que a fin de cuentas la pagan los consumidores. Éstos, que ofrecen cargas que producen una eficiencia de transmisión relativamente pobre, deben pagar un mayor precio por cada ***kilowatt hora*** (kWh) de energía eléctrica que en realidad reciben y consumen. De manera similar, los clientes que requieren una inversión mayor en los equipos de transmisión y distribución por parte de la empresa eléctrica pagarán también más por cada kilowatt hora, a menos que la compañía sea benevolente y le guste perder dinero.

En primer lugar se definirá la ***potencia aparente*** y el ***factor de potencia***; luego se mostrará de manera breve cómo se relacionan ambos términos con las situaciones económicas antes mencionadas. Se supone que la tensión senoidal:

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

se aplica a una red, y la corriente senoidal resultante es

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

De esta forma, el ángulo de fase mediante el cual la tensión adelanta a la corriente es $(\theta - \phi)$. La potencia promedio que se entrega a la red, suponiendo una convención pasiva de signos en sus terminales de entrada, se expresa en términos de los valores máximos:

$$P = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

o en términos de los valores eficaces:

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(\theta - \phi)$$

Si las respuestas en tensión y en corriente aplicadas fueron cantidades cd, la potencia promedio entregada a la red habría sido simplemente igual al producto de la tensión y la corriente. Al aplicar esta técnica de cd al problema senoidal, se debe obtener el valor de la potencia absorbida, que está dada "aparentemente" por el familiar producto $V_{ef} I_{ef}$. Sin embargo, este producto de los *valores eficaces* de la tensión y la corriente no es la potencia promedio; se define dicho producto como la ***potencia aparente***. En términos dimensionales, la potencia aparente debe medirse en las mismas unidades que la potencia real, pues

La potencia aparente no es un concepto limitado a las funciones y respuestas forzadas senoidales. Se podría determinar para cualesquiera formas de onda de corriente y tensión, al formar simplemente el producto de los valores eficaces de la corriente y la tensión.



$\cos(\theta - \phi)$ es adimensional; pero para evitar confusiones, se aplica el término ***volt-amperes*** o VA a la potencia aparente. Puesto que $\cos(\theta - \phi)$ no puede tener una magnitud mayor que la unidad, resulta evidente que la magnitud de la potencia real no es mayor que la de la potencia aparente.

La proporción entre las potencias real o promedio (activa) y la potencia aparente recibe el nombre de ***factor de potencia*** y se simboliza como FP. En consecuencia,

$$\text{PF} = \frac{\text{potencia promedio}}{\text{potencia aparente}} = \frac{P}{V_{\text{ef}} I_{\text{ef}}}$$

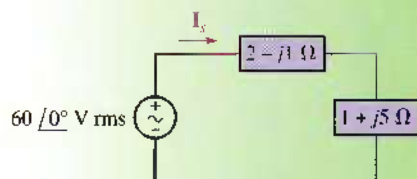
En el caso senoidal, el factor de potencia no es más que $\cos(\theta - \phi)$, donde $(\theta - \phi)$ es el ángulo mediante el cual la tensión adelanta a la corriente. Esta relación es la razón por la que el ángulo $(\theta - \phi)$ se conoce a menudo como ***ángulo de FP***.

En el caso de una carga puramente resistiva, la tensión y la corriente están en fase, $(\theta - \phi)$ es igual a cero y el FP es la unidad. En otras palabras, la potencia aparente y la potencia promedio son iguales. Sin embargo, el FP unitario también se obtendría en el caso de cargas que contengan inductancia y capacitancia, si los valores de los elementos y la frecuencia de operación se eligen con cuidado, a fin de proporcionar una impedancia de entrada que tenga un ángulo de fase cero. Una carga puramente reactiva, esto es, que no contenga resistencia, ocasionará una diferencia de fase entre la tensión y la corriente de más o menos 90°, por lo cual el FP es cero.

Entre estos dos casos extremos existen las redes generales en las que el FP varía desde cero hasta la unidad. Por ejemplo, un FP de 0.5 indica una carga que tiene una impedancia de entrada, con un ángulo de fase de 60° o −60°; el primero describe una carga inductiva, pues la tensión adelanta a la corriente en 60°, mientras que el último se refiere a una carga capacitiva. La ambigüedad en la naturaleza exacta de la carga se resuelve mediante la referencia a un FP adelantado o a un FP retrasado, donde los términos *adelantado* o *retrasado* se refieren a la *fase de la corriente con respecto de la tensión*. De tal modo, una carga inductiva tendrá un FP retrasado, y una carga capacitiva un FP adelantado.

EJEMPLO 11.8

Calcular los valores de la potencia promedio suministrada a cada una de las cargas que se indican en la figura 11.14, así como la potencia aparente que proporciona la fuente y el factor de potencia de las cargas combinadas.



■ **FIGURA 11.14** Circuito en el que se busca la potencia promedio (activa) entregada a cada elemento, la potencia aparente suministrada por la fuente y el factor de potencia de la carga combinada.

Identificar el objetivo del problema.

La potencia promedio se refiere a la que consumen los componentes resistivos de los elementos de carga; la potencia aparente es el producto de la tensión eficaz y de la corriente eficaz de la combinación de carga.

Recopilar la información conocida.

La tensión eficaz es de 60 V rms, que aparece en los extremos de una carga combinada de $2 - j + 1 + j5 = 3 + j4\ \Omega$.

Imaginar un plan.

El análisis fasorial simple proporcionará la corriente. El conocimiento de la tensión y de la corriente permitirá calcular la potencia promedio y la potencia aparente; estas dos cantidades pueden utilizarse para obtener el factor de potencia.

Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.
La potencia promedio está dada por

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(ang\ \mathbf{V} - ang\ \mathbf{I})$$

La potencia aparente es simplemente $V_{ef} I_{ef}$.

El factor de potencia se calcula como la proporción entre estas dos cantidades:

$$\text{PF} = \frac{\text{potencia promedio}}{\text{potencia aparente}} = \frac{P}{V_{ef} I_{ef}}$$

Determinar si se requiere información adicional.
Se requiere I_{ef}:

$$\mathbf{I}_s = \frac{60\underline{/0^\circ}}{3 + j4} = 12\underline{/-53.13^\circ} \text{ A rms}$$

por lo que $I_{ef} = 12$ A rms, y $ang\ \mathbf{I}_s = -53.13°$.

Buscar la solución.
La potencia promedio (activa) entregada a la carga localizada en la parte superior está dada por

$$P_{\text{superior}} = I_{ef}^2 R_{\text{arriba}} = (12)^2(2) = 288 \text{ W}$$

y la potencia promedio entregada a la carga de la derecha está dada por

$$P_{\text{inferior}} = I_{ef}^2 R_{\text{derecha}} = (12)^2(1) = 144 \text{ W}$$

La fuente en sí misma entrega una potencia aparente de $V_{ef} I_{ef} = (60)(12) = 720$ VA.

Por último, el factor de potencia de las cargas combinadas se obtiene al considerar la tensión y la corriente asociadas con esas mismas cargas. Este factor de potencia es, desde luego, idéntico al de la fuente. Por ello,

$$\text{PF} = \frac{P}{V_{ef} I_{ef}} = \frac{432}{60(12)} = 0.6 \textit{ retrasado}$$

puesto que la carga combinada es *inductiva*.

Verificar la solución ¿Es razonable o la esperada?
La potencia promedio total entregada a la fuente es 288 + 144 = 432 W. La potencia promedio proporcionada por la fuente es

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(ang\ \mathbf{V} - ang\ \mathbf{I}) = (60)(12)\cos(0 + 53.13^\circ) = 432 \text{ W}$$

por lo que se puede observar que el balance es correcto.

Hubiera podido describirse también la impedancia de carga combinada como $5\underline{/53.1^\circ}\ \Omega$, identificar 53.1° como el ángulo del FP y de ese modo tener un FP de cos 53.1° = 0.6 *retrasado*.

PRÁCTICA

11.8 En el circuito de la figura 11.15, determinar el factor de potencia de las cargas combinadas, si $Z_L = 10\ \Omega$.

Respuesta: 0.9966 adelantado.

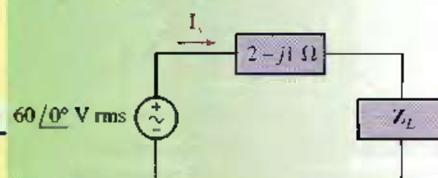


FIGURA 11.15

11.5 POTENCIA COMPLEJA

Se logra cierta simplificación en los cálculos de potencia si ésta se considera como una cantidad compleja. Se encontrará que la magnitud de la potencia compleja es la potencia aparente, y se demostrará que la parte real de la potencia compleja corresponde a la potencia promedio (real). La nueva cantidad, la parte imaginaria de la potencia compleja, se llamará ***potencia reactiva***.

La potencia compleja se define con referencia a una tensión senoidal general $\mathbf{V}_{ef} = V_{ef}\underline{/\theta}$ entre un par de terminales y una corriente senoidal general $\mathbf{I}_{ef} = I_{ef}\underline{/\phi}$ que fluye por una de las terminales, de modo que cumple la convención pasiva de signos. La potencia promedio P que absorbe la red a través sus dos terminales es, entonces,

$$P = V_{ef}I_{ef}\cos(\theta - \phi)$$

La nomenclatura compleja se introduce a continuación, utilizando la fórmula de Euler de la misma manera que se hizo al presentar los fasores. Se expresa P como

$$P = V_{ef}I_{ef}\,\text{Re}\{e^{j(\theta-\phi)}\}$$

o

$$P = \text{Re}\{V_{ef}\,e^{j\theta}\,I_{ef}\,e^{-j\phi}\}$$

La tensión fasorial se reconocería ahora como el primero de los dos factores dentro de las llaves de la ecuación anterior, aunque los segundos factores no corresponden en realidad a la corriente fasorial, pues el ángulo incluye un signo negativo, que no está presente en la expresión de la corriente fasorial. Esto es, la corriente fasorial se obtiene mediante

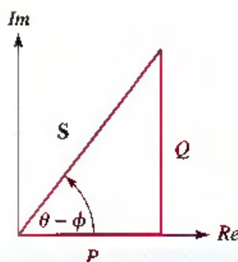
$$\mathbf{I}_{ef} = I_{ef}\,e^{j\phi}$$

y por lo tanto se debe utilizar la notación conjugada:

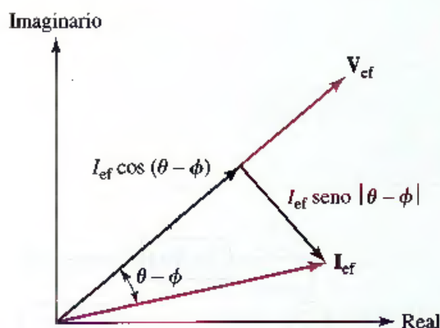
$$\mathbf{I}^*_{ef} = I_{ef}\,e^{-j\phi}$$

Por consiguiente, V_{ef}

$$P = \text{Re}\{\mathbf{V}_{ef}\mathbf{I}^*_{ef}\}$$



■ **FIGURA 11.16** Representación del triángulo de potencia de la potencia compleja.



■ **FIGURA 11.17** El fasor de corriente $\mathbf{I}_{ef}$ se descompone en dos partes, una componente en fase con el fasor de tensión $\mathbf{V}_{ef}$ y la otra 90º fuera de fase respecto del fasor de tensión. Esta última componente se denomina *componente en cuadratura.*

y ahora se podría dejar que la potencia se vuelva compleja al definir la **potencia compleja S** como

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{ef}\mathbf{I}^*_{ef} \qquad [25]$$

Si se inspecciona primero la forma polar o exponencial de la potencia compleja,

$$\mathbf{S} = V_{ef}I_{ef}\;e^{j(\theta-\phi)}$$

resulta evidente que la magnitud de **S**, $V_{ef}I_{ef}$, es la potencia aparente y el ángulo de **S**, $(\theta - \phi)$, es el ángulo FP (es decir, el ángulo mediante el cual la tensión adelanta a la corriente).

En forma rectangular, se tiene

$$\mathbf{S} = P + jQ \qquad [26]$$

donde P es la potencia promedio como antes. La parte imaginaria de la potencia compleja se simboliza como Q y se denomina *potencia reactiva.* Las dimensiones de Q son las mismas que las de la potencia real P, de la potencia compleja **S**, y de la potencia aparente |**S**|. Para evitar confusiones con estas otras cantidades, la unidad de Q se define como ***volt-ampere-reactivo*** (VAR). A partir de las ecuaciones [25] y [26] se observa que

$$Q = V_{ef}I_{ef}\,\text{sen}(\theta - \phi)2 \qquad [27]$$

TABLA 11.1 Resumen de las cantidades relacionadas con la potencia compleja

Cantidad	Símbolo	Fórmula	Unidades
Potencia promedio (activa)	P	$V_{ef}I_{ef}\cos(\theta - \phi)$	watt (W)
Potencia reactiva	Q	$V_{ef}I_{ef}\,\text{sen}(\theta - \phi)$	volt-ampere reactivo (VAR)
Potencia compleja	**S**	$P + jQ$	
		$V_{ef}I_{ef}\underline{/\theta - \phi}$	volt-ampere (VA)
		$\mathbf{V}_{ef}\mathbf{I}^*_{ef}$	
Potencia aparente	$\lvert\mathbf{S}\rvert$	$V_{ef}I_{ef}$	volt- ampere (VA)

La interpretación física de la potencia reactiva es la tasa del flujo de energía en el tiempo, hacia delante y hacia atrás entre la fuente (es decir, la compañía eléctrica) y las componentes reactivas de la carga (es decir, las inductancias y capacitancias). Estos componentes se cargan y se descargan de manera alternada, lo cual provoca un flujo de corriente desde y hacia la fuente, respectivamente.

La tabla 11.1 muestra un resumen de las cantidades relacionadas a la potencia compleja.

El signo de la potencia reactiva caracteriza la naturaleza de una carga pasiva a la cual se especifican $\mathbf{V}_{ef}$ y $\mathbf{I}_{ef}$ Si la carga es inductiva, entonces $(\theta - \phi)$ es un ángulo entre 0 y 90°, cuyo seno es positivo y la potencia reactiva es *positiva*. Una carga capacitiva produce una potencia reactiva *negativa*.

Triángulo de potencia

La representación gráfica que se emplea de manera muy común para la potencia compleja se conoce como ***triángulo de potencia***, el cual se ilustra en la figura 11.16. El diagrama indica que sólo se requieren dos de las tres cantidades de potencia, pues la tercera se obtiene mediante relaciones trigonométricas. Si el triángulo de potencia se encuentra en el primer cuadrante $(\theta - \phi > 0)$, el factor de potencia está *retrasado* (corresponde a una carga inductiva), y si el triángulo de potencia se ubica en el cuarto cuadrante $(\theta - \phi < 0)$, el factor de potencia está *adelantado* (lo que corresponde a una carga capacitiva). Por lo tanto, una gran cantidad de información cualitativa concerniente a la carga está disponible de un solo vistazo.

Se observaría otra interpretación de la potencia reactiva si se construye un diagrama de fasores que contenga $\mathbf{V}_{ef}$ y $\mathbf{I}_{ef}$ como se indica en la figura 11.17. Si la corriente fasorial se divide en dos componentes, una en fase con la tensión, con una magnitud $\mathbf{I}_{ef}\cos(\theta - \phi)$, y otra 90° fuera de fase con la tensión, y una magnitud igual a $\mathbf{I}_{ef}\,\text{sen}\,|\theta - \phi|$, entonces resulta claro que la potencia real está dada por el producto de la magnitud del fasor de tensión y de la componente de la corriente fasorial que está en fase con la tensión. Además, el producto de la magnitud del fasor de tensión y la componente de la corriente fasorial, que está 90° fuera de fase con la tensión, es la potencia reactiva Q. Suele hablarse de la componente de un fasor que está 90° fuera de fase respecto del otro fasor como la *componente en cuadratura*. Así, Q es simplemente $\mathbf{V}_{ef}$ veces la componente en cuadratura de $\mathbf{I}_{ef}$. Q se conoce también como *potencia en cuadratura*.

Medición de potencia

En términos estrictos, un wattímetro registra la potencia real promedio o sea activa consumida por una carga, y con un vármetro se obtendrá la potencia reactiva Q consumida por la carga. Sin embargo, es común que se puedan medir ambas cantidades con el mismo aparato, el cual también puede medir la potencia aparente y el factor de potencia (figura 11.18).



FIGURA 11.18 Medidor de potencia digital de sujeción fabricado por Amprobe, con el que se pueden medir corrientes de ca hasta de 400 A y tensiones de hasta 600 V.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Corrección del factor de potencia

Cuando una compañía eléctrica suministra potencia a grandes consumidores industriales, casi siempre incluye una cláusula de FP en sus tarifas. De acuerdo con esta cláusula, se hace un cargo adicional al consumidor siempre que el FP esté por debajo de cierto valor especificado, casi siempre alrededor de 0.85 retrasado. Se consume muy poca potencia industrial a FP adelantados, debido a la naturaleza de las cargas industriales características. Son varias las razones que obligan a la compañía eléctrica a realizar este cargo adicional para FP bajos. En primer lugar, es evidente que una capacidad superior de transmisión de corriente debe integrarse en sus generadores para proporcionar las corrientes más altas que van junto con la operación de FP inferiores a una potencia y a una tensión constantes. Otra razón se debe a las pérdidas crecientes en su sistema de transmisión y distribución.

Con el fin de recuperar las pérdidas y estimular a sus consumidores a utilizar un FP elevado, cierta compañía eléctrica cobra una penalización de 0.22 dólares/kVAR por cada kVAR que esté sobre un valor de referencia calculado como 0.62 veces la demanda de potencia promedio:

$$\mathbf{S} = P + jQ = P + j0.62P = P(1 + j0.62)$$
$$= P(1.177\underline{/31.8^\circ})$$

Esta referencia apunta a un FP de 0.85 retrasado, ya que $\cos 31.8^\circ = 0.85$ y Q es positiva, situación que se representa de manera gráfica en la figura 11.19. Los consumidores con un ángulo de FP mayor que éste se ven sujetos a penalizaciones financieras.

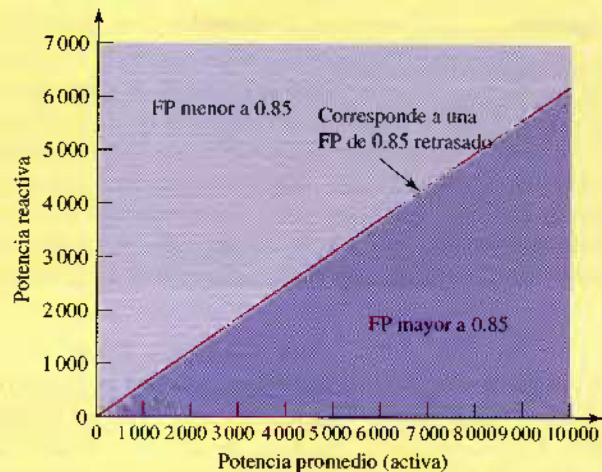


FIGURA 11.19 Gráfica que muestra una relación aceptable entre la potencia reactiva y la potencia promedio en el caso de una referencia de factor de potencia de 0.85 retrasado.

El requerimiento de potencia reactiva por lo común se ajusta mediante la instalación de capacitores de compensación situados en paralelo con la carga (casi siempre en el exterior de la subestación de la instalación del cliente). Se puede mostrar que el valor de capacitancia necesario es

$$C = \frac{P(\tan\theta_{\text{anterior}} - \tan\theta_{\text{nuevo}})}{\omega V_{\text{rms}}^2} \qquad [28]$$

donde ω es la frecuencia, θ_{anterior} es el ángulo del FP

Resulta fácil demostrar que la potencia compleja entregada a varias cargas interconectadas es igual a la suma de las potencias complejas entregada a cada una de las cargas individuales, sin importar cómo están interconectadas. Por ejemplo, considerar las dos cargas que se muestran conectadas en paralelo en la figura 11.21. Si se suponen valores rms, la potencia compleja que consume la carga combinada está dada por

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1^* + \mathbf{I}_2^*)$$

y así,

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}_1^* + \mathbf{V}\mathbf{I}_2^*$$

como se estableció.

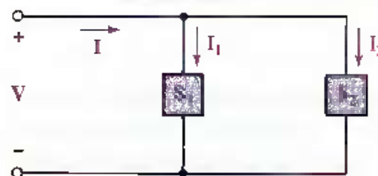
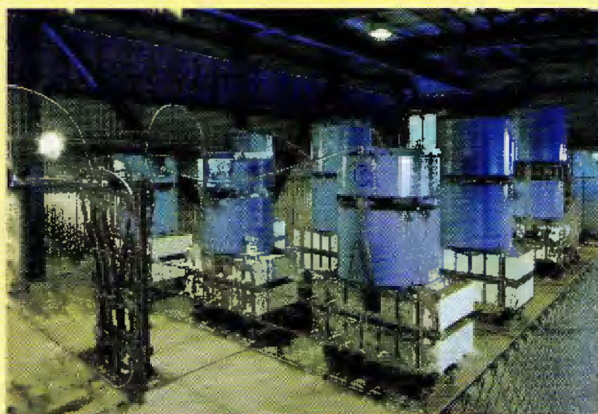


FIGURA 11.21 Circuito utilizado para mostrar que la potencia compleja consumida por dos cargas en paralelo es la suma de las potencias complejas consumidas por las cargas individuales.

presente y θ_{nuevo} es el ángulo del FP esperado. Sin embargo, por conveniencia, los bancos de capacitores de compensación se fabrican con incrementos específicos en unidades de capacidad de kVAR. Un ejemplo de una instalación de este tipo se presenta en la figura 11.20.

Considerar ahora un ejemplo específico. Una planta de maquinaria industrial particular tiene una demanda máxima de 5 000 kW y un requerimiento reactivo de 6 000 kVAR mensuales. Utilizando el plan de pagos anterior, en el caso de este cliente, ¿cuál es el costo anual asociado con las penalizaciones del FP? Si la compensación puede conseguirse a través de la empresa eléctrica a un costo de 2 390 dólares por incremento de 1 000 kVAR y a 3 130 dólares por incremento de 2 000 kVAR, ¿cuál es la solución con el costo más adecuado para el cliente?



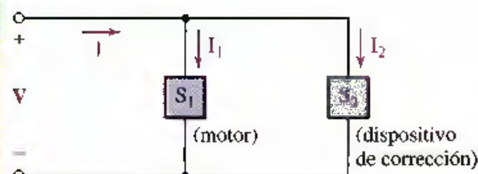
■ **FIGURA 11.20** Instalación de capacitores de compensación. (Cortesía de Nokian Capacitors Ltd.)

El FP de la instalación es el ángulo de la potencia compleja **S**, que en este caso corresponde a $5\,000 + j6\,000$ kVA. De tal modo, el ángulo es $\tan^{-1}(6000/5\,000) = 50.90°$ y el FP es 0.64 retrasado. El valor de la potencia reactiva de referencia, calculado como 0.62 veces la demanda máxima, es $0.62(5\,000) = 3\,100$ kVAR. Por lo tanto, la planta consume $6\,000 - 3\,100 = 2\,900$ kVAR más de potencia reactiva de lo que la compañía eléctrica está dispuesta a permitir sin penalización. Esto representa una estimación anual de $12(2\,900)(0.22) = \$7\,656$ dólares, además de los costos de la electricidad ordinaria.

Si el cliente opta por un solo incremento de 1 000 kVAR instalados (a un costo de 2 390 dólares), la potencia reactiva en exceso que se extrae se reduce a $2\,900 - 1\,000 = 1\,900$ KVAR, por lo que la penalización anual es en este caso igual a $12(1\,900)(0.22) = \$5\,016$. dólares. El costo total de este año es entonces de $\$5\,016 + \$2\,390 = \$7\,406$, dólares, que equivale a un ahorro de 250 dólares. Si el consumidor prefiere un incremento instalado de 2 000 kVAR (a un costo de 3 130 dólares) la potencia reactiva en exceso que se extrae se reduce a $2\,900 - 2\,000 = 900$ kVAR, por lo que la penalización anual es ahora de $12(900)(0.22) = \$2\,376$ dólares. En consecuencia, el costo total de este año es de $\$2\,376 + \$3\,130 = \$5\,506$, dólares, lo que genera un ahorro durante el primer año de 2 150 dólares. Sin embargo, si el cliente continúa e instala 3 000 kVAR de capacitores de compensación, de manera que no se estima penalización, le costará en realidad 14 dólares más en el primer año, que si sólo se instalan 2 000 kVAR.

EJEMPLO 11.9

Un consumidor industrial opera un motor de inducción de 50 kW (67.1 hp) a un FP retrasado de 0.8. La tensión de la fuente corresponde a 230 V rms. Para obtener tarifas eléctricas inferiores, el consumidor desea elevar el FP a 0.95 retrasado. Presentar una solución posible.



■ **FIGURA 11.22**

Aunque se podría elevar el FP mediante el incremento de la potencia real y manteniendo constante la potencia reactiva, esta maniobra no redundaría en una factura más baja y no es un remedio que interese al consumidor. Es necesario agregar al sistema una carga puramente reactiva, y resulta claro que debe hacerse en paralelo, pues la tensión del suministro del motor de inducción no debe cambiar. El circuito de la figura 11.22 se aplica si se interpreta a S_1 como la potencia compleja del motor de inducción y a S_2 como la potencia compleja extraída por el dispositivo de corrección del FP.

(Continúa en la siguiente página)

La potencia compleja que se suministra al motor de inducción debe tener una parte real de 50 kW y un ángulo de $\cos^{-1}(0.8)$, o 36.9°. Por consiguiente,

$$\mathbf{S}_1 = \frac{50\underline{/36.9^\circ}}{0.8} = 50 + j37.5 \text{ kVA}$$

Para alcanzar un FP de 0.95, la potencia compleja total debe convertirse en

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \frac{50}{0.95}\underline{/\cos^{-1}(0.95)} = 50 + j16.43 \text{ kVA}$$

Por lo tanto, la potencia compleja consumida por la carga correctiva se obtiene mediante

$$\mathbf{S}_2 = -j21.07 \text{ kVA}$$

La impedancia de carga necesaria $\mathbf{Z}_2$ se determinaría con varios pasos sencillos. Se elige el ángulo de fase de 0° para la fuente de tensión, y por lo tanto la corriente que atraviesa $\mathbf{Z}_2$ es

$$\mathbf{I}_2^* = \frac{\mathbf{S}_2}{\mathbf{V}} = \frac{-j21\,070}{230} = -j91.6 \text{ A}$$

o

$$\mathbf{I}_2 = j91.6 \text{ A}$$

En consecuencia,

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_2} = \frac{230}{j91.6} = -j2.51\ \Omega$$

Si la frecuencia de operación es de 60 Hz, a esta carga se le puede proveer de un capacitor de 1 056 μF conectado en paralelo con el motor. Sin embargo, su costo inicial, mantenimiento y depreciación deben solventarse mediante la reducción del recibo de pago de consumo eléctrico.

PRÁCTICA

11.9 En el circuito de la figura 11.23, determinar la potencia compleja que absorbe: (*a*) 1 Ω; (*b*) el capacitor de $-j10\ \Omega$; (*c*) la impedancia de $5 + j10\ \Omega$; (*d*) la fuente.

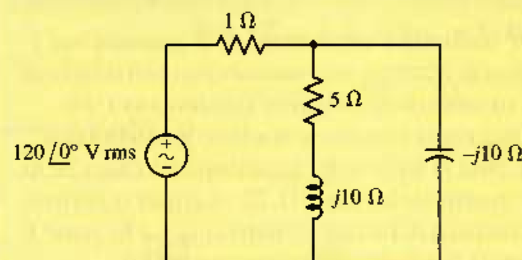


FIGURA 11.23

Respuesta: $26.6 + j0$ VA; $0 - j1\,331$ VA; $532 - j1\,065$VA; $-559 + j266$VA.

11.6 COMPARACIÓN DE LA TERMINOLOGÍA DE LA POTENCIA

En este capítulo se ha presentado una serie quizá desalentadora de terminologías de potencia, así que tal vez valga la pena hacer una pausa y considerar todos los términos en conjunto. En la tabla 11.2 se presenta un resumen, junto con una descripción de cada uno de ellos.

La importancia práctica de estos nuevos términos se demuestra al pensar en la siguiente situación. Suponga primero que se tiene un generador de ca senoidal, que es una máquina rotatoria impulsada por algún otro dispositivo cuya salida es un momento de torsión mecánico, como una turbina de vapor, un motor eléctrico o un motor de combustión interna. Se deja que el generador produzca una tensión de salida de 200 V rms a 60 Hz. Se supone que, además, el valor nominal del generador se especifica con una salida de potencia máxima de 1 kW. El generador sería entonces capaz de suministrar una corriente rms de 5 A a una carga resistiva. Sin embargo, si se conecta al generador una carga que requiere 1 kW a un factor de potencia retrasado de 0.5, entonces es necesaria una corriente rms de 10 A. Cuando disminuye el FP deben entregarse corrientes cada vez más grandes a la carga, si se va a mantener la operación a 200 V y 1 kW. Si nuestro generador se diseñara de manera correcta y económica para entregar en forma segura una máxima de 5 A, entonces estas corrientes mayores causarían una operación insatisfactoria, del mismo modo que ocurre con el aislamiento que se sobrecalienta y empieza a producir humo, lo cual sería dañino.

El valor nominal del generador se indica de manera más informativa en términos de la potencia aparente en volt-amperes. Así, un valor nominal de 1 000 VA a 200 V indica que el generador puede entregar una corriente máxima de 5 A a la tensión nominal; la potencia que entrega depende de la carga, pero en su caso extremo podría ser cero. Un valor nominal de potencia aparente resulta equivalente al valor nominal de corriente cuando la operación es a tensión constante.

TABLA 11.2 Resumen de los términos importantes

Término	Símbolo	Unidad	Descripción
Potencia instantánea	$p(t)$	W	$p(t) = v(t)i(t)$. Valor de la potencia en un instante específico. ¡No es el producto de los fasores de tensión y de corriente!
Potencia promedio (activa)	P	W	En el estado senoidal permanente, $P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi)$, donde θ es el ángulo de defasamiento de la tensión y ϕ es el ángulo de defasamiento de la corriente. Las reactancias no contribuyen a P.
Valor eficaz o rms	V_{rms} o I_{rms}	V o A	Definida, por ejemplo, como $I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$; si $i(t)$ es senoidal, entonces $I_{ef} = I_m/\sqrt{2}$.
Potencia aparente	$\lvert\mathbf{S}\rvert$	VA	$\lvert\mathbf{S}\rvert = V_{ef}I_{ef}$, y es el valor máximo posible de la potencia promedio; $P = \lvert\mathbf{S}\rvert$ sólo para cargas puramente resistivas.
Factor de potencia	FP	Ninguno	Razón de la potencia promedio (activa) y potencia aparente. El FP es unitario en el caso de una carga puramente resistiva, y cero en el de una puramente reactiva.
Potencia reactiva	Q	VAR	Medio para medir la tasa de flujo de energía hacia y desde cargas reactivas.
Potencia compleja	$\mathbf{S}$	VA	Una conveniente cantidad compleja que contiene tanto la potencia promedio P, como la potencia reactiva Q: $\mathbf{S} = P + jQ$.

PRÁCTICA

11.10 Una fuente de 400 V rms suministra potencia a una carga $Z_L = 10 + j2\ \Omega$ a través de una línea de transmisión que tiene una resistencia total de 1.5 Ω. Determinar: (*a*) la potencia promedio y aparente suministrada a la carga; (*b*) la potencia promedio y aparente que se pierde en la línea de transmisión; (*c*) la potencia promedio y aparente suministrada por la fuente; (*d*) el factor de potencia al que opera la fuente.

Respuestas: 14.21 kW, 14.49 kVA; 2.131 kW, 2.131 kVA; 16.34 kW, 16.59 kVA; 0.985 retrasado.

RESUMEN Y REPASO

- La potencia instantánea que absorbe un elemento está determinada por la expresión $p(t) = v(t)i(t)$.
- La potencia promedio entregada a una impedancia por una fuente senoidal es $\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi)$, donde $\theta =$ el ángulo de fase de la tensión y $\phi =$ el ángulo de fase de la corriente.
- Sólo la componente *resistiva* de una carga consume una potencia promedio (activa) distinta de cero. La potencia promedio entregada a la componente reactiva de una carga es cero.
- La transferencia de potencia promedio máxima ocurre cuando se satisface la condición $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$.
- El valor eficaz o rms de una forma senoidal se obtiene al dividir su amplitud entre $\sqrt{2}$.
- El factor de potencia (FP) de una carga es la razón de su potencia disipada promedio (activa) y su potencia aparente.
- Una carga puramente resistiva tendrá un factor de potencia unitario. Una carga puramente reactiva tendrá un factor de potencia cero.
- La potencia compleja se define como $\mathbf{S} = P + jQ$, o $|\mathbf{S}| = \mathbf{V}_{ef}\mathbf{I}_{ef}^*$ y se mide en unidades de volt-amperes (VA).
- La potencia reactiva Q es la componente imaginaria de la potencia compleja y constituye una medida de la tasa de flujo de energía hacia o desde las componentes reactivas de una carga; su unidad es el volt-ampere-reactivo (VAR).
- Los capacitores se emplean a menudo para mejorar el FP de cargas industriales, con el fin de minimizar la potencia reactiva que requiere la compañía de electricidad.

LECTURAS ADICIONALES

Se puede encontrar un panorama muy completo de los conceptos de la potencia de ca en el capítulo 2 de:

B.M. Weedy, *Electric Power Systems,* 33a. ed. Chichester, England: Wiley, 1984.

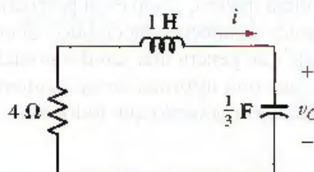
Temas contemporáneos relativos a los sistemas de potencia de ca se pueden encontrar en:

International Journal of Electrical Power & Energy Systems. Guildford, England: IPC Science and Technology Press, 1979-. ISSN: 0142-0615.

EJERCICIOS

11.1 Potencia instantánea

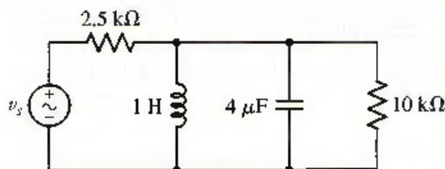
1. Una fuente de corriente, $i_s(t) = 2 \cos 500t$ A, una resistencia de 50 Ω y un capacitor de 25 μF están conectados en paralelo. Determinar la potencia que suministra la fuente a la resistencia y al capacitor, todo en $t = \pi/2$ ms.
2. La corriente $i = 2t^2 - 1$ A, $1 \leq t \leq 3$ s, fluye por cierto elemento de circuito. (*a*) Si el elemento es un inductor de 4 H, ¿qué energía se entrega en el intervalo indicado? (*b*) Si el elemento es un capacitor de 0.2 F con $v(1) = 2$ V, ¿qué potencia se le suministra en $t = 2$ s?
3. Si $v_C(0) = -2$ V e $i(0) = 4$ A en el circuito de la figura 11.24, determinar la potencia que absorbe el capacitor en t igual a: (*a*) 0^+; (*b*) 0.2 s; (*c*) 0.4 s.



■ **FIGURA 11.24**

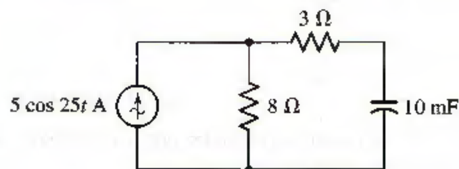


4. Calcular la potencia que absorbe cada elemento pasivo en el circuito de la figura 11.25 en $t = 0$ si $v_s = 20 \cos(1\,000t + 30°)$ V. Verificar su respuesta con PSpice.



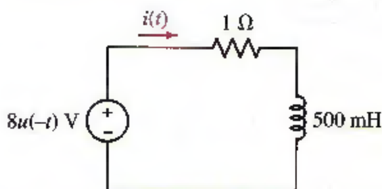
■ **FIGURA 11.25**

5. El circuito de la figura 11.26 ha alcanzado las condiciones de estado permanente. Determinar la potencia que absorbe cada uno de los cuatro elementos de circuito en $t = 0.1$ s.

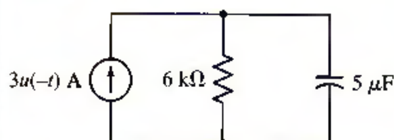


■ **FIGURA 11.26**

6. Considerar el circuito *RL* que se muestra en la figura 11.27. Determinar la potencia instantánea absorbida por la resistencia en $t =$ (*a*) 0^+; (*b*) 1 s; (*c*) 2 s.



■ **FIGURA 11.27**

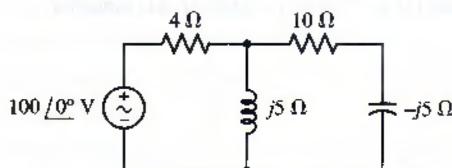


■ **FIGURA 11.28**

7. Considerar el circuito *RC* que se muestra en la figura 11.28. Determinar la potencia instantánea absorbida por la resistencia en $t = (a)\ 0^+$; (*b*) 30 ms; (*c*) 90 ms.
8. Si se hace que un típico rayo que cae desde una nube hasta la tierra represente una corriente de 30 kA en un intervalo de 150 μs, calcula (*a*) la potencia instantánea entregada a la varilla de cobre, la cual tiene una resistencia de 1.2 mΩ en el momento en el que cae el rayo; y (*b*) la energía total entregada a la varilla.
9. Un capacitor de 100 mF almacena una energía de 100 mJ hasta el punto en el que un conductor con una resistencia de 1.2 Ω se presenta en sus terminales. ¿Cuál es la potencia instantánea disipada en el conductor en $t = 120$ ms? Si la capacidad de calor específico[3] del conductor es 0.9 kJ/kg · K y su masa es 1 g; estimar el incremento de temperatura del conductor en el primer segundo a partir de que el capacitor se descarga suponiendo que ambos elementos se encuentran inicialmente a 23°C.
10. Un diodo semiconductor emisor de luz que opera a una tensión de 2.76 V jala una corriente de 130 mA. Despreciando toda capacitancia interna, ¿cuál es la potencia instantánea que consume el LED 2 segundos después de haberse encendido? Si en lugar de lo anterior, el LED se conecta a una fuente que genera una señal senoidal descrita por medio de $v(t) = 2.76 \cos(1000t)$ V, ¿qué otra información se requiere a fin de calcular la potencia instantánea en $t = 500$ ms, suponiendo que todos los transitorios han desaparecido para entonces?

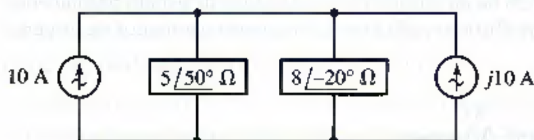
11.2 Potencia promedio (activa)

11. Calcular la potencia promedio (activa) que absorbe cada uno de los cinco elementos de circuito de la figura 11.29.



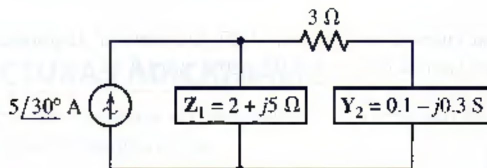
■ **FIGURA 11.29**

12. Calcular la potencia promedio generada por cada fuente y la potencia promedio entregada a cada impedancia en el circuito de la figura 11.30.



■ **FIGURA 11.30**

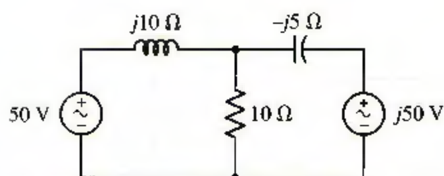
13. En el circuito de la figura 11.31 obtener la potencia promedio que: (*a*) se disipa en la resistencia de 3 Ω resistor; (*b*) genera la fuente.



■ **FIGURA 11.31**

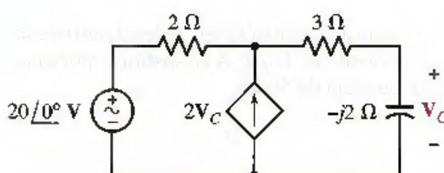
(3) Suponga que el calor específico c está dado por $c = Q/m \cdot \Delta T$, donde Q = la energía entregada al conductor, m es la masa, y ΔT es el incremento de temperatura.

14. Calcular la potencia promedio que absorbe cada uno de los cinco elementos del circuito de la figura 11.32.



■ **FIGURA 11.32**

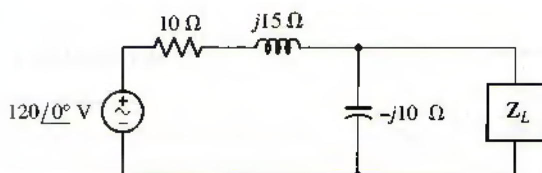
15. Determinar la potencia promedio que suministra la fuente de corriente dependiente del circuito de la figura 11.33.



■ **FIGURA 11.33**

16. Un circuito equivalente de Thévenin en el dominio de la frecuencia consiste en una fuente senoidal $\mathbf{V}_{th}$ en serie con una impedancia $\mathbf{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$. Especificar las condiciones en una carga $\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$ si ésta recibe una potencia promedio máxima sujeta a la restricción de que: (*a*) $X_{th} = 0$; (*b*) R_L y X_L pueden elegirse de manera independiente; (*c*) R_L es fija (no igual a R_{th}); (*d*) X_L es fija (independiente de X_{th}); (*e*) $X_L = 0$.

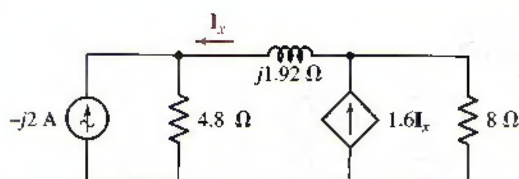
17. En el circuito de la figura 11.34; (*a*) ¿Qué valor de $\mathbf{Z}_L$ absorberá una potencia promedio máxima? (*b*) ¿Cuál es el valor de esta potencia máxima?



■ **FIGURA 11.34**

18. En el circuito de la figura 11.34 se requiere que la carga sea una resistencia pura R_L. ¿Qué valor de R_L absorberá una potencia promedio máxima y cuál es el valor de esa potencia?

19. Determinar la potencia promedio que suministra la fuente dependiente de la figura 11.35.



■ **FIGURA 11.35**

20. En la red de la figura 11.36; (*a*) ¿qué impedancia $\mathbf{Z}_L$ debe conectarse entre *a* y *b* de manera que la potencia promedio máxima sea absorbida por ella? (*b*) ¿Cuál es la potencia promedio máxima?

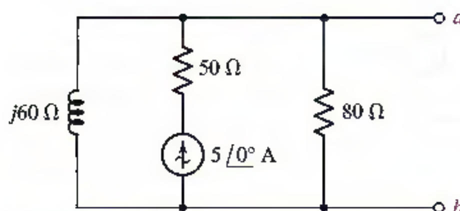


FIGURA 11.36

21. Determinar la potencia promedio entregada a cada una de las redes dentro de las cajas del circuito de la figura 11.37, si la fuente de $10/\underline{0°}$ A se sustituye por una fuente de $5/\underline{-30°}$ A que opera a una frecuencia de 50 Hz.

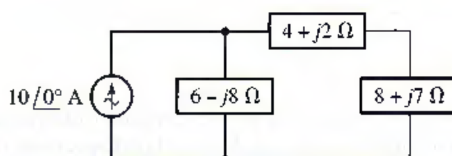


FIGURA 11.37

22. Determinar el valor de R_L en el circuito de la figura 11.38 que absorberá una potencia máxima y especificar el valor de dicha potencia.

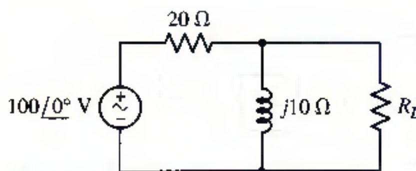


FIGURA 11.38


23. Proporcionar la potencia promedio que se entrega a cada resistencia en la red de la figura 11.39 si: (*a*) $\lambda = 0$; (*b*) $\lambda = 1$. (*c*) Verificar la respuesta con PSpice suponiendo que el circuito físico funciona a 60 Hz.

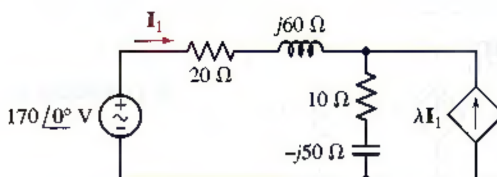
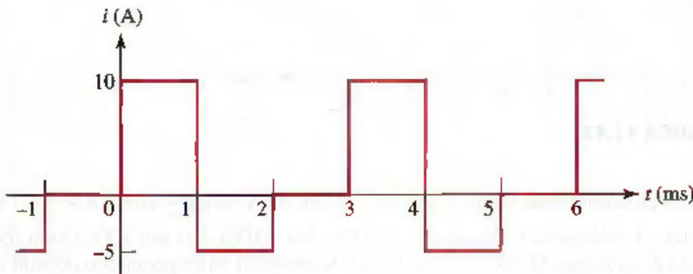
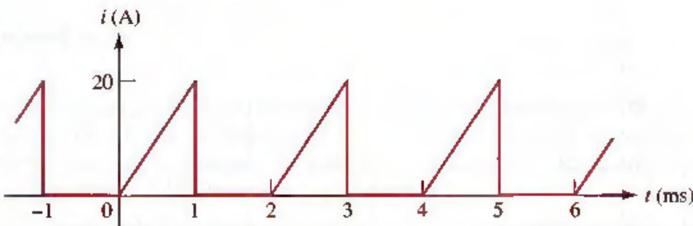


FIGURA 11.39

24. (*a*) Calcular el valor promedio de cada una de las formas de onda de la figura 11.40. (*b*) Si cada una está ahora elevada al cuadrado, determinar el valor promedio de todas las nuevas formas de onda periódicas (en A^2).



(*a*)



(*b*)



(*c*)

■ **FIGURA 11.40**

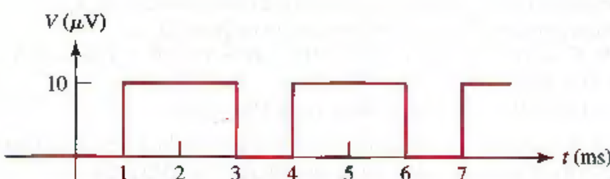
25. Determinar la potencia promedio que se entrega a cada elemento del circuito de la figura 11.25 si $v_S = 400\sqrt{2}\cos(120\pi t - 9°)$ V. Verificar la respuesta con PSpice.

11.3 Valores eficaces de corriente y de tensión

26. Calcular el valor efectivo de lo siguiente: (*a*) 12 cos(1 000*t*) V; (*b*) 12 sen(1 000*t*) V; (*c*) 12 cos(500*t*) V; (*d*) 12 cos(500*t* − 88°) V.

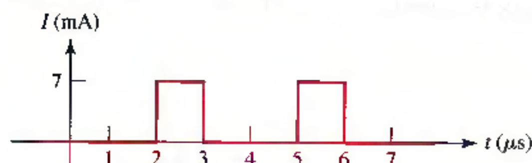
27. Calcular el valor eficaz de lo siguiente: (*a*) 2 cos(10*t*) A; (*b*) 2 sen(10*t*) A; (*c*) 2 cos(5*t*) A; (*d*) 2 cos(5*t* − 32°) A.

28. Determinar el valor eficaz de la forma de onda que se muestra en la figura 11.41.



■ **FIGURA 11.41**

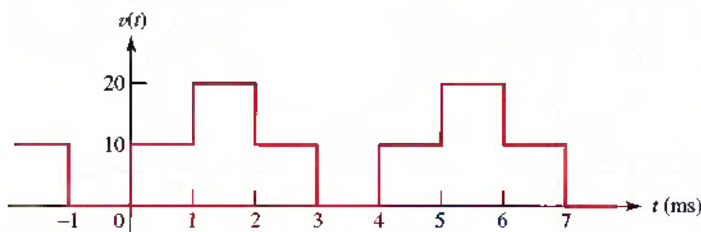
29. Determinar el valor eficaz de la forma de onda que se muestra en la figura 11.42.



■ **FIGURA 11.42**

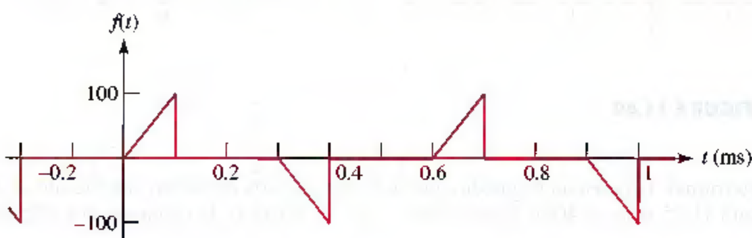
30. ¿Cuál es el valor eficaz de (*a*) 1 V; (*b*) $1 + \cos 10t$ V; (*c*) $1 + \cos(10t + 10°)$ V?

31. Calcular el valor eficaz de: (*a*) $v(t) = 10 + 9 \cos 100t + 6 \text{ sen } 100t$; (*b*) la forma de onda de la figura 11.43; (*c*) determinar también el valor promedio de esta forma de onda.



■ **FIGURA 11.43**

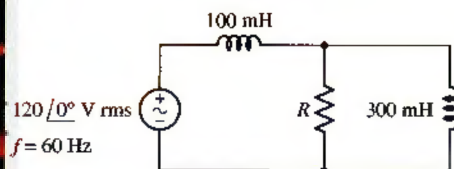
32. Obtener el valor eficaz de: (*a*) $g(t) = 2 + 3 \cos 100t + 4 \cos(100t - 120°)$; (*b*) $h(t) = 2 + 3 \cos 100t + 4 \cos(101t - 120°)$; (*c*) la forma de onda de la figura 11.44.



■ **FIGURA 11.44**

33. Dada la forma de onda periódica $f(t) = (2 - 3 \cos 100t)^2$, determinar: (*a*) su valor promedio; (*b*) su valor rms.

34. Calcular el valor eficaz de cada una de las tres formas de onda periódicas de la figura 11.40.



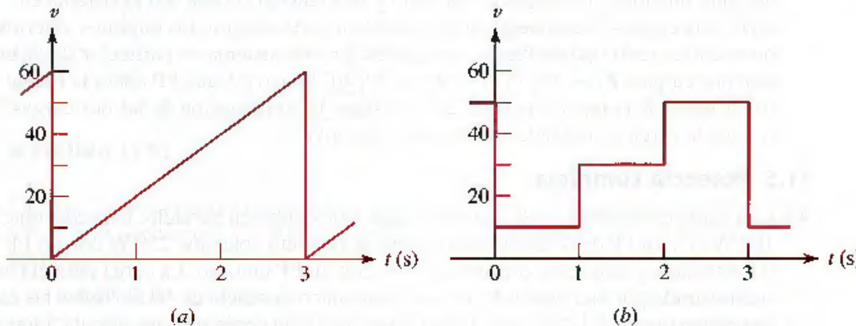
■ **FIGURA 11.45**

35. Cuatro fuentes de tensión independientes e ideales, $A \cos 10t$, $B \text{ sen}(10t + 45°)$, $C \cos 40t$, y la constante D, se conectan en serie con una resistencia de 4 Ω. Determinar la potencia promedio que se disipa en la resistencia si: (*a*) $A = B = 10$ V, $C = D = 0$; (*b*) $A = C = 10$ V, $B = D = 0$; (*c*) $A = 10$ V, $B = -10$ V, $C = D = 0$; (*d*) $A = B = C = 10$ V, $D = 0$; (*e*) $A = B = C = D = 10$ V.



36. (*a*) ¿Qué valores de R causarán que las tensiones rms en los inductores de la figura 11.45 sean iguales? (*b*) ¿Cuál es el valor de la tensión rms? (*c*) Verificar la respuesta con PSpice.

37. Cada una de las formas de onda de la figura 11.46 tiene un periodo de 3 s, además de ser un tanto similares. (*a*) Calcular el valor promedio de cada una. (*b*) Determinar los dos valores eficaces. (*c*) Verificar las respuestas de la forma de onda de diente de sierra mediante PSpice.



■ **FIGURA 11.46**

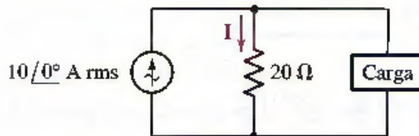
38. Sustituir el inductor de 10 mH en la figura 11.45 con un capacitor de 1 μF y el inductor de 300 mH por un capacitor de 3 μF. (*a*) ¿Qué valor de *R* causará que las corrientes rms que circulan por los capacitores sean iguales? (*b*) ¿Cuál es el valor de la corriente rms? (*c*) Verificar sus respuestas con PSpice.

39. Una forma de onda de tensión tiene un periodo de 5 s y se expresa como $v(t) = 10t[u(t) - u(t-2)] + 16e^{-0.5(t-3)}[u(t-3) - u(t-5)]$ V en el intervalo $0 < t < 5$ s. Calcular el valor eficaz de la forma de onda.

40. La combinación en serie de una resistencia de 1 kΩ y de un inductor de 2 H no debe disipar más de 250 mW de potencia en cualquier instante. Suponiendo una corriente senoidal con $\omega = 500$ rad/s, ¿cuál es la corriente rms más grande que puede tolerarse?

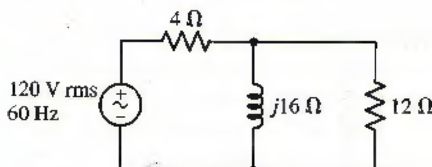
11.4 Potencia aparente y factor de potencia

41. En la figura 11.47, sea $\mathbf{I} = 4\underline{/35°}$ A rms, determinar la potencia promedio que: (*a*) suministra la fuente; (*b*) se suministra la resistencia de 20 Ω; (*c*) se suministra a la carga. Determinar la potencia aparente que: (*d*) suministra la fuente; (*e*) que se suministra a la resistencia de 20 Ω; (*f*) se suministra a la carga. (*g*) ¿Cuál es el FP de la carga?

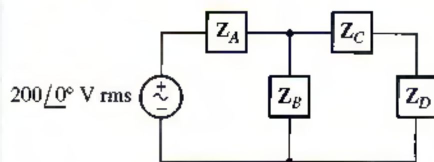


■ **FIGURA 11.47**

42. (*a*) Calcular el factor de potencia al cual opera la fuente en el circuito de la figura 11.48. (*b*) ¿Cuál es la potencia promedio que entrega la fuente? (*c*) ¿Qué tamaño de capacitor debe ponerse en paralelo con la fuente para conseguir que su factor de potencia sea la unidad? (*d*) Verificar las respuestas con PSpice.



■ **FIGURA 11.48**



■ **FIGURA 11.49**

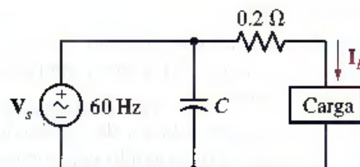
43. En el circuito de la figura 11.49, sea $\mathbf{Z}_A = 5 + j2\,\Omega$, $\mathbf{Z}_B = 20 - j10\,\Omega$, $\mathbf{Z}_C = 10\underline{/30°}\,\Omega$, y $\mathbf{Z}_D = 10\underline{/-60°}\,\Omega$. Encontrar la potencia aparente entregada a cada carga y la potencia aparente generada por la fuente.

44. Imaginar una red que opera a $f = 50$ Hz y que utiliza cargas conectadas en serie que transportan una corriente $10\underline{/0°}$ A rms. Un sistema de este tipo es el dual de uno que funciona con cargas en paralelo y una tensión común. En el sistema en serie, una carga se desconectaría al ponerla en cortocircuito; los circuitos abiertos provocarían todo tipo de fuegos artificiales. En este sistema en particular se encuentran dos cargas: $\mathbf{Z}_1 = 30\underline{/15°}\,\Omega$ y $\mathbf{Z}_2 = 40\underline{/40°}\,\Omega$. (*a*) ¿A qué FP opera la fuente? (*b*) ¿Cuál es la potencia aparente que consume la combinación de las dos cargas? (*c*) ¿Es la carga combinada inductiva o capacitiva?

11.5 Potencia compleja

45. Una carga compuesta consta de tres cargas conectadas en paralelo. Una consume 100 W con un FP de 0.92 retrasado mientras que otra consume 250 W con un FP de 0.8 retrasado y la tercera consume 150 W con un FP unitario. La carga paralela es suministrada por una fuente $\mathbf{V}_s$ en serie con una resistencia de 10 Ω. Todas las cargas deben operar a 115 V rms. Determinar: (*a*) la corriente rms que circula a través de la carga; (*b*) el FP de la carga compuesta.

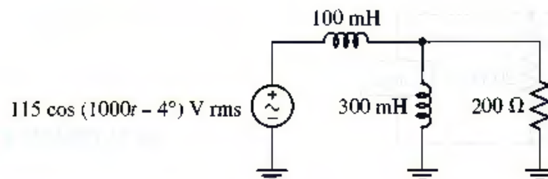
46. La carga de la figura 11.50 consume 10 kVA con un PF = 0.8 retrasado. Si $|\mathbf{I}_L| = 40$ A rms, ¿cuál debe ser el valor de C para que la fuente opere con un PF = 0.9 retrasado?



■ **FIGURA 11.50**

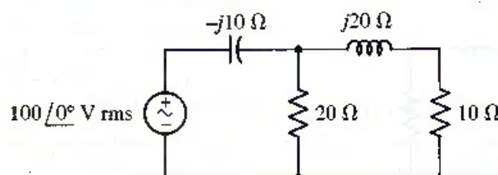


47. Considerar el circuito de la figura 11.51. Especificar el valor de la capacitancia que se requiere para elevar el FP de la carga total conectada a la fuente a 0.92 retrasada si se agrega la capacitancia: (*a*) en *serie* con el inductor de 100 mH; (*b*) en *paralelo* con el inductor de 10 mH. Verificar las respuestas de las partes (*a*) y (*b*) utilizando PSpice.



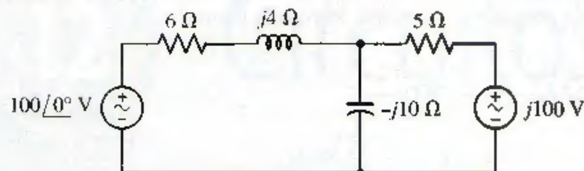
■ **FIGURA 11.51**

48. Analizar el circuito de la figura 11.52 para determinar la potencia compleja que absorbe cada uno de los cinco elementos del circuito.



■ **FIGURA 11.52**

49. Las dos fuentes de la figura 11.53 operan a la misma frecuencia. Determinar la frecuencia compleja que genera cada una y la potencia compleja absorbida por los elementos pasivos del circuito.



■ **FIGURA 11.53**

50. Obtener la potencia compleja entregada a una carga que consume: (*a*) 500 VA a un FP de 0.75 adelantado; (*b*) 500 W a un FP de 0.75 adelantado; (*c*) −500 VAR a un FP de 0.75.
51. Una impedancia capacitiva $\mathbf{Z}_C = -j120\,\Omega$, está en paralelo con una carga $\mathbf{Z}_L$. A la combinación en paralelo la alimenta una fuente $\mathbf{V}_s = 400\underline{/0^\circ}$ V rms, que genera una potencia compleja de $1.6 + j0.5$ kVA. Determinar: (*a*) la potencia compleja que se entrega a $\mathbf{Z}_L$; (*b*) el FP de $\mathbf{Z}_L$; (*c*) el FP de la fuente.
52. Una fuente de 230 V rms alimenta a tres cargas en paralelo: 1.2 kVA a un FP de 0.8 retrasado, 1.6 kVA a un FP de 0.9 retrasado y 900 W a un FP unitario. Calcular (*a*) la amplitud de la corriente de la fuente; (*b*) el FP al cual opera la fuente; (*c*) la potencia compleja que suministra la fuente.
53. Una fuente de 250 V rms alimenta a tres cargas en paralelo. Una de ellas consume 20 kW con un FP unitario, una segunda carga consume 25 kVA con un FP = 0.8 retrasado y la tercera carga consume una potencia de 30 kW con un FP de 0.75 retrasado. (*a*) Encontrar la potencia total suministrada por la fuente. (*b*) Determinar la potencia total aparente suministrada por la fuente. (*c*) ¿Con qué factor de potencia opera la fuente?
54. Una fábrica de galletas horneadas demanda mensualmente 200 kW en promedio y requiere de una potencia reactiva promedio mensual de 280 kVAR. En un esfuerzo por minimizar las pérdidas e invitar a sus clientes a operar a un FP elevado, una cierta compañía de electricidad local penaliza con 0.22 dólares/kVAR por cada KVAR por arriba de un valor de referencia calculado como 0.65 veces la demanda de potencia pico promedio. (*a*) Con base en el valor anterior, ¿cuál es el costo anual para esta compañía asociado con las penalizaciones por el concepto de FP? (*b*) Calcular el FP óptimo en el que se basa la política de la compañía. (*c*) Si existe una compensación a través de la compañía de electricidad a un costo de 200 dólares por incremento de 100 kVAR y de 395 dólares por incremento de 200 kVAR, ¿cuál es la solución más atractiva para el cliente?
55. Deducir la ecuación [28].

11.6 Comparación de la terminología de la potencia

56. Una fuente de tensión de $339\cos(100\pi t - 66^\circ)$ V se conecta a una carga puramente resistiva de 1 kΩ. (*a*) ¿Cuál es la tensión eficaz de la fuente? (*b*) ¿Cuál es la potencia instantánea pico absorbida por la carga? (*c*) ¿Cuál es la potencia instantánea mínima absorbida por la carga? (*d*) Calcular la potencia aparente que entrega la fuente. (*e*) Calcular la potencia reactiva entregada por la fuente. (*f*) ¿Cuál es la potencia compleja que se entrega a la carga?
57. Una fuente de tensión de $339\cos(100\pi t - 66^\circ)$ V se conecta a una carga puramente inductiva de 150 mH. (*a*) ¿Cuál es la corriente eficaz que circula por el circuito? (*b*) ¿Cuál es la potencia instantánea máxima que absorbe la carga? (*c*) ¿Cuál es la potencia instantánea mínima que absorbe la carga? (*d*) Calcular la potencia aparente que entrega la fuente. (*e*) Determinar la potencia reactiva que entrega la fuente. (*f*) ¿Cuál es la potencia compleja que se entrega a la carga?
58. En el circuito de la figura 11.25, $v_S = 5\cos 1000t$ V. (*a*) ¿Cuál es la potencia instantánea máxima que se entrega la resistencia de 10 kΩ? (*b*) Calcular la potencia reactiva dada a la resistencia de 10 k. (*c*) Obtener la potencia aparente que se proporciona a la resistencia de 10 kΩ. (*d*) ¿Cuál es la potencia compleja que entrega la fuente?

59. (*a*) Determinar la potencia compleja que se suministra a cada elemento pasivo del circuito de la figura 11.54 y (*b*) demostrar que la *suma* de estos valores es igual a la potencia compleja que genera la fuente. (*c*) ¿El resultado es cierto en el caso de los valores de potencia aparente? (*d*) ¿Cuál es la potencia promedio que entrega la fuente? (*e*) ¿Cuál es la potencia reactiva que entrega la fuente?

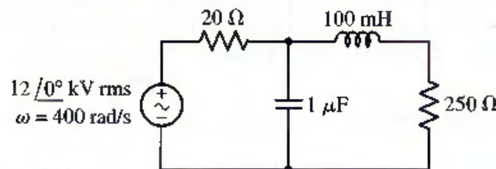


FIGURA 11.54

60. Una carga que opera a 2 300 V rms consume 28 V rms con un factor de potencia de 0.812 retrasado. Obtener: (*a*) la corriente máxima en amperes; (*b*) la potencia instantánea en $t = 2.5$ ms suponiendo una frecuencia de operación de 60 Hz; (*c*) la potencia real que toma la carga; (*d*) la potencia compleja; (*e*) la potencia aparente; (*f*) la impedancia de la carga y (*g*) la potencia reactiva.

CAPÍTULO

12

Circuitos polifásicos

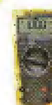
CONCEPTOS CLAVE

- Sistemas monofásicos de potencia.
- Sistemas trifásicos de potencia.
- Fuentes trifásicas.
- Tensión de línea *versus* tensión de fase.
- Corriente de línea *versus* corriente de fase.
- Redes conectadas en Y.
- Redes conectadas en Δ.
- Cargas balanceadas.
- Análisis por fase.
- Medición de la potencia en sistemas trifásicos.

INTRODUCCIÓN

Las compañías eléctricas suministran electricidad a los clientes residenciales e industriales en forma de tensiones y de corrientes senoidales, conocidas por lo común como corriente alterna (ca). La mayor parte de la electricidad residencial en Estados Unidos se suministra como una forma de onda senoidal con una frecuencia de 60 Hz y una tensión rms de aproximadamente 120 V. En otras partes del mundo, la electricidad se provee a una frecuencia de 50 Hz y con una tensión rms cercana a 240 V. Tomás Alba Edison fue el que propuso por primera vez que las compañías de electricidad debían distribuir potencia a través de redes de cd, aunque Nikola Tesla y George Westinghouse, otros dos pioneros en el campo de la electricidad, fueron decididos partidarios del uso de la ca. A la larga, sus argumentos resultaron más convincentes.

La respuesta transitoria de los sistemas de potencia de ca resulta interesante cuando se determina la demanda de potencia máxima, pues la mayoría de los equipos requieren más corriente para arrancar que para operar de manera continua. Sin embargo, en muchos casos la operación en estado permanente reviste un interés fundamental, por lo que la experiencia con el análisis basado en fasores demostrará su utilidad. Se presentará un nuevo tipo de fuente de tensión, la fuente trifásica que se conecta en una configuración Y de tres o cuatro hilos, o en una configuración Δ de tres hilos. De modo similar, se podrá observar que las cargas se conectan en Y o en Δ según la aplicación.



12.1 SISTEMAS POLIFÁSICOS

Hasta ahora, siempre que se ha usado el término "fuente senoidal" el lector se imagina una sola tensión o corriente senoidal con una amplitud, frecuencia y fase específicas. En este capítulo se presenta el concepto de fuentes ***"polifásicas"***, enfocándose en particular en los sistemas trifásicos. Existen distintas ventajas al usar maquinaria rotatoria para generar potencia trifásica, en vez de potencia monofásica; asimismo, la transmisión de potencia de un sistema trifásico genera ventajas económicas. Aunque la mayor parte del equipo eléctrico que se ha visto hasta ahora es monofásico, el trifásico no es poco común, sobre todo en el entorno de la manufactura. En particular, los motores que se utilizan en los grandes sistemas de refrigeración y en las instalaciones de maquinado se alambran a menudo para potencia trifásica. En lo que se refiere a las demás aplicaciones, una vez que el lector se familiarice con los fundamentos de los sistemas polifásicos, podrá ver que resulta simple obtener potencia monofásica con conectar una sola "pata" ("pierna") del sistema polifásico.

Se considerará brevemente el sistema polifásico más común, un sistema trifásico balanceado. La fuente tiene tres terminales (sin contar con una conexión ***neutra*** o de ***tierra***), y las mediciones del voltímetro mostrarán la presencia de tensiones senoidales de igual amplitud entre dos terminales cualesquiera. Sin embargo, estas tensiones no están en fase; cada una de ellas está 120° fuera de fase (o desfasada de 120° una con respecto a la otra), en relación con las otras dos, y el signo del ángulo de fase depende del sentido de giro de las tensiones. En la figura 12.1 se presenta un conjunto posible de tensiones. Una ***carga balanceada (o equilibrada)*** obtiene su potencia de las tres fases, pero cuando una de las tensiones es instantáneamente cero, la relación de fase requiere que las otras dos deban corresponder a la mitad de la amplitud. *En ningún instante la potencia instantánea que demanda la carga instantánea llega a ser cero; en realidad, la potencia instantánea total es constante.* Lo anterior significa una ventaja en la maquinaria rotatoria, pues mantiene el momento de torsión sobre el rotor de una forma mucho más constante que en caso de que se utilizase una fuente monofásica. Como resultado, hay menos vibración.

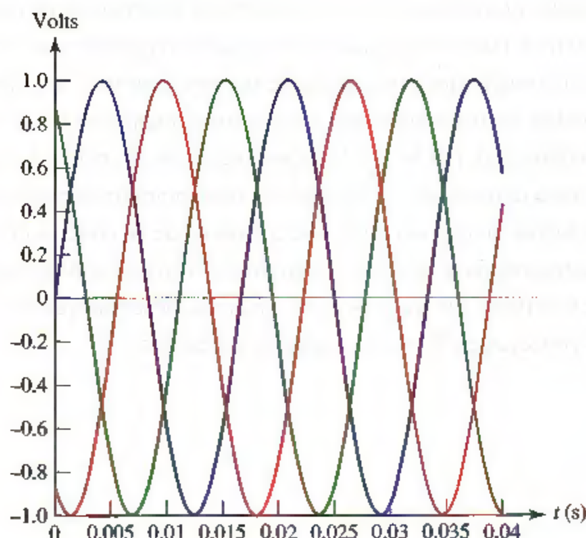
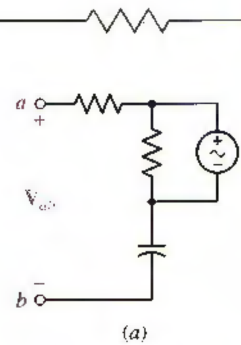


FIGURA 12.1 Ejemplo de un conjunto de tres tensiones, cada una de las cuales está 120° fuera de fase respecto de las otras dos. Como puede verse, sólo una de las tensiones será cero en un instante particular.

El uso de un número de fases superiores, como los sistemas de seis y 12 fases, se limita casi por entero al suministro de potencia a grandes ***rectificadores***, los cuales convierten la corriente alterna en directa con sólo permitir que la corriente fluya hacia la carga en una dirección, de modo que el signo de la tensión en los extremos de la carga permanece igual. La salida del rectificador es una corriente directa más una componente pulsante más pequeña, o rizo, que disminuye cuando aumenta el número de fases.

Casi sin excepción, los sistemas polifásicos contienen en la práctica fuentes que pueden aproximarse muy bien a fuentes de tensión ideales, o a fuentes de tensión ideales en serie con pequeñas impedancias internas. En tanto, las fuentes de corriente trifásicas raramente son utilizadas.



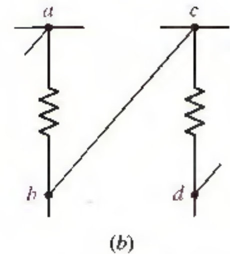


FIGURA 12.2 (*a*) Definición de tensión $\mathbf{V}_{ab}$. (*b*) $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{cd} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{cd}$.

Notación de doble subíndice

Resulta conveniente describir las tensiones y las corrientes polifásicas mediante la ***notación de doble subíndice***, con la cual una tensión o una corriente respectivamente $\mathbf{V}_{ab}$ o $\mathbf{I}_{aA}$, tiene más significado que si se indicara como $\mathbf{V}_3$ o $\mathbf{I}_x$. Por definición, la tensión del punto a con respecto al punto b es $\mathbf{V}_{ab}$. De esta forma, el signo positivo se localiza en a, como se indica en la figura 12.2*a*. Por lo tanto, se considera el doble subíndice como *equivalente* al par de signos positivo-negativo; el uso de ambos sería redundante. Si se observa la figura 12.2*b*, se verá que $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{cd}$. La ventaja de la notación de doble subíndice radica en el hecho de que la ley de Kirchhoff de tensión requiere que la tensión entre dos puntos sea la misma, sin que importe la trayectoria que se sigue entre los puntos; de tal manera, $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bd} = \mathbf{V}_{ac} + \mathbf{V}_{cd} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{cd}$, etc. El beneficio de esta notación es que la LKT se cumple sin necesidad de consultar diagrama de circuito; las ecuaciones correctas se escriben aun cuando se incluya un punto o subíndice, que no se marca sobre el diagrama. Por ejemplo, habría sido posible escribir $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ax} + \mathbf{V}_{xd}$, donde x identifica la localización de cualquier punto que se seleccione.

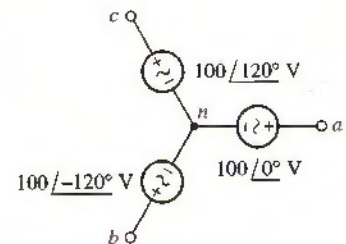


FIGURA 12.3 Red utilizada como ejemplo numérico de una notación de tensión de doble subíndice.

Una representación posible de los sistemas de tensión trifásicos[1] se muestra en la figura 12.3. Suponer que se conocen las tensiones $\mathbf{V}_{an}$, $\mathbf{V}_{bn}$, y $\mathbf{V}_{cn}$:

$$\mathbf{V}_{an} = 100\underline{/0^\circ}\text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = 100\underline{/-120^\circ}\text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = 100\underline{/-240^\circ}\text{ V}$$

por ello se puede calcular la tensión $\mathbf{V}_{ab}$ con tomar en cuenta los subíndices:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} \\ &= 100\underline{/0^\circ} - 100\underline{/-120^\circ}\text{ V} \\ &= 100 - (-50 - j86.6)\text{ V} \\ &= 173.2\underline{/30^\circ}\text{ V}\end{aligned}$$

Las tres tensiones indicadas y la construcción del fasor $\mathbf{V}_{ab}$ se ilustran en el diagrama de fasores de la figura 12.4.

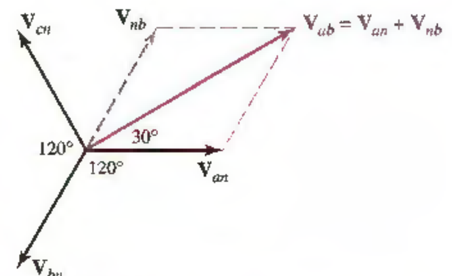


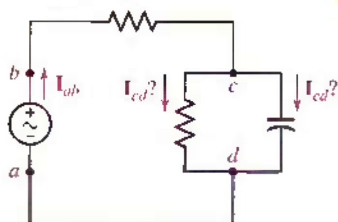
FIGURA 12.4 Este diagrama fasorial ilustra el uso gráfico de la convención de tensión de doble subíndice para obtener $\mathbf{V}_{ab}$ relativa a la red de la figura 12.3.

También se aplicaría la notación de doble subíndice a las corrientes. Se define la corriente $\mathbf{I}_{ab}$ como la corriente que circula de a a b por *la trayectoria más directa*.

(1) Al mantener la convención de la potencia eléctrica industrial, los valores rms de las corrientes y las tensiones se usarán de *manera implícita* a lo largo de este capítulo.



En todo circuito completo que se considere, debe haber desde luego al menos dos trayectorias posibles entre los puntos a y b, así que se conviene que no se recurrirá a la notación de doble subíndice, a menos que sea obvio que una trayectoria es mucho más corta o mucho más directa. Casi siempre esta trayectoria pasa por un solo elemento. De tal modo, la corriente $\mathbf{I}_{ab}$ se indica en forma correcta en la figura 12. 5. De hecho, incluso no es necesaria la flecha de dirección cuando se habla de esta corriente: los subíndices *la indican*. Sin embargo, la identificación de una corriente como $\mathbf{I}_{cd}$ del circuito de la figura 12.5 podría provocar confusiones.

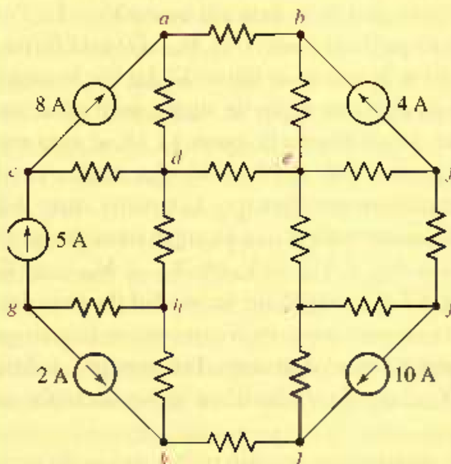


■ **FIGURA 12.5** Ilustración del uso y abuso de la convención de doble subíndice para la notación de corriente.

PRÁCTICA

12.1 Sea $\mathbf{V}_{ab} = 100\underline{/0°}$ V, $\mathbf{V}_{bd} = 40\underline{/80°}$ V, y $\mathbf{V}_{ca} = 70\underline{/200°}$ V. Determinar: (*a*) $\mathbf{V}_{ad}$; (*b*) $\mathbf{V}_{bc}$; (*c*) $\mathbf{V}_{cd}$.

12.2 Sea el circuito de la figura 12.6 donde $\mathbf{I}_{fj} = 3$ A, $\mathbf{I}_{de} = 2$ A, e $\mathbf{I}_{hd} = -6$ A. Determinar: (*a*) $\mathbf{I}_{cd}$; (*b*) $\mathbf{I}_{ef}$; (*c*) $\mathbf{I}_{ij}$.

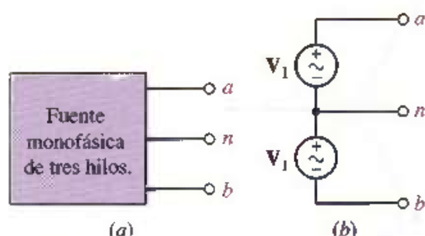


■ **FIGURA 12.6**

Respuestas: 12.1: $114.0\underline{/20.2°}$ V; $41.8\underline{/145.0°}$ V; $44.0\underline{/20.6°}$ V. 12.2: −3 A; 7 A; 7 A.

12.2 SISTEMAS MONOFÁSICOS DE TRES HILOS

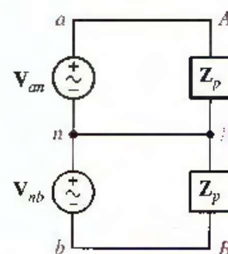
Una *fuente monofásica de tres hilos* se define como la que tiene tres terminales de salida como a, n, y b de la figura 12.7*a*, en las que las tensiones de fasor $\mathbf{V}_{an}$ y $\mathbf{V}_{nb}$ son iguales. Por lo tanto, se podría representar la fuente mediante la combinación de dos fuentes de tensión idénticas; en la figura 12.7*b*, $\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_1$. Es patente que $\mathbf{V}_{ab} = 2\mathbf{V}_{an} = 2\mathbf{V}_{nb}$, y en consecuencia se tiene una fuente a la cual se conectarían las cargas que operan con cualquiera de las dos tensiones. El sistema doméstico normal es monofásico de tres hilos, lo que permite la operación de aparatos tanto de 110 V como de 220 V. Por lo general, los aparatos de tensión superior son aquellos que demandan cantidades superiores de potencia; la operación a mayor tensión origina una demanda de corriente más pequeña para la misma potencia. En consecuencia, puede emplearse con seguridad un alambre de diámetro menor en el aparato, en el sistema de distribución doméstico y en el sistema de distribución de la compañía de electricidad, ya que resulta



■ **FIGURA 12.7** (*a*) Fuente monofásica de tres hilos. (*b*) TRepresentación de una fuente monofásica de tres hilos mediante dos fuentes de tensión idénticas.

necesario emplear alambre de diámetro mayor con corrientes más altas para reducir el calor que se produce debido a la resistencia del alambre.

El nombre ***monofásico*** se origina porque las tensiones $\mathbf{V}_{an}$ y $\mathbf{V}_{nb}$, al ser iguales, deben tener el mismo ángulo de fase. Sin embargo, desde otro punto de vista, las tensiones entre los hilos exteriores y el alambre central, que suele denominarse *neutro,* está exactamente a 180° fuera de fase. Es decir, $\mathbf{V}_{an} = -\mathbf{V}_{bn}$, y $\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} = 0$. Más adelante se verá que los sistemas polifásicos balanceados se caracterizan por un sistema de tensiones de igual *amplitud* cuya suma (fasorial o vectorial) es cero. En realidad, desde esta perspectiva, el sistema monofásico de tres hilos es un sistema bifásico balanceado. No obstante, *bifásico* es un término que por lo común se reserva para designar un sistema desbalanceado relativamente intrascendente que utiliza dos fuentes de tensión 90° fuera de fase entre sí.



■ **FIGURA 12.8** Sistema monofásico de tres hilos. Las dos cargas son idénticas y la corriente del neutro es cero.



Considerar ahora un sistema monofásico de tres hilos que contiene cargas idénticas $\mathbf{Z}_p$ entre cada alambre exterior y el neutro (figura 12.8). Primero se supondrá que los hilos que conectan a la fuente con la carga son conductores perfectos. Puesto que

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb}$$

entonces,

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p} = \mathbf{I}_{Bb} = \frac{\mathbf{V}_{nb}}{\mathbf{Z}_p}$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_{Bb} + \mathbf{I}_{Aa} = \mathbf{I}_{Bb} - \mathbf{I}_{aA} = 0$$

En consecuencia, no hay corriente en el hilo neutro, por lo que éste podría eliminarse sin alterar ninguna corriente o tensión del sistema, resultado que se consigue mediante la igualdad de las dos cargas y de las dos fuentes.

Efecto de una impedancia de alambre finita

Pensar a continuación en el efecto de una impedancia finita en cada uno de los hilos. Si las líneas aA y bB tienen cada una la misma impedancia, ésta puede sumarse a $\mathbf{Z}_p$, lo que origina también en este caso dos cargas iguales y una corriente neutra cero. Permitir ahora que el hilo neutro posea una impedancia $\mathbf{Z}_n$. Sin efectuar ningún análisis detallado, la superposición debe mostrar que la simetría del circuito seguirá dando lugar a una corriente del neutro igual a cero. Además, la adición de cualquier impedancia conectada de manera directa desde una de las líneas exteriores a la otra línea exterior producirá también un circuito simétrico y una corriente de neutro igual a cero. Por lo tanto, la corriente de neutro igual a cero es consecuencia de una carga balanceada, o simétrica; la impedancia distinta de cero en el hilo neutro no cambió el estado de la simetría.

El sistema más general monofásico de tres hilos contendrá cargas desiguales entre cada línea exterior y el neutro, así como otra carga de manera directa entre las dos líneas exteriores; se debería esperar que las impedancias de las dos líneas exteriores fueran casi iguales, aunque la impedancia del neutro es a menudo un poco mayor. Pensar en un ejemplo de un sistema de este tipo, con interés particular en la corriente que fluiría ahora en la corriente del hilo neutro, así como en la eficiencia total con la que el sistema transmite potencia a una carga desbalanceada (desequilibrada).

EJEMPLO 12.1

Analizar el sistema de la figura 12.9 y determinar la potencia que se entrega a cada una de las tres cargas, así como la potencia perdida en el hilo neutro y en cada una de las dos líneas.

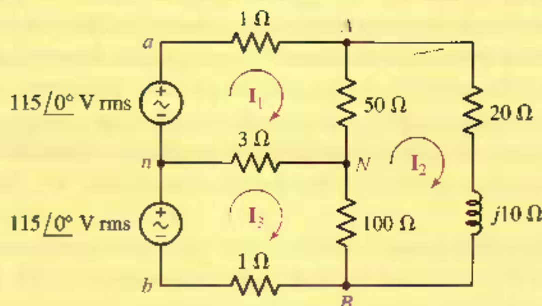


FIGURA 12.9 Sistema monofásico de tres hilos característico.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

Las tres cargas en el circuito son: la resistencia de 50 Ω, la otra de 100 Ω y una impedancia de $20 + j10$ Ω. Cada una de las dos líneas presenta una resistencia de 1 Ω, y la resistencia del hilo neutro corresponde a 3 Ω. Es necesaria la corriente que circula por cada una de éstas a fin de determinar la potencia.

▶ ***Recopilar la información conocida.***

Se tiene un sistema monofásico de tres hilos; el diagrama de circuito de la figura 12.9 está por completo marcado. Las corrientes calculadas estarán en unidades rms.

▶ ***Elaborar un plan.***

El circuito conduce al análisis de malla, pues tiene tres mallas definidas de manera clara. El resultado del análisis será un conjunto de corrientes de malla, que en este caso se utiliza para calcular la potencia absorbida.

▶ ***Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.***

Las tres ecuaciones de malla son:

$$-115\underline{/0^\circ} + \mathbf{I}_1 + 50(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 3(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) = 0$$
$$(20 + j10)\mathbf{I}_2 + 100(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + 50(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$
$$-115\underline{/0^\circ} + 3(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1) + 100(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + \mathbf{I}_3 = 0$$

que puede reordenarse para obtener las tres siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 54\mathbf{I}_1 \quad & -50\mathbf{I}_2 & -3\mathbf{I}_3 &= 115\underline{/0^\circ} \\ -50\mathbf{I}_1 \quad & +(170 + j10)\mathbf{I}_2 & -100\mathbf{I}_3 &= 0 \\ -3\mathbf{I}_1 \quad & -100\mathbf{I}_2 & +104\mathbf{I}_3 &= 115\underline{/0^\circ} \end{aligned}$$

▶ ***Determinar, si se requiere, información adicional.***

Se tiene un conjunto de tres ecuaciones con tres incógnitas, por lo que se puede tratar de resolver el problema en este punto.

Buscar la solución.
Resolviendo para las corrientes fasoriales $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, e $\mathbf{I}_3$ mediante una calculadora científica, se obtiene

$$\mathbf{I}_1 = 11.24\underline{/-19.83^\circ} \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_2 = 9.389\underline{/-24.47^\circ} \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_3 = 10.37\underline{/-21.80^\circ} \text{ A}$$

Por lo tanto, las corrientes en las líneas exteriores son

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_1 = 11.24\underline{/-19.83^\circ} \text{ A}$$

y

$$\mathbf{I}_{bB} = -\mathbf{I}_3 = 10.37\underline{/158.20^\circ} \text{ A}$$

y la corriente del neutro más pequeña es

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1 = 0.9459\underline{/-177.7^\circ} \text{ A}$$

En consecuencia, se determinaría la potencia promedio (activa) demandada por cada carga:

$$P_{50} = |\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2|^2\,(50) = 206 \text{ W}$$
$$P_{100} = |\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2|^2\,(100) = 117 \text{ W}$$
$$P_{20+j10} = |\mathbf{I}_2|^2\,(20) = 1\,763 \text{ W}$$

Observar que no es necesario incluir un factor de $\frac{1}{2}$ puesto que se está trabajando con valores rms de corriente.

La potencia activa de la carga total es igual a 2 086 W. A continuación se calcula la pérdida en cada uno de los hilos:

$$P_{aA} = |\mathbf{I}_1|^2\,(1) = 126 \text{ W}$$
$$P_{bB} = |\mathbf{I}_3|^2\,(1) = 108 \text{ W}$$
$$P_{nN} = |\mathbf{I}_{nN}|^2\,(3) = 3 \text{ W}$$

lo que da una pérdida de línea total de 237 W. Los hilos son, de manera evidente, bastante largos; en otro caso, la pérdida de potencia más o menos elevada en las dos líneas exteriores provocaría un peligroso aumento de temperatura.

¡Imaginar el calor que producen los dos focos eléctricos de 100 W! Estos alambres exteriores deben disipar una cantidad comparable de calor. Para mantener baja su temperatura, se requiere de una gran área.

Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?
La potencia activa (promedio) total absorbida corresponde a 206 + 117 + 1 763 + 237, o 2 323 W, valor que puede confirmarse si se determina la potencia activa (promedio) que entrega cada fuente de tensión:

$$P_{an} = 115(11.24)\cos 19.83^\circ = 1\,216 \text{ W}$$
$$P_{bn} = 115(10.37)\cos 21.80^\circ = 1\,107 \text{ W}$$

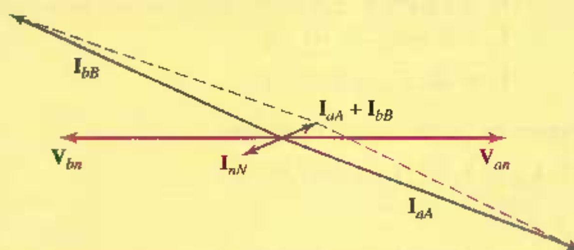
o un total de 2 323 W. La ***eficiencia de transmisión*** del sistema es:

$$\eta = \frac{\text{total de potencia entregada a la carga}}{\text{total de potencia generada}} = \frac{2\,086}{2\,086 + 237} = 89.8\%$$

El valor no sería creíble en el caso de una máquina de vapor o un motor de combustión interna, aunque es demasiado bajo en el de un sistema de distribución bien diseñado. Se deben utilizar hilos de diámetro mayor si no se pueden colocar la fuente y la carga de manera cercana entre sí.

(Continúa en la siguiente página)

El diagrama de fasores que muestra las dos tensiones de fuente, las corrientes en las líneas exteriores y la corriente en el neutro se ilustra en la figura 12.10. El hecho de que $\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{nN} = 0$ se indica en el diagrama.



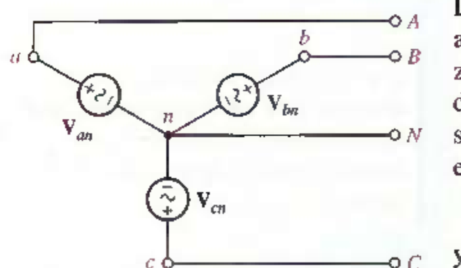
■ **FIGURA 12.10** Las tensiones de fuente y tres de las corrientes del circuito de la figura 12.9 se muestran en el diagrama fasorial. Observar que $\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{nN} = 0$.

PRÁCTICA

12.3 Modificar el circuito de la figura 12.9 agregando una resistencia de 1.5 Ω a cada una de las dos líneas exteriores, y una resistencia de 2.5 Ω al hilo neutro. Determinar la potencia promedio (activa) que se entrega a cada una de las tres cargas.

Respuestas: 153.1 W; 95.8 W; 1 374 W.

12.3 CONEXIÓN Y-Y TRIFÁSICA



■ **FIGURA 12.11** Fuente trifásica de cuatro hilos conectada en Y.

Las fuentes trifásicas tienen tres terminales, denominadas terminales de *línea* además, pueden contar o no con una cuarta terminal, la conexión *neutra*. Se comenzará con el análisis de una fuente trifásica que tiene una conexión neutra, la cual se debe representar mediante tres fuentes de tensión ideales conectadas en Y, como se indica en la figura 12.11; las terminales a, b, c, y n están disponibles. Sólo se examinarán fuentes trifásicas balanceadas, que se definirían de modo que

$$|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$$

y

$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$

Estas tres tensiones, localizadas cada una entre una línea y el neutro, se llaman ***tensiones de fase.*** Si se eligen de manera arbitraria $\mathbf{V}_{an}$ como la referencia, o se define:

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\underline{/0^\circ}$$

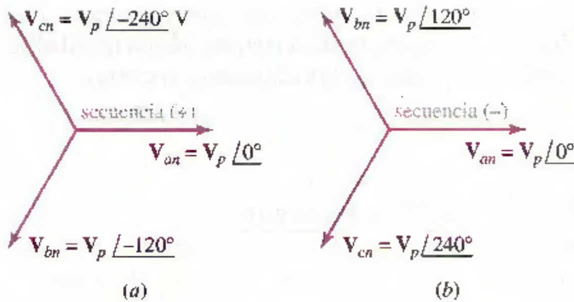
donde se empleará de manera constante V_p para representar la *amplitud* rms de cualquiera de estas tensiones de fase, por lo cual la definición de la fuente trifásica se indica así

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\underline{/-120^\circ} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p\underline{/-240^\circ}$$

o

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\underline{/120^\circ} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p\underline{/240^\circ}$$

La primera recibe el nombre de ***secuencia de fase positiva*** o ***secuencia de fase abc*** y se ilustra en la figura 12.12a; la segunda se conoce como ***secuencia de fase***



■ **FIGURA 12.12** (*a*) Secuencia de fase positiva o *abc*. (*b*) Secuencia de fase negativa o *cba*.

negativa o ***secuencia de fase cba*** y se indica mediante el diagrama fasorial de la figura. 12.12*b*. La secuencia de fase real de una fuente trifásica física depende de la elección arbitraria de las tres terminales que se denominarán *a*, *b*, y *c*, las que siempre se podrían elegir para proporcionar una secuencia de fase positiva; se supondrá que se hizo lo anterior en la mayoría de los sistemas que se analizarán.

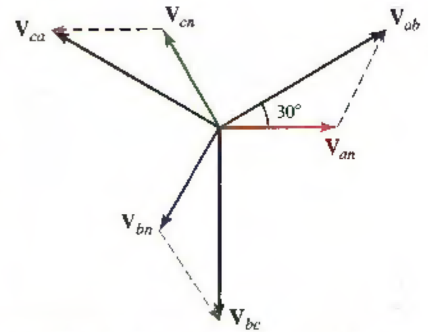
Tensiones de línea a línea (tensión de línea)

A continuación se determinarán las tensiones de línea a línea (denominadas muchas veces como ***tensiones de línea***) que se presentan cuando las tensiones de fase son las de la figura 12.12*a*. Resulta más fácil realizar lo anterior con la ayuda de un diagrama de fasores, puesto que todos los ángulos son múltiplos de 30°. La construcción necesaria se ilustra en la figura 12.13 y los resultados son

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p \angle 30° \quad [1]$$

$$\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p \angle -90° \quad [2]$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p \angle -210° \quad [3]$$



■ **FIGURA 12.13** Diagrama fasorial que se utiliza para determinar las tensiones de línea a partir de las tensiones de fase dadas. O, algebraicamente, $V_{ab} = V_{an} - V_{bn} = V_p \angle 0° - V_p \angle -120° = V_p - V_p \cos(-120°) - jV_p \text{sen}(-120°) = V_p(1 + \frac{1}{2} + j\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}V_p \angle 30°$.

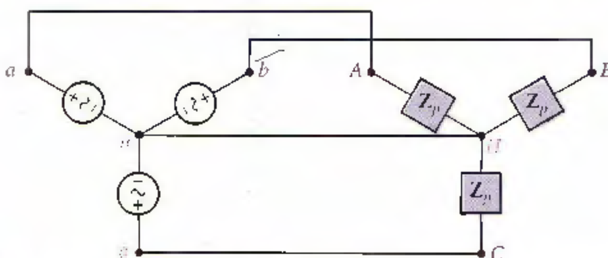
La ley de tensión de Kirchhoff requiere que la suma de las tres tensiones sea cero; se sugiere al lector que efectúe un ejercicio para verificar dicha afirmación.

Si la amplitud rms de cualquiera de las tensiones de línea se denota por V_L, entonces una de las características importantes de la fuente trifásica conectada en Y puede expresarse como

$$V_L = \sqrt{3}V_p$$

Observar que con una secuencia positiva $\mathbf{V}_{an}$ adelanta a $\mathbf{V}_{bn}$ y $\mathbf{V}_{bn}$ adelanta a $\mathbf{V}_{cn}$ en cada caso en 120°; asimismo, $\mathbf{V}_{ab}$ adelanta a $\mathbf{V}_{bc}$ y $\mathbf{V}_{bc}$ adelanta a $\mathbf{V}_{ca}$, de nuevo en 120°. La afirmación es cierta en el caso de secuencia de fase negativa si la palabra "retrasa" se sustituye por la de "adelanta".

A continuación se conectará a la fuente una carga trifásica balanceada conectada en Y, utilizando tres líneas y un neutro, como se dibuja en la figura 12.14.



■ **FIGURA 12.14** Sistema trifásico balanceado conectado en Y-Y que incluye un neutro.

La carga se representa por una impedancia $\mathbf{Z}_p$ entre cada línea y el neutro. Las tres corrientes de línea se calculan con mucha facilidad puesto que en realidad se tienen tres circuitos monofásicos que poseen un hilo de conexión común.[2]

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p}$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_p} = \frac{\mathbf{V}_{an}\underline{/-120^\circ}}{\mathbf{Z}_p} = \mathbf{I}_{aA}\underline{/-120^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{aA}\underline{/-240^\circ}$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{I}_{Nn} = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} = 0$$

De tal modo, el neutro no conduce corriente si la fuente y la carga están balanceadas, y si los cuatro hilos tienen impedancia cero. ¿Cómo cambiará lo anterior si se inserta una impedancia $\mathbf{Z}_L$ en serie en cada una de las tres líneas y una impedancia $\mathbf{Z}_n$ en el neutro? Se combinarían las impedancias de línea con las de carga. Esta carga eficaz seguirá balanceada y podría eliminarse un hilo neutro perfectamente conductor. En consecuencia, si no se produce cambio en el sistema con un cortocircuito, o un circuito abierto entre n y N, se insertaría cualquier impedancia en el neutro y la corriente de éste permanecería igual a cero.

Se concluye que, si se tienen fuentes, cargas e impedancias de línea balanceadas, se podría reemplazar un hilo neutro de cualquier impedancia por cualquier otra impedancia, incluso por un cortocircuito o un circuito abierto; la sustitución no afectará las tensiones o las corrientes del sistema. Muchas veces resulta útil *imaginar* un cortocircuito entre los dos puntos neutros, ya sea que esté presente o ausente un hilo neutro; el problema se reduce en ese caso a tres problemas monofásicos, todos idénticos salvo por la diferencia en el ángulo de fase. En tal situación, se afirma que el problema se resuelve "por fase".

EJEMPLO 12.2

En el circuito de la figura 12.15, encontrar las corrientes y las tensiones indicadas por todo el circuito y calcular la potencia total que se disipa en la carga.

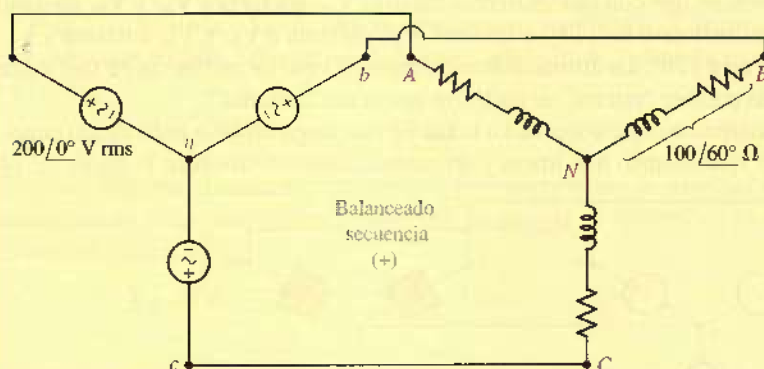


FIGURA 12.15 Sistema trifásico balanceado conectado en (Y-Y) y que incluye un neutro.

(2) Observar que esto es cierto al aplicar la superposición y al considerar cada fase a la vez

En razón de que se indica una de las tensiones de fase de fuente y se dice que se utilice la secuencia de fase positiva, las tres tensiones de fase son:

$$\mathbf{V}_{an} = 200\underline{/0^\circ}\ \text{V} \qquad \mathbf{V}_{bn} = 200\underline{/-120^\circ}\ \text{V} \qquad \mathbf{V}_{cn} = 200\underline{/-240^\circ}\ \text{V}$$

La tensión de línea es igual a $200\sqrt{3} = 346$ V; el ángulo de fase de cada tensión de línea se determina construyendo un diagrama de fasores, como se hizo en la figura 12.13 (en realidad, se aplica el diagrama de fasores de la figura 12.13), restando las tensiones de fase mediante una calculadora científica o remitiéndose a las ecuaciones [1] a [3]. Se encuentra que $\mathbf{V}_{ab}$ es $346\underline{/30^\circ}$ V, $\mathbf{V}_{bc}$ es $= 346\underline{/-90^\circ}$ V, y $\mathbf{V}_{ca}$ es $= 346\underline{/-210^\circ}$ V.

Se va a trabajar con la fase A. La corriente de línea es

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p} = \frac{200\underline{/0^\circ}}{100\underline{/60^\circ}} = 2\underline{/-60^\circ}\ \text{A}$$

Puesto que se sabe que es un sistema trifásico balanceado, es posible que sea fácil escribir las restantes corrientes de línea con base en $\mathbf{I}_{aA}$:

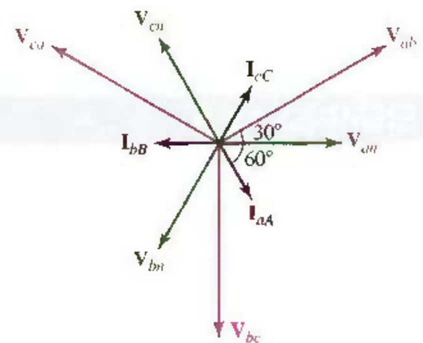
$$\mathbf{I}_{bB} = 2\underline{/(-60^\circ - 120^\circ)} = 2\underline{/-180^\circ}\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{cC} = 2\underline{/(-60^\circ - 240^\circ)} = 2\underline{/-300^\circ}\ \text{A}$$

La potencia absorbida por la fase A es

$$P_{AN} = 200(2)\cos(0^\circ + 60^\circ) = 200\ \text{W}$$

De tal modo, la potencia promedio (activa) total extraída por la carga trifásica es igual a 600 W.

El diagrama de fasores se presenta en la figura 12.16. Una vez que se sabe cualquiera de las magnitudes de las tensiones de línea y alguna de las magnitudes de la corriente de línea, los ángulos de las tres tensiones y las tres corrientes se habrían obtenido sin dificultad al leer el diagrama.



■ **FIGURA 12.16** Diagrama fasorial que se aplica al circuito de la figura 12.15.

PRÁCTICA

12.4 Un sistema trifásico balanceado de tres hilos tiene una carga conectada en Y. Cada fase contiene tres cargas en paralelo: $-j100\ \Omega$, $100\ \Omega$, y $50 + j50\ \Omega$. Suponer una secuencia de fase positiva con $\mathbf{V}_{ab} = 400\underline{/0^\circ}$ V. Encontrar: (*a*) $\mathbf{V}_{an}$; (*b*) $\mathbf{I}_{aA}$; (*c*) la potencia activa total extraída por la carga.

Respuestas: $231\underline{/-30^\circ}$ V; $4.62\underline{/-30^\circ}$ A; 3 200 W.

Antes de analizar otro ejemplo, ésta sería una buena oportunidad para explorar con rapidez un planteamiento que se hizo en la sección 12.1; es decir, aun cuando las tensiones y corrientes de fase tienen valor cero en instantes específicos de tiempo (cada 1/120 s en Norteamérica), la potencia instantánea entregada a la carga *total* nunca es cero. Considerar una vez más la fase A del ejemplo 12.2, con la tensión y la corriente de fase escritas en el dominio del tiempo:

Se requiere el factor $\sqrt{2}$ para convertir unidades rms.

$$v_{AN} = 200\sqrt{2}\cos(120\pi t + 0^\circ)\ \text{V}$$

e

$$i_{AN} = 2\sqrt{2}\cos(120\pi t - 60^\circ)\ \text{A}$$

En consecuencia, la potencia instantánea que absorbe la fase A es.

$$\begin{aligned} p_A(t) = v_{AN} i_{AN} &= 800\cos(120\pi t)\cos(120\pi t - 60^\circ) \\ &= 400[\cos(-60^\circ) + \cos(240\pi t - 60^\circ)] \\ &= 200 + 400\cos(240\pi t - 60^\circ)\ \text{W} \end{aligned}$$

de modo similar,

$$p_B(t) = 200 + 400\cos(240\pi t - 300^\circ)\ \text{W}$$

y

$$p_C(t) = 200 + 400\cos(240\pi t - 180^\circ)\ \text{W}$$

Por lo tanto, la potencia instantánea que absorbe la carga *total* es

$$p(t) = p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) = 600\ \text{W}$$

independiente del tiempo, que es el mismo valor que la potencia promedio (activa) calculada en el ejemplo 12.2.

EJEMPLO 12.3

Un sistema trifásico balanceado con una tensión de línea de 300 V se suministra a una carga balanceada conectada en (Y) con 1 200 W a un FP adelantado de 0.8. Determinar la corriente de línea y la impedancia de carga por fase.

La tensión de fase es $300/\sqrt{3}$ V y la potencia por fase corresponde a 1 200/3 = 400 W. De tal manera, se determinaría la corriente de línea a partir de la relación de potencia

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_L)(0.8)$$

así que la corriente de línea es entonces 2.89 A. La impedancia de fase está dada por

$$|\mathbf{Z}_p| = \frac{V_p}{I_L} = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89} = 60\ \Omega$$

Puesto que el FP es 0.8 adelantado, el ángulo de fase de la impedancia equivale a -36.9°; de tal modo, $\mathbf{Z}_p = 60\underline{/-36.9^\circ}\ \Omega$.

Se manejan con facilidad cargas más complicadas, puesto que los problemas se reducen a cuestiones monofásicas más simples.

PRÁCTICA

12.5 Un sistema trifásico balanceado de tres hilos tiene una tensión de línea de 500 V y están presentes dos cargas balanceadas en (Y): una carga capacitiva con $7 - j2\ \Omega$ por fase y una carga inductiva con $4 + j2\ \Omega$ por fase. Determinar: (*a*) la tensión de fase; (*b*) la corriente de línea; (*c*) la potencia activa total extraída por la carga; (*d*) el factor de potencia con el que opera la fuente.

Respuestas: 289 V; 97.5 A; 83.0 kW; 0.983 retrasado.

EJEMPLO 12.4

Una carga de iluminación balanceada de 600 W se añade (en paralelo) al sistema del ejemplo 12.3. Determinar la nueva corriente de línea.

Se dibuja primero un circuito por fase adecuado, como se muestra en la figura 12.17. Se supone que la carga de 600 W es una carga balanceada distribuida de manera uniforme entre las tres fases, lo que da lugar a 200 W adicionales consumidos por cada fase.

La amplitud de la corriente de iluminación está determinada por

$$200 = \frac{300}{\sqrt{3}} |\mathbf{I}_1| \cos 0°$$

por lo que

$$|\mathbf{I}_1| = 1.155 \text{ A}$$

De forma similar, se descubre que la amplitud de la corriente de carga capacitiva queda invariable en su valor previo, pues su tensión ha permanecido igual.

$$|\mathbf{I}_2| = 2.89 \text{ A}$$

Si se supone que la fase con la que se trabaja tiene una tensión de fase con un ángulo de 0°, entonces,

$$\mathbf{I}_1 = 1.155\underline{/0°} \text{ A} \qquad \mathbf{I}_2 = 2.89\underline{/+36.9°} \text{ A}$$

de modo que la corriente de línea es

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 3.87\underline{/+26.6°} \text{ A}$$

Además, la potencia activa generada por esta fase de la fuente es

$$P_p = \frac{300}{\sqrt{3}} 3.87 \cos(+26.6°) = 600 \text{ W}$$

lo cual concuerda con el hecho de que se sabe que la fase individual suministra 200 W a la nueva carga de iluminación, así como 400 W a la carga original.

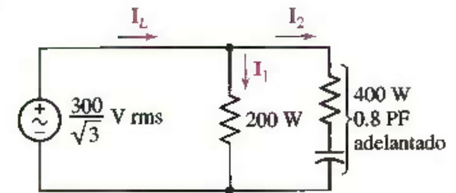


FIGURA 12.17 Circuito por fase que se usa para analizar un ejemplo trifásico *balanceado*.

PRÁCTICA

12.6 Tres cargas balanceadas conectas en Y se instalan en un sistema trifásico balanceado de cuatro hilos. La carga 1 demanda una potencia total de 6 kW a un factor de potencia unitario; la carga 2 requiere 10 kVA a un FP = 0.96 retrasado, y la carga 3 necesita 7 kW a 0.85 retrasado. Si la tensión de fase en las cargas es de 135 V, cada línea tiene una resistencia de 0.1 Ω, y el neutro tiene una resistencia de 1 Ω, determinar: (*a*) la potencia activa total consumida por las cargas; (*b*) el FP combinado de las cargas; (*c*) la pérdida de potencia total en las cuatro líneas; (*d*) la tensión de fase en la fuente; (*e*) el factor de potencia con el que opera la fuente.

Respuestas: 22.6 kW; 0.954 retrasado; 1 027 W; 140.6 V; 0.957 retrasado.

Si una carga *desbalanceada* conectada en Y está presente en un sistema trifásico, que en otro caso estaría balanceado, el circuito tal vez se seguirá analizando en un esquema por fase *si* está presente el hilo neutro y *si* tiene impedancia cero. De no cumplirse ninguna de estas condiciones, se deben utilizar otros métodos, como el análisis de malla o el nodal. Sin embargo, los ingenieros que dedican la mayor parte de su tiempo a los sistemas trifásicos desbalanceados encontrarán que el uso de *componentes simétricos* ahorrará mucho tiempo, pero este método no se explicará aquí.

12.4 CONEXIÓN DELTA Δ

Una configuración como alternativa a la carga conectada en Y es la carga conectada en Δ, como se muestra en la figura 12.18. Este tipo de configuración es muy común y no posee una conexión neutra.

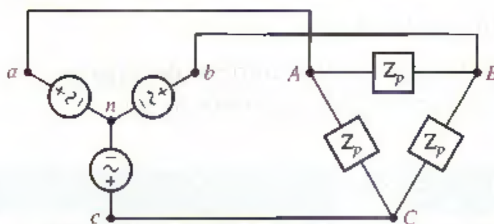


FIGURA 12.18 Carga balanceada conectada en Δ que se presenta en un sistema trifásico de tres hilos. La fuente está conectada en Y.

Se considera una carga balanceada conectada en Δ que está compuesta por una impedancia $\mathbf{Z}_p$ insertada entre cada par de líneas. Observar la figura 12.18 y suponer que se conocen las tensiones de línea

$$V_L = |\mathbf{V}_{ab}| = |\mathbf{V}_{bc}| = |\mathbf{V}_{ca}|$$

o que se sabe cuáles son las tensiones de fase

$$V_p = |\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$$

donde

$$V_L = \sqrt{3}V_p \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$$

como se calculó antes. Debido a que se conoce la tensión en cada rama de la Δ las *corrientes de fase* se obtienen sin dificultad:

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_p} \qquad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_p} \qquad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_p}$$

y sus diferencias determinan las corrientes de línea, en la forma

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}$$

En razón de que se está trabajando con un sistema balanceado, las tres corrientes de fase son de igual amplitud:

$$I_p = |\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}|$$

Las corrientes de línea también tienen la misma amplitud; la simetría se manifiesta a partir del diagrama de fasores de la figura 12.19. De tal modo, se tiene

$$I_L = |\mathbf{I}_{aA}| = |\mathbf{I}_{bB}| = |\mathbf{I}_{cC}|$$

e

$$I_L = \sqrt{3}I_p$$

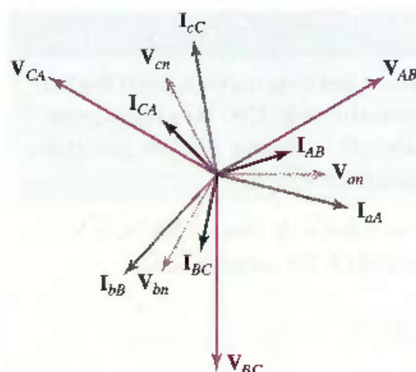


FIGURA 12.19 Diagrama fasorial que podría aplicarse al circuito de la figura 12.18 si $\mathbf{Z}_p$ fuera una impedancia inductiva.

Por el momento se descartará la fuente y se examinará sólo la carga balanceada. Si la carga está conectada en (Δ), entonces resultan indistinguibles la tensión de fase y la de línea, aunque la corriente de línea es mayor que la de fase por un factor de $\sqrt{3}$. Sin embargo, con una carga conectada en Y la corriente de fase y la de línea se refieren a la misma corriente, y la tensión de línea es mayor que la de fase por un factor de $\sqrt{3}$.

EJEMPLO 12.5

Determinar la amplitud de la corriente de línea en un sistema trifásico con una tensión de línea de 300 V que suministra 1 200 W a una carga conectada en (Δ) a un FP de 0.8 retrasado.

Pensar otra vez en una sola fase que demanda 400 W con un FP de 0.8 retrasado bajo una tensión de línea de 300 V. De tal manera,

$$400 = 300(I_p)(0.8)$$

e

$$I_p = 1.667 \text{ A}$$

así que la relación entre las corrientes de fase y las de línea produce

$$I_L = \sqrt{3}(1.667) = 2.89 \text{ A}$$

Además, el ángulo de fase de la carga es $\cos^{-1}(0.8) = 36.9°$, por lo cual la impedancia en cada fase debe ser

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300}{1.667}\underline{/36.9°} = 180\underline{/36.9°}\ \Omega$$

También en este caso conviene recordar que se supone que todas las tensiones y las corrientes se indican como valores rms.

PRÁCTICA

12.7 Cada fase de una carga trifásica balanceada conectada en Δ consiste en un inductor de 200 H en serie, con una combinación en paralelo de un capacitor de 5 μF y una resistencia de 200 Ω. Pensar en una resistencia de línea cero y una tensión de fase de 200 V a $\omega = 400$ rad/s. Determinar: (*a*) la corriente de fase; (*b*) la corriente de línea; (*c*) la potencia activa total que absorbe la carga.

Respuestas: 1.158 A; 2.01 A; 693 W.

EJEMPLO 12.6

Determinar la amplitud de la corriente de línea en un sistema trifásico con una tensión de línea de 300 V que suministra 1 200 W a una carga conectada en Y y un FP de 0.8 retrasado. ***(Es el mismo circuito que el del ejemplo 12.5, pero con una carga conectada en Y.)***

En el esquema por fase, se tiene ahora una tensión de fase de $300/\sqrt{3}$ V, una potencia de 400 W y un FP retrasado de 0.8. En consecuencia,

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_p)(0.8)$$

e

$$I_p = 2.89 \quad (\text{por lo que } I_L = 2.89 \text{ A})$$

El ángulo de fase de la carga es otra vez de 36.9°, por lo cual la impedancia en cada fase de la (Y) corresponde a

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89}\underline{/36.9^\circ} = 60\underline{/36.9^\circ}\ \Omega$$

El factor $\sqrt{3}$ no sólo relaciona las cantidades de fase y de línea, sino que aparece también como una expresión útil para la potencia (activa) total consumida por cualquier carga trifásica balanceada. Si se supone una carga conectada en Y, con un ángulo del factor de potencia θ, la potencia (activa) tomada por cualquier fase está dada por:

$$P_p = V_p I_p \cos\theta = V_p I_L \cos\theta = \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\theta$$

y la potencia (activa) total es igual a

$$P = 3P_p = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$$

De manera similar, la potencia activa que se entrega a cada fase de la carga conectada en Δ se calcula mediante

$$P_p = V_p I_p \cos\theta = V_L I_p \cos\theta = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\theta$$

lo que da una potencia activa total de

$$P = 3P_p$$
$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta \qquad [4]$$

Así, la ecuación [4] permite calcular la potencia activa total que se entrega a una carga balanceada, a partir del conocimiento de la magnitud de la tensión de línea, de la corriente de línea y del ángulo de fase de la impedancia (o admitancia) de carga, sin que importe que la carga se conecte en Y o en Δ. La corriente de línea en los ejemplos 12.5 y 12.6 puede obtenerse ahora en dos pasos simples:

$$1\,200 = \sqrt{3}(300)(I_L)(0.8)$$

Por lo tanto,

$$I_L = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2.89 \text{ A}$$

TABLA 12.1 Comparación de cargas trifásicas conectadas en Y y en Δ. V_p es la magnitud de la tensión de cada una de las fases de la fuente conectadas en Y.

Carga	Tensión de fase	Tensión de línea	Corriente de fase	Corriente de línea	Potencia por fase
Y	$\mathbf{V}_{AN} = V_p\underline{/0^\circ}$ $\mathbf{V}_{BN} = V_p\underline{/-120^\circ}$ $\mathbf{V}_{CN} = V_p\underline{/-240^\circ}$	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = (\sqrt{3}\underline{/30^\circ})\mathbf{V}_{AN} = \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = (\sqrt{3}\underline{/30^\circ})\mathbf{V}_{BN} = \sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ}$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = (\sqrt{3}\underline{/30^\circ})\mathbf{V}_{CN} = \sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ}$	$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} = \dfrac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BN} = \dfrac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CN} = \dfrac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_p}$	$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} = \dfrac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BN} = \dfrac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CN} = \dfrac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_p}$	$\sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$ donde $\cos\theta$ = factor de potencia de la carga.
Δ	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ}$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ}$	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ}$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ}$	$\mathbf{I}_{AB} = \dfrac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{BC} = \dfrac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{CA} = \dfrac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_p}$	$\mathbf{I}_{aA} = (\sqrt{3}\underline{/-30^\circ})\dfrac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = (\sqrt{3}\underline{/-30^\circ})\dfrac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = (\sqrt{3}\underline{/-30^\circ})\dfrac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_p}$	$\sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$ donde $\cos\theta$ = factor de potencia de la carga.

En la tabla 12.1 se presenta una breve comparación de las tensiones de fase y de línea, así como de las corrientes de fase y de línea tanto para cargas conectadas en Y como en Δ que están alimentadas por una fuente trifásica conectada en Y.

PRÁCTICA

12.8 Un sistema trifásico balanceado de tres hilos se termina con dos cargas en paralelo conectadas en Δ. La carga 1 demanda 4 kVA con un FP de 0.8 retrasado, en tanto que la carga 2 absorbe 24 kW con un FP de 0.9 adelantado. Suponer que no hay resistencia de línea y sea $\mathbf{V}_{ab} = 440\underline{/30^\circ}$ V. Calcular: (*a*) la potencia activa total suministrada a las cargas; (*b*) la corriente de fase $\mathbf{I}_{AB1}$ de la carga retrasada; (*c*) $\mathbf{I}_{AB2}$; (*d*) $\mathbf{I}_{aA}$.

Respuestas: 56.0 kW; $30.3\underline{/-6.87^\circ}$ A; $20.2\underline{/55.8^\circ}$ A; $75.3\underline{/-12.46^\circ}$ A.

Fuentes conectadas en Δ

También se podría conectar la configuración de una fuente en Δ, lo cual, sin embargo, no es común, pues un ligero desbalance (desequilibrio) en las fases de la fuente puede ocasionar una circulación de corrientes elevadas en el lazo Δ. Por ejemplo, se denominarán a las tres fuentes monofásicas como $\mathbf{V}_{ab}$, $\mathbf{V}_{bc}$, y $\mathbf{V}_{cd}$. Antes de cerrar la Δ al conectar *d* con *a*, se determinará el desbalance mediante la suma $\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{ca}$. Suponer que la amplitud del resultado es sólo 1% de la tensión de línea. Por lo tanto, la corriente que circula es casi $\frac{1}{3}$ de la tensión de línea dividida entre la impedancia interna de cualquier fuente. ¿Qué

APLICACIÓN PRÁCTICA

Sistemas de generación de potencia

La generación de electricidad se consigue mediante una amplia variedad de técnicas. Por ejemplo, la conversión directa de energía solar en electricidad por medio de tecnología fotovoltaica (celdas solares) origina la producción de potencia de cd. Sin embargo, a pesar de representar una tecnología bastante aceptable desde la perspectiva ambiental, las instalaciones con base fotovoltaica son en la actualidad más costosas que otros medios de producir electricidad y requieren el uso de inversores para convertir la potencia de cd en ca. Otras tecnologías, como los aerogeneradores eólicos, la geotermia, la hidrodinámica, la energía nuclear y los generadores basados en combustible fósil son comparativamente mucho más económicas. En estos sistemas un eje gira por la acción de un ***impulsor primario***, como el viento sobre un propulsor o el agua o corriente sobre las aspas de una turbina (figura 12.20).

Una vez que el impulsor primario se ha dispuesto para generar movimiento rotacional de un eje, existen varios medios para convertir esta energía mecánica en energía eléctrica. Un ejemplo es un ***generador síncrono***, como el de la figura (12.21), que es una máquina compuesta por dos secciones principales: una parte estacionaria, llamada ***estator***, y una parte giratoria, denominada ***rotor***. La corriente directa se suministra a bobinas de alambre devanadas en torno al rotor a fin de generar un campo magnético, que se hace girar mediante la acción del impulsor primario solidario del eje del rotor. Un conjunto de tensiones trifásicas se induce entonces en un segundo conjunto de devanados alrededor del estator. Los generadores síncronos deben su nombre al hecho de que la frecuencia de la tensión de ca que se produce se sincroniza con la rotación mecánica del rotor.

La demanda real de un generador aislado varía de manera considerable, a medida que se añaden o eliminan diversas cargas, de igual modo que cuando se arrancan las unidades de aire acondicionado, las luces se apagan o encienden, etc. La salida de tensión de un generador debe ser independiente en condiciones ideales de la carga, lo cual no sucede en la práctica. La tensión $\mathbf{E}_A$ que se induce en cualquier fase determinada del estator, denominada a veces ***tensión generada interna***, tiene una magnitud dada por

$$E_A = K\phi\omega$$

donde K es una constante que depende de la manera en que se construya la máquina, ϕ es el flujo magnético que producen los devanados de campo del rotor (y, por lo tanto, es independiente de la carga) y ω es la velocidad angular , que depende sólo del impulsor primario y no de la carga unida al generador. De esta forma, *la variación de la carga no afecta la magnitud de* $\mathbf{E}_A$. La tensión interna generada se relaciona con la tensión de fase $\mathbf{V}_\phi$ y la corriente de fase $\mathbf{I}_A$ por

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{V}_\phi + jX_S\mathbf{I}_A$$

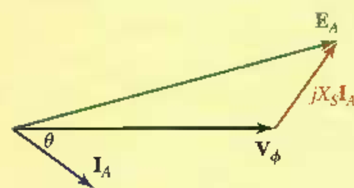
donde X_S es la ***reactancia síncrona*** del generador. Si se aumenta la carga, entonces se consumirá una corriente

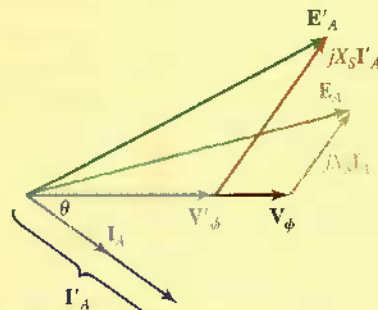


FIGURA 12.20 Instalación de captación de energía eólica en Altamont Pass, California, que consta de más de siete mil aerogeneradores individuales.



■ **FIGURA 12.21** Rotor de 24 polos de un generador síncrono que está siendo colocado en su posición.
Foto cortesía del Dr. Wade Enright, Te Kura Pukaha Vira O Te Whare Wananga O Waitaha, Aotearoa.





■ **FIGURA 12.22** Diagramas fasoriales que describen el efecto de carga sobre un generador síncrono que permanece aislado. (*a*) El generador conectado a una carga con un factor de potencia retrasado de cos θ. (*b*) Se agrega una carga adicional, sin que cambie el factor de potencia. La magnitud de la tensión generada de manera interna $\mathbf{E}_A$ permanece igual mientras aumenta la corriente de salida, de modo que se reduce la tensión de salida $\mathbf{V}_\phi$.

mayor $\mathbf{I}'_A$ del generador. Si no cambia el factor de potencia (es decir, permanece constante el ángulo entre $\mathbf{V}_\phi$ e $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{V}_\phi$ se reducirá, pues E_A no puede cambiar.

Por ejemplo, considerar el diagrama de fasores de la figura 12.22*a*, que describe la salida de tensión-corriente de una sola fase de un generador conectado a una carga con un factor de potencia retrasado de cos θ. También se ilustra la tensión generada interna $\mathbf{E}_A$. Si se añade una carga adicional, sin cambiar el factor de potencia, como se representa en la figura 12.22*b*, la corriente suministrada $\mathbf{I}_A$ se incrementa hasta $\mathbf{I}'_A$. Sin embargo, la magnitud de la tensión generada interna, que se forma por la suma de los fasores $jX_S\mathbf{I}'_A$ y $\mathbf{V}'_\phi$, debe permanecer invariable. De tal manera, $E'_A = E_A$, por lo que la salida de tensión ($\mathbf{V}'_\phi$) del generador se reducirá un poco, como se describe en la figura 12.22*b*.

La ***regulación de tensión*** de un generador se define:

$$\% \text{ de regulación} = \frac{V_{\text{sin carga}} - V_{\text{carga completa}}}{V_{\text{carga completa}}} \times 100$$

Idealmente, este valor debe ser lo más cercano posible a cero, aunque sólo puede lograrse si la corriente cd que se utiliza para controlar el flujo ϕ alrededor de los devanados de campo varía para compensar el cambio de las condiciones de carga, lo cual se convierte de inmediato en un proceso bastante complejo. Por esta razón, cuando se diseña una instalación de generación de potencia suelen preferirse varios generadores más pequeños conectados en paralelo, a un generador grande capaz de manejar la carga máxima. Cada generador funciona con o cerca de su carga máxima, por lo que la salida de tensión es en esencia constante; los generadores individuales se añaden o eliminan del sistema dependiendo de la demanda.

magnitud tendría esta impedancia? Depende de la corriente que se espera que la fuente entregue, con una caída despreciable de la tensión a nivel de las terminales. Si se supone que la corriente máxima ocasiona una caída de tensión de 1% en las terminales, entonces *¡la corriente circulante es un tercio de la corriente máxima!* Lo anterior reduce la capacidad de la corriente útil de la fuente e incrementa también las pérdidas en el sistema.

También se debe advertir que las fuentes trifásicas balanceadas se transformarían de Y a Δ, o viceversa, sin afectar las corrientes o tensiones de la carga. Las relaciones necesarias entre las tensiones de línea y de fase se presentan en la figura 12.13 en el caso en el que $\mathbf{V}_{an}$ tiene un ángulo de referencia de 0°. Esta transformación permite utilizar cualquier conexión de fuente que se prefiera, así que todas las relaciones de carga serán correctas. Desde luego, no se puede especificar alguna corriente o tensión dentro de la fuente, hasta que se conozca cómo está conectada en realidad. Las cargas trifásicas balanceadas quizá se transformen entre las configuraciones conectadas en Y y en Δ mediante la relación

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$

que tal vez valga la pena recordar.

12.5 MEDICIÓN DE POTENCIA EN SISTEMAS TRIFÁSICOS

Uso del wattímetro

Antes de iniciar la explicación de las técnicas especializadas que se utilizan para medir la potencia en sistemas trifásicos, conviene considerar de manera breve la forma en que se usa un ***wattímetro*** en un circuito monofásico.

La medición de potencia se consigue casi siempre a frecuencias inferiores de unos cuantos cientos de Hz mediante el uso de un wattímetro que contiene dos bobinas independientes. Una de ellas se elabora con alambre grueso, que tiene una resistencia muy baja, y se denomina *bobina de corriente.* La segunda está compuesta por un número mucho mayor de vueltas de alambre delgado, con resistencia relativamente alta, a la que se le llama *bobina de potencial o bobina de tensión.* Se podría insertar de manera interna o externa una resistencia adicional en serie con la bobina de potencial. El momento de torsión que se aplica al sistema móvil y a la aguja indicadora resulta proporcional al producto instantáneo de las corrientes que fluyen en ambas bobinas. Sin embargo, la inercia mecánica del sistema móvil provoca una desviación, proporcional al valor *promedio* de este momento de torsión.

El wattímetro se emplea conectándolo en una red de manera que la corriente que fluye en la bobina de corriente sea la que circula dentro de la red, y la tensión en la bobina de potencial corresponda a la tensión entre las dos terminales de la red. Por ello, la corriente en la bobina de potencial es la tensión de entrada dividida entre la resistencia de la bobina de potencial.

Resulta claro que el wattímetro tiene cuatro terminales disponibles, así que es necesario efectuar las conexiones correctas a ellas para obtener una lectura de escala ascendente en el medidor. De modo específico, suponga que se mide la potencia que absorbe una red pasiva. La bobina de corriente se inserta en serie con uno de los dos conductores conectados a la carga, y la bobina de potencial se instala entre los dos conductores, por lo general en el "lado de la carga" de la bobina de corriente. Las terminales de la bobina de potencial se indican a menudo mediante

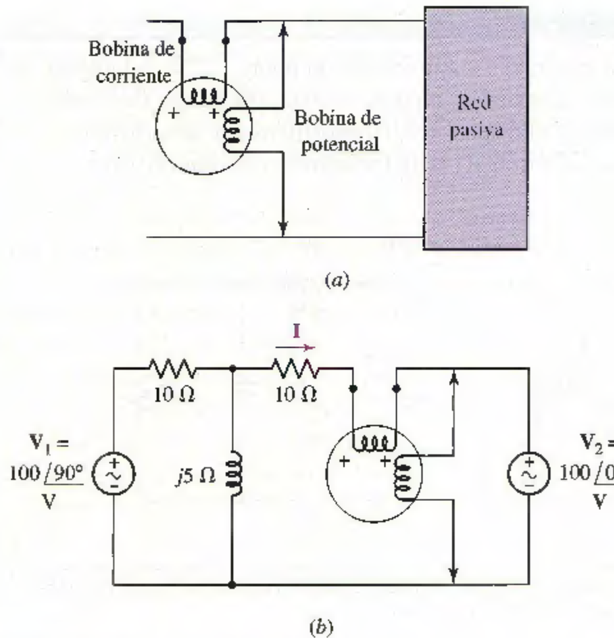


FIGURA 12.23 (*a*) Conexión de un wattímetro que asegurará una lectura de escala ascendente de la potencia que absorbe la red pasiva. (*b*) Ejemplo donde el wattímetro se instala para producir una indicación de escala ascendente de la potencia activa que absorbe la fuente de la derecha.

flechas, como en la figura 12.23*a*. Cada bobina tiene dos terminales y se requiere observar la relación adecuada entre el sentido de la corriente y la tensión. Casi siempre se marca con (+), un extremo de cada bobina, por lo que se obtiene una lectura de escala ascendente si fluye una corriente positiva hacia el extremo (+) de la bobina de corriente, mientras la terminal (+) de la bobina de potencial sea positiva con respecto al extremo sin marca. En consecuencia, el wattímetro que se muestra en la red de la figura 12.23*a* proporciona una desviación de escala ascendente cuando la red de la derecha absorbe potencia. Una inversión de cualquiera de las bobinas, pero no de ambas, provocará que el medidor trate de desviarse hacia las escalas inferiores; la inversión de ambas bobinas no afectará nunca la lectura.

Como ejemplo del empleo de un wattímetro de este tipo en la medición de potencia promedio (activa), considerar el circuito de la figura 12.23*b*. La conexión del wattímetro es tal, que una lectura ascendente de la escala corresponde a una potencia activa positiva absorbida por la red que está a la derecha del medidor, es decir, la fuente derecha. La potencia activa que absorbe dicha fuente está dada por

$$P = |\mathbf{V}_2|\,|\mathbf{I}| \cos(\text{ang } \mathbf{V}_2 - \text{ang } \mathbf{I})$$

Utilizando la superposición o el análisis de malla, se encuentra que la corriente es

$$\mathbf{I} = 11.18\underline{/153.4^\circ} \text{ A}$$

por lo cual la potencia activa que se absorbe corresponde a

$$P = (100)(11.18)\cos(0^\circ - 153.4^\circ) = -1\,000 \text{ W}$$

Por lo tanto, la aguja indicadora descansa contra el tope de la escala descendente. En la práctica, la bobina de potencial se invierte con mayor rapidez que la bobina de corriente y dicha inversión proporciona una lectura en la escala ascendente de 1 000 W.

PRÁCTICA

12.9 Determinar la lectura del wattímetro en la figura 12.24; establecer si la bobina de potencial se invirtió o no para obtener una lectura de escala ascendente, e identificar el dispositivo o dispositivos que absorben o generan tal potencia. La terminal (+) del wattímetro se conecta: (*a*) *x*; (*b*) *y*; (*c*) *z*.

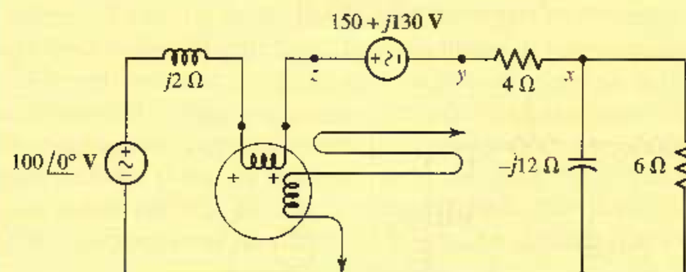


FIGURA 12.24

Respuestas: 1 200 W, como está, $P_{6\Omega}$ (absorbida); 2 200 W como está, $P_{4\Omega} + P_{6\Omega}$ (absorbida); 500 W, invertida, absorbida por 100 V.

El wattímetro en el sistema trifásico

A primera vista, la medición de la potencia consumida por una carga trifásica parece ser un problema simple. Sólo es necesario poner un wattímetro en cada una de las tres fases y sumar los resultados. Por ejemplo, las conexiones apropiadas de una carga en Y se muestran en la figura 12.25*a*. Cada wattímetro tiene su bobina de corriente insertada en una fase de la carga y su bobina de potencial conectada entre el lado de la línea de esa carga y el neutro. De manera similar, se

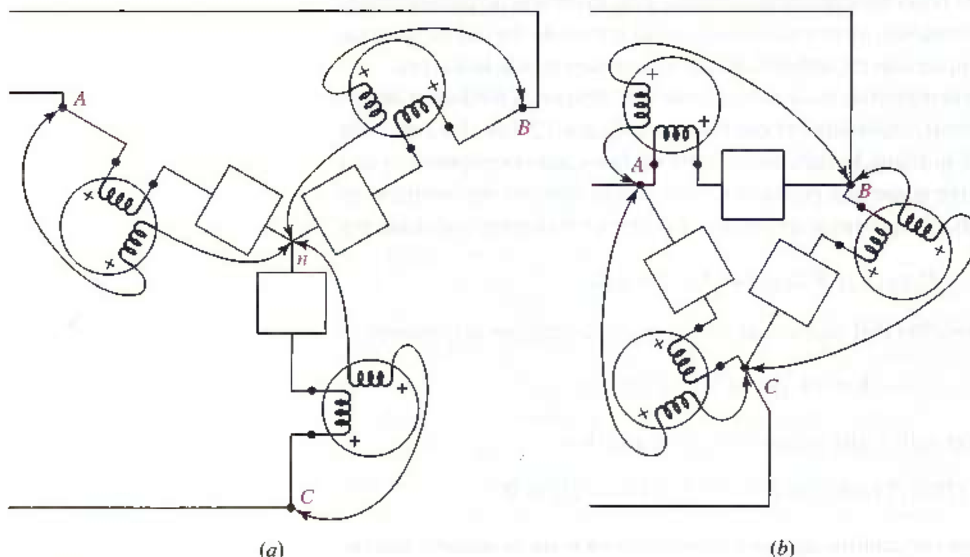


FIGURA 12.25 Tres wattímetros se conectan de manera que cada uno registra la potencia tomada por una fase de una carga trifásica y la suma de las lecturas de la potencia total. (*a*) Carga conectada en Y. (*b*) Carga conectada en Δ. Ni las cargas ni la fuente necesitan estar balanceadas.

conectarían tres wattímetros en la forma que se indica en la figura 12.25*b* a fin de medir la potencia activa total tomada por una carga que se conecta en Δ Los métodos son teóricamente correctos, aunque quizá sean inútiles en la práctica debido a que el neutro de la Y no siempre es accesible y no se cuenta con las fases de la Δ Por ejemplo, una máquina rotatoria trifásica sólo tiene tres terminales accesibles, que se denominan *A*, *B*, y *C*.

Resulta claro que se necesita un método de medición de la potencia activa total consumida por una carga trifásica con sólo tres terminales accesibles; se podrían efectuar mediciones en el lado de "línea", pero no en el de la "carga". Se dispone de un método de este tipo que puede medir la potencia consumida por una carga *desbalanceada*, a partir de una fuente *desbalanceada*. Se conectan tres wattímetros de manera que cada uno tenga su bobina de corriente y su bobina de tensión entre esa línea y algún punto común *x*, como se indica en la figura 12.26.

Aunque se ilustra un sistema con una carga conectada en Y, los argumentos que se presentan son también válidos para una carga conectada en Δ El punto *x* quizás sea alguno no especificado en el sistema trifásico, o sólo un punto en el espacio en donde las tres bobinas de potencial tengan un nodo en común. La potencia promedio activa indicada por el wattímetro *A* debe ser

$$P_A = \frac{1}{T}\int_0^T v_{Ax} i_{aA}\, dt$$

donde *T* es el periodo de todas las tensiones de fuente. Las lecturas de los otros dos wattímetros se indican mediante expresiones similares, así que la potencia promedio (activa) total consumida por la carga resulta

$$P = P_A + P_B + P_C = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{Ax} i_{aA} + v_{Bx} i_{bB} + v_{Cx} i_{cC})\, dt$$

Cada una de las tres tensiones de la expresión anterior se escribe en términos de una tensión de fase y de la tensión entre el punto *x* y el neutro,

$$v_{Ax} = v_{AN} + v_{Nx}$$
$$v_{Bx} = v_{BN} + v_{Nx}$$
$$v_{Cx} = v_{CN} + v_{Nx}$$

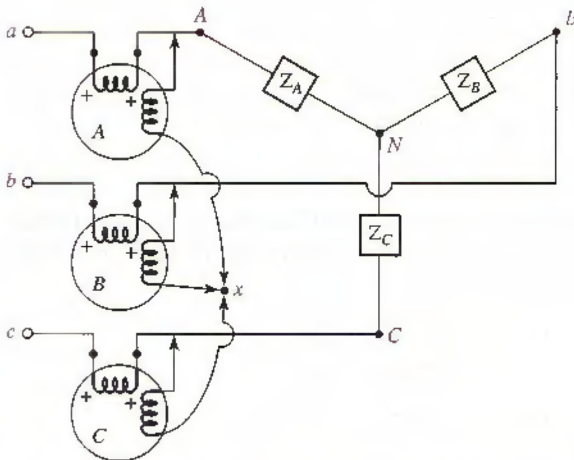


FIGURA 12.26 Método de conexión de tres wattímetros para medir la potencia (activa) total que toma una carga trifásica. Sólo son accesibles las tres terminales de la carga.

y, por lo tanto,

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{AN}i_{aA} + v_{BN}i_{bB} + v_{CN}i_{cC})\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T v_{Nx}(i_{aA} + i_{bB} + i_{cC})\,dt$$

Sin embargo, se podría pensar que la carga trifásica completa es un supernodo, de modo que la ley de Kirchhoff de corriente requiere que

$$i_{aA} + i_{bB} + i_{cC} = 0$$

De tal modo,

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{AN}i_{aA} + v_{BN}i_{bB} + v_{CN}i_{cC})\,dt$$

Al consultar el diagrama de circuito se observa que esta suma es en realidad la suma de las potencias promedio (activa) tomadas por cada fase de la carga, ¡y la suma de las lecturas de los tres wattímetros representa, por lo tanto, la potencia promedio (activa) total consumida por la carga completa!

Se ilustrará este procedimiento mediante un ejemplo numérico, antes de descubrir que uno de estos tres wattímetros en realidad resulta superfluo. Se supondrá una fuente balanceada

$$\mathbf{V}_{ab} = 100\underline{/0^\circ} \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bc} = 100\underline{/-120^\circ} \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 100\underline{/-240^\circ} \quad \text{V}$$

o

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-30^\circ} \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = \frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-150^\circ} \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = \frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-270^\circ} \quad \text{V}$$

y una carga desbalanceada:

$$\mathbf{Z}_A = -j10\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_B = j10\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_C = 10\ \Omega$$

Suponer que hay wattímetros ideales, como los de la figura 12.26, con el punto x ubicado sobre el neutro de la fuente n. Las tres corrientes de línea se podrían obtener mediante un análisis de malla:

$$\mathbf{I}_{aA} = 19.32\underline{/15^\circ} \quad \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{bB} = 19.32\underline{/165^\circ} \quad \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{cC} = 10\underline{/-90^\circ} \quad \text{A}$$

La tensión entre los neutros es

$$\mathbf{V}_{nN} = \mathbf{V}_{nb} + \mathbf{V}_{BN} = \mathbf{V}_{nb} + \mathbf{I}_{bB}(j10) = 157.7\underline{/-90^\circ}$$

La potencia promedio (activa) indicada por cada wattímetro se calcularía mediante

$$P_A = V_p I_{aA} \cos(\text{ang}\mathbf{V}_{an} - \text{ang}\,\mathbf{I}_{aA})$$
$$= \frac{100}{\sqrt{3}} 19.32 \cos(-30^\circ - 15^\circ) = 788.7 \text{ W}$$
$$P_B = \frac{100}{\sqrt{3}} 19.32 \cos(-150^\circ - 165^\circ) = 788.7 \text{ W}$$
$$P_C = \frac{100}{\sqrt{3}} 10 \cos(-270^\circ + 90^\circ) = -577.4 \text{ W}$$

Observar que la lectura de uno de los wattímetros es negativa. La explicación previa sobre el uso básico del wattímetro indica que una lectura de escala ascendente sobre ese medidor se obtiene después de que se invierte la bobina de potencial o la bobina de corriente.

o una potencia activa total de 1 kW. Puesto que una corriente rms de 10 A fluye por la carga *resistiva*, la potencia activa total que demanda la carga es

$$P = 10^2(10) = 1 \text{ kW}$$

así que los dos métodos concuerdan.

Método de los dos wattímetros

Se acepta que el punto x, la conexión común de las tres bobinas de potencial, se podría ubicar en cualquier lugar que se desee sin afectar la suma algebraica de las tres lecturas de wattímetro. Pensar ahora en el efecto de ubicar el punto x, esta conexión común de los tres wattímetros, de manera directa sobre una de las líneas. Por ejemplo, si un extremo de cada bobina de potencial regresa a B, entonces no hay tensión en la bobina de potencial (de tensión) del wattímetro B, así que *la lectura de este medidor debe ser cero*. En consecuencia, se podría eliminar y la suma algebraica de las dos lecturas de los wattímetros restantes seguiría siendo la potencia (activa) total consumida por la carga. Cuando la ubicación de x se elige de esta manera, se describe el método de medición de potencia (activa) como el de los ***dos wattímetros***. La suma algebráica de las lecturas indica la potencia activa total, independientemente de: 1) el desbalance de la carga, 2) el desbalance de la fuente, 3) la diferencia entre los dos wattímetros y 4) la forma de onda de la fuente periódica. El único supuesto es que las correcciones del wattímetro son suficientemente pequeñas como para que se puedan pasar por alto. Por ejemplo, en la figura 12.26, por la bobina de corriente de cada medidor pasó la corriente de línea consumida por la carga más la corriente que toma la bobina de potencial (de tensión). En razón de que la última corriente suele ser bastante pequeña, su efecto se estima a partir del conocimiento de la resistencia de la bobina de potencial (de tensión) y de la tensión en sus extremos. Estas dos cantidades permiten realizar una estimación precisa de la potencia activa que se disipa en la bobina de potencial (de tensión).

En el ejemplo numérico que acaba de describirse, suponga ahora que se usan dos wattímetros, uno con bobina de corriente en la línea A y con bobina de potencial entre las líneas A y B, el otro con la bobina de corriente en la línea C y la bobina de potencial entre C y B. La lectura del primer medidor es

$$P_1 = V_{AB} I_{aA} \cos(\text{ang } V_{AB} - \text{ang } I_{aA})$$
$$= 100(19.32)\cos(0^\circ - 15^\circ)$$
$$= 1\,866 \text{ W}$$

y la del segundo

$$P_2 = V_{CB} I_{cC} \cos(\text{ang } V_{CB} - \text{ang } I_{cC})$$
$$= 100(10)\cos(60^\circ + 90^\circ)$$
$$= -866 \text{ W}$$

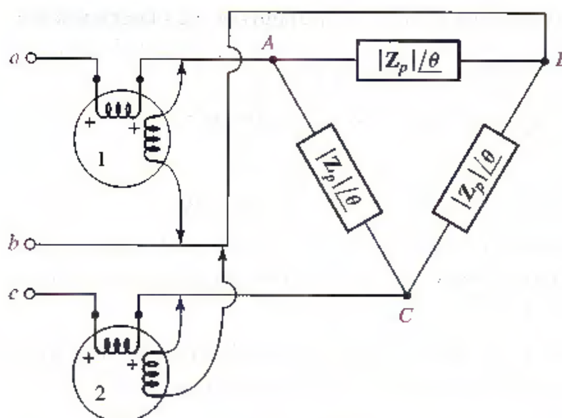


FIGURA 12.27 Dos wattímetros conectados para leer la potencia activa total que consume una carga trifásica balanceada (equilibrada).

Por lo tanto,

$$P = P_1 + P_2 = 1\,866 - 866 = 1\,000 \text{ W}$$

como se esperaba a partir de la experiencia reciente con el circuito.

En el caso de una carga balanceada, el método de los dos wattímetros permite determinar el ángulo del FP, así como la potencia activa total consumida por la carga. Suponer una impedancia de carga con un ángulo de fase θ; se podría utilizar una conexión en Y o en Δ pero se supondrá la conexión en Δ que se presenta en la figura 12.27. La construcción de un diagrama fasorial normal, como el de la figura 12.19, permite determinar el ángulo de fase apropiado entre las diversas tensiones y corrientes de línea. Por lo tanto, se determinan las lecturas

$$P_1 = |\mathbf{V}_{AB}|\,|\mathbf{I}_{aA}| \cos(\text{ang } \mathbf{V}_{AB} - \text{ang } \mathbf{I}_{aA})$$
$$= V_L I_L \cos(30^\circ + \theta)$$

y

$$P_2 = |\mathbf{V}_{CB}|\,|\mathbf{I}_{cC}| \cos(\text{ang } \mathbf{V}_{CB} - \text{ang } \mathbf{I}_{cC})$$
$$= V_L I_L \cos(30^\circ - \theta)$$

La proporción entre ellas se calcula mediante:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos(30^\circ + \theta)}{\cos(30^\circ - \theta)} \qquad [5]$$

Si se desarrollan los términos coseno, la ecuación se resuelve con facilidad para $\tan\theta$,

$$\tan\theta = \sqrt{3}\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \qquad [6]$$



De tal modo, las lecturas iguales del wattímetro indican una carga de FP unitario; las lecturas iguales y opuestas señalan una carga puramente reactiva; una lectura de P_2 que es (algebraicamente) mayor que P_1, indica una impedancia inductiva; y una lectura de P_2 menor que P_1 significa una carga capacitiva. ¿Cómo se puede indicar cuál wattímetro lee P_1 y cuál lee P_2? Es cierto que P_1 está en la línea A, y que P_2 se encuentra en la línea C, además, nuestro sistema de secuencia de fase positiva obliga a que V_{an} esté retrasada respecto a V_{cn}. Esta información basta para

diferenciar entre dos wattímetros, pero resulta confuso aplicarla en la práctica. Incluso si no se pudiera distinguir entre los dos, se conoce la magnitud del ángulo de fase pero no su signo, lo cual muchas veces es información suficiente. Si la carga es un motor de inducción, el ángulo debe ser positivo y no es necesario realizar ninguna prueba para determinar cuál lectura es cuál. Si se supone que no hay conocimiento previo de la carga, entonces existen varios métodos para resolver la ambigüedad. Quizás el más simple sea el que implica agregar una carga reactiva de alta impedancia, dígase un capacitor trifásico, a través de la carga desconocida. La carga debe volverse más capacitiva. Por lo tanto, si disminuye la magnitud de $\tan\theta$ (o la magnitud de θ) entonces la carga era inductiva, a la vez que un aumento en la magnitud de $\tan\theta$ significa una impedancia capacitiva original.

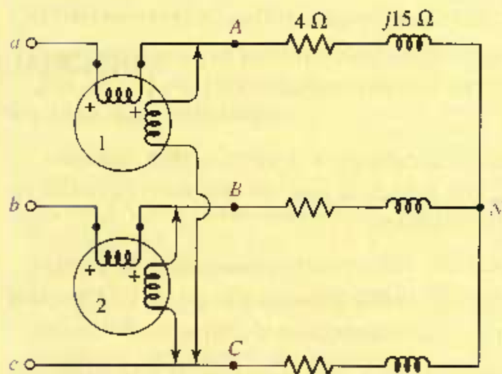
EJEMPLO 12.7

La carga balanceada en la figura 12.28 se alimenta mediante un sistema trifásico balanceado que tiene $\mathbf{V}_{ab} = 230\underline{/0°}$ V rms y una secuencia de fase positiva. Determinar la lectura de cada wattímetro y la potencia activa total consumida por la carga.

La bobina de potencial (de tensión) del wattímetro #1 se conecta para medir la tensión $\mathbf{V}_{ac}$, y su bobina de corriente mide la corriente de fase $\mathbf{I}_{aA}$. Puesto que se sabe utilizar la secuencia de fase positiva, las tensiones de línea son

$$\mathbf{V}_{ab} = 230\underline{/0°} \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bc} = 230\underline{/-120°} \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 230\underline{/120°} \quad \text{V}$$

Observar que $\mathbf{V}_{ac} = -\mathbf{V}_{ca} = 230\underline{/-60°}$ V.



■ **FIGURA 12.28** Sistema trifásico balanceado conectado a una carga trifásica balanceada (equilibrada), cuya potencia activa se mide mediante el método de los dos wattímetros.

La corriente de fase $\mathbf{I}_{aA}$ está dada por la tensión de fase $\mathbf{V}_{an}$ dividida entre la impedancia de fase $4 + j15\ \Omega$,

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{4 + j15} = \frac{(230/\sqrt{3})\underline{/-30°}}{4 + j15}\ \text{A}$$
$$= 8.554\underline{/-105.1°}\ \text{A}$$

(Continúa en la siguiente página)

Se podría calcular ahora la potencia que mide el wattímetro #1 como

$$P_1 = |\mathbf{V}_{ac}|\,|\mathbf{I}_{aA}|\cos(\text{ang }\mathbf{V}_{ac} - \text{ang }\mathbf{I}_{aA})$$
$$= (230)(8.554)\cos(-60° + 105.1°)\text{ W}$$
$$= 1\,389\text{ W}$$

De modo similar, se determina que

$$P_2 = |\mathbf{V}_{bc}|\,|\mathbf{I}_{bB}|\cos(\text{ang }\mathbf{V}_{bc} - \text{ang }\mathbf{I}_{bB})$$
$$= (230)(8.554)\cos(-120° - 134.9°)\text{ W}$$
$$= -512.5\text{ W}$$

En razón de que esta medición originaría que el medidor se pegara a la escala descendente, una de las bobinas necesitaría invertirse para efectuar la lectura.

En consecuencia, la potencia real (activa) que absorbe la carga es

$$P = P_1 + P_2 = 876.5\text{ W}$$

PRÁCTICA

12.10 En el circuito de la figura 12.26, sean las cargas $\mathbf{Z}_A = 25\underline{/60°}\ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = 50\underline{/-60°}\ \Omega$, $\mathbf{Z}_C = 50\underline{/60°}\ \Omega$, $\mathbf{V}_{AB} = 600\underline{/0°}$ V rms con una secuencia de fase (+) y el punto x se ubica en C. Determinar: (*a*) P_A; (*b*) P_B; (*c*) P_C.

Respuesta: 0; 7 200 W; 0.

RESUMEN Y REPASO

- La mayor parte de la producción eléctrica tiene forma de potencia trifásica.
- Casi toda la electricidad residencial en Norteamérica tiene la forma de corriente alterna monofásica, con una frecuencia de 60 Hz y una tensión rms de 115 V.
- Las fuentes trifásicas se pueden conectar en Y o en Δ. Ambos tipos de fuente tienen tres terminales, una para cada fase; las fuentes conectadas en (Y) tienen también una conexión neutra.
- En un sistema trifásico balanceado, cada tensión de fase tiene la misma magnitud, aunque está siempre 120° fuera de fase respecto de las otras dos.
- Las cargas en un sistema trifásico se conectan en Y o en Δ.
- En una fuente balanceada conectada en Y, con secuencia de fase positiva (*abc*) las tensiones de línea son:

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\underline{/30°} \qquad \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\underline{/-90°}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\underline{/-210°}$$

donde las tensiones de fase son:

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\underline{/0°} \qquad \mathbf{V}_{bn} = V_p\underline{/-120°} \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p\underline{/-240°}$$

- En un sistema con carga conectada en Y, las corrientes de línea son iguales a las corrientes de fase.

- En una carga conectada en Δ las tensiones de línea son iguales a las de fase.
- En un sistema balanceado con secuencia de fase positiva y una carga balanceada conectada en Δ las corrientes de línea son

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB}\sqrt{3}\underline{/-30^\circ} \qquad \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{BC}\sqrt{3}\underline{/-150^\circ} \qquad \mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{CA}\sqrt{3}\underline{/+90^\circ}$$

  donde las corrientes de fase corresponden a

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} \qquad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_\Delta} \qquad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_\Delta}$$

- La mayor parte de los cálculos de potencia se efectúan por fase suponiendo un sistema balanceado; de otra manera, el análisis nodal/malla siempre resulta un método válido.
- La potencia en un sistema trifásico (balanceado o desbalanceado) puede medirse con sólo dos wattímetros.
- La potencia instantánea en cualquier sistema trifásico balanceado es constante.

LECTURAS ADICIONALES

Un panorama muy completo de los conceptos acerca de potencia de ca se puede encontrar en el capítulo 2 de:

B.M. Weedy, *Electric Power Systems,* 3a. ed. Chichester, England: Wiley, 1984.

Un libro muy completo acerca de la generación de energía a partir del viento es de:

T. Burton, D. Sharpe, N. Jenkins, y E. Bossanyi, *Wind Energy Handbook.* Chichester, England: Wiley, 2001.

EJERCICIOS

12.1 Sistemas polifásicos

1. Por medio de un voltímetro se mide un circuito construido en el laboratorio, con los resultados $V_{be} = 0.7$ V y $V_{ce} = 10$ V. Determinar V_{bc}, V_{eb}, y V_{cb}.
2. Un amplificador de transistor de efecto de campo de fuente común se simula utilizando SPICE. (*a*) Si $V_{gs} = -1$ V y $V_{ds} = 5$ V, determinar V_{gd}. (*b*) Si $V_{ds} = 4$ V y $V_{gd} = 2.5$ V, determinar V_{sg}.
3. Un sistema de potencia de seis fases se construye como parte de un suministro de potencia magnética de cd de alta tensión. Escribir las tensiones de fase de: (*a*) la secuencia de fase positiva; (*b*) la secuencia de fase negativa.
4. Si $\mathbf{V}_{xy} = 110\underline{/20^\circ}$ V, $\mathbf{V}_{xz} = 160\underline{/-50^\circ}$ V, y $\mathbf{V}_{ay} = 80\underline{/130^\circ}$ V, determinar: (*a*) $\mathbf{V}_{yz}$; (*b*) $\mathbf{V}_{az}$; (*c*) $\mathbf{V}_{zx}/\mathbf{V}_{xy}$.
5. En un circuito particular, se sabe que $\mathbf{V}_{12} = 100\underline{/0^\circ}$, $\mathbf{V}_{45} = 60\underline{/75^\circ}$, $\mathbf{V}_{42} = 80\underline{/120^\circ}$, y $\mathbf{V}_{35} = -j120$, todo en volts. Determinar: (*a*) $\mathbf{V}_{25}$; (*b*) $\mathbf{V}_{13}$.
6. En un sistema de ca en particular, se sabe que $\mathbf{V}_{12} = 9\underline{/87^\circ}$ V y $\mathbf{V}_{23} = 8\underline{/45^\circ}$ V. Calcular (*a*) $\mathbf{V}_{21}$; (*b*) $\mathbf{V}_{32}$; (*c*) $\mathbf{V}_{12} - \mathbf{V}_{32}$.
7. En un sistema de potencia se sabe que $\mathbf{V}_{an} = 400\underline{/-45^\circ}$ V y $\mathbf{V}_{bn} = 400\underline{/75^\circ}$ V. (*a*) Dibujar un diagrama fasorial (vectorial), que incluya $\mathbf{V}_{cn}$. (*b*) ¿Es la secuencia de fase del sistema positivo o negativo? Explicar su respuesta.
8. Dadas las corrientes de ca $\mathbf{I}_{12} = 33\underline{/12^\circ}$ A e $\mathbf{I}_{23} = 40\underline{/12^\circ}$ A, ¿cuál es el valor de $\mathbf{I}_{31}$?
9. Si se sabe que un circuito de ca tiene corrientes $\mathbf{I}_{12} = 5\underline{/55^\circ}$ A e $\mathbf{I}_{23} = 4\underline{/33^\circ}$ A, ¿cuál es el valor de $\mathbf{I}_{31}$ si la frecuencia de operación es de 50 Hz?

12.2 Sistemas monofásicos de tres hilos

10. El sistema de 230/460 V rms 60 Hz y tres hilos, que se muestra en la figura 12.29, suministra potencia a tres cargas: la carga *AN* demanda una potencia compleja de $10\underline{/40^\circ}$ kVA, la carga *NB* consume $8\underline{/10^\circ}$ kVA, y la carga *AB* requiere $4\underline{/-80^\circ}$ kVA. Determinar las dos corrientes, la de línea y la del neutro.

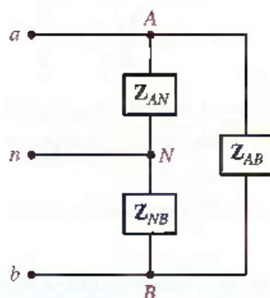


FIGURA 12.29

11. Un sistema monofásico balanceado de tres hilos tiene cargas $\mathbf{Z}_{AN} = \mathbf{Z}_{NB} = 10\ \Omega$, y una carga $\mathbf{Z}_{AB} = 16 + j12\ \Omega$. Puede suponerse que las tres líneas no tienen resistencia. Sea $\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = 120\underline{/0^\circ}$ V. (*a*) Determinar I_{aA} e I_{nN}. (*b*) El sistema se desbalancea (se desequilibra) al conectar otra resistencia de 10 Ω en paralelo con $\mathbf{Z}_{AN}$. Encontrar I_{aA}, I_{bB}, e I_{nN}.

12. Un ineficiente sistema monofásico de tres hilos tiene tensiones de fuente de $\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = 720\underline{/0^\circ}$ V, resistencia de línea $R_{aA} = R_{bB} = 1\ \Omega$ con $R_{nN} = 10\ \Omega$, y cargas $\mathbf{Z}_{AN} = 10 + j3\ \Omega$, $\mathbf{Z}_{NB} = 8 + j2\ \Omega$, y $\mathbf{Z}_{AB} = 18 + j0\ \Omega$. Calcular (*a*) $\mathbf{I}_{aA}$; (*b*) $\mathbf{I}_{nN}$; (*c*) $P_{\text{cableado, total}}$; (*d*) $P_{\text{gen.total}}$.

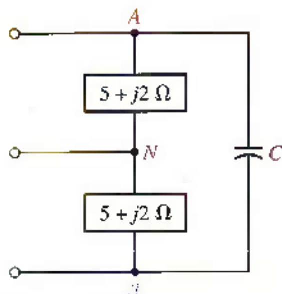


FIGURA 12.30

13. En el sistema monofásico balanceado de tres hilos de la figura 12.30, sea $V_{AN} = 220$ V a 60 Hz. (*a*) ¿Qué tamaño debe tener *C* para proporcionar una carga de factor de potencia unitario? (*b*) ¿Cuántos kVA maneja *C*?

14. El sistema monofásico balanceado de tres hilos de la figura 12.29 tiene tensiones de $\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = 200\underline{/0^\circ}$ V, línea cero y resistencia neutra y cargas $\mathbf{Z}_{AN} = \mathbf{Z}_{NB} = 12 + j3\ \Omega$. Determinar $\mathbf{Z}_{AB}$ de manera que: (*a*) $X_{AB} = 0$ e $I_{aA} = 30$ A rms; (*b*) $R_{AB} = 0$ y ángulo $\mathbf{I}_{aA} = 0^\circ$.

12.3 Conexión Y-Y trifásica

15. La figura 12.31 muestra un sistema trifásico balanceado de tres hilos con secuencia de fase positiva. Sea $\mathbf{V}_{BC} = 120\underline{/60^\circ}$ V y $R_w = 0.6\ \Omega$. Si la carga total (incluyendo la resistencia del alambre) extrae 5 kVA a un PF = 0.8 retrasado, determinar (*a*) la potencia perdida en la resistencia de línea y (*b*) $\mathbf{V}_{an}$.

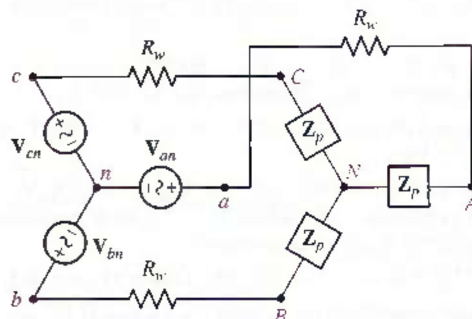


FIGURA 12.31

16. Sea $\mathbf{V}_{an} = 2\,300\underline{/0°}$ V en el sistema balanceado que se muestra en la figura 12.31 y fije $R_w = 2\ \Omega$. Suponer que la secuencia de fase positiva con la fuente suministra una potencia compleja de $\mathbf{S} = 100 + j30$ kVA. Determinar (*a*) $\mathbf{I}_{aA}$; (*b*) $\mathbf{V}_{AN}$; (*c*) $\mathbf{Z}_p$; (*d*) la eficiencia de transmisión.

17. En el sistema trifásico balanceado de la figura 12.31, sea $\mathbf{Z}_p = 12 + j5\ \Omega$ e $\mathbf{I}_{bB} = 20\underline{/0°}$ A con secuencia de fase (+) Si la fuente opera con un factor de potencia de 0.935, determinar : (*a*) R_w; (*b*) $\mathbf{V}_{bn}$; (*c*) $\mathbf{V}_{AB}$; (*d*) la potencia compleja suministrada por la fuente.

18. Un sistema trifásico de tres hilos tiene una carga balanceada conectada en (Y) construida por una resistencia de 75 Ω, una inductancia de 125 mH y una capacitancia de 55 μF en serie desde cada línea hasta el punto neutro. Si se supone la secuencia de fase positiva con $V_p = 125$ V a 60 Hz, calcular la corriente de línea, la potencia activa total suministrada a la carga y el factor de potencia de la carga.

19. Un conductor neutro sin pérdidas se instala entre los nodos *n* y *N* en el sistema trifásico que se muestra en la figura 12.31. Suponer un sistema balanceado con secuencia de fase (+) pero con carga conectada desbalanceada (desequilibrada): $\mathbf{Z}_{AN} = 8 + j6\ \Omega$, $\mathbf{Z}_{BN} = 12 - j16\ \Omega$, y $\mathbf{Z}_{CN} = 5\ \Omega$. Si $\mathbf{V}_{an} = 120\underline{/0°}$ V rms y $R_w = 0.5\ \Omega$, encontrar $\mathbf{I}_{nN}$.

20. En el circuito de la figura 12.31, $\mathbf{V}_{an} = 40\underline{/0°}$ V (secuencia de fase positiva). Determinar la corriente de línea y la potencia activa total entregada a la carga si la impedancia $\mathbf{Z}_p = 5 + j10\ \Omega$ y $R_w =$ (*a*) 0 Ω; (*b*) 3 Ω.

21. La impedancia de fase $\mathbf{Z}_p$ en el sistema que se muestra en la figura 12.31 consiste en una impedancia de $75\underline{/25°}$ Ω en paralelo con una capacitancia de 25 μF. Sea $\mathbf{V}_{an} = 240\underline{/0°}$ V a 60 Hz, y $R_w = 2\ \Omega$. Determinar (*a*) $\mathbf{I}_{aA}$; (*b*) P_{cables}; (*c*) P_{carga}; (*d*) el factor de potencia de la fuente.

22. Cada carga en el circuito de la figura 12.31 está compuesta por una impedancia inductiva de $100\underline{/28°}$ Ω en paralelo con un capacitor de 500 nF. La resistencia R_w vale 1 Ω. Utilizando la secuencia de fase positiva con $\mathbf{V}_{ab} = 240\underline{/0°}$ V a $f = 50$ Hz, determinar el valor rms de la corriente de línea, la potencia total que se entrega a la carga y la potencia que se pierde en el alambrado. Verificar las respuestas con una simulación apropiada con PSpice.

23. El sistema trifásico balanceado que se muestra en la figura 12.31 tiene $R_w = 0\ \Omega$ y $\mathbf{Z}_p = 10 + j5\ \Omega$ por fase. (*a*) ¿A qué factor de potencia opera la fuente? (*b*) Suponiendo $f = 60$ Hz, ¿qué tamaño de capacitor debe colocarse en paralelo con cada impedancia de fase para aumentar el FP hasta 0.93 retrasado? (*c*) ¿Qué cantidad de potencia reactiva consume cada capacitor si la tensión de línea en la carga es igual a 440 V?

24. Cada carga del circuito de la figura 12.31 está compuesta por un inductor de 1.5 H en paralelo con un capacitor de 100 μF y una resistencia de 1 kΩ. La resistencia $R_w = 0\ \Omega$.Utilizando la secuencia de fase positiva con $\mathbf{V}_{ab} = 115\underline{/0°}$V a $f = 60$ Hz, determinar el valor rms de la corriente de línea y la potencia activa total que se entrega a la carga. Verificar sus respuestas con una simulación PSpice apropiada.

12.4 Conexión delta Δ

25. La figura 12.32 muestra un circuito trifásico balanceado de tres hilos. Sean $R_w = 0\ \Omega$ y $\mathbf{V}_{an} = 200\underline{/60°}$ V. Cada fase de la carga absorbe una potencia compleja $\mathbf{S}_p = 2 - j1$ kVA. Si se supone la secuencia de fase (+) determinar: (*a*) $\mathbf{V}_{bc}$; (b) $\mathbf{Z}_p$; (*c*) $\mathbf{I}_{aA}$.

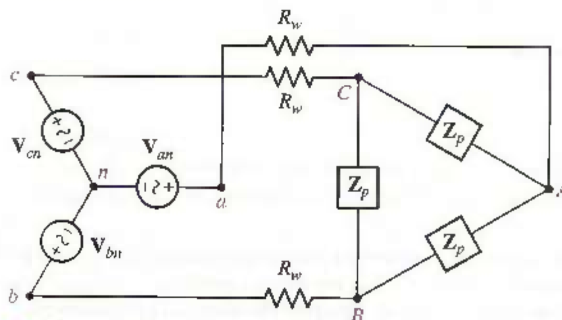


FIGURA 12.32

26. La carga balanceada conectada en Δ de la figura 12.32 requiere 15 kVA con un FP retrasado de 0.8. Suponer una secuencia de fase (+) con $\mathbf{V}_{BC} = 180\underline{/30°}$ V. Si $R_w = 0.75\ \Omega$, calcular (*a*) $\mathbf{V}_{bc}$; (*b*) la potencia compleja total generada por la fuente.
27. La carga en el sistema balanceado de la figura 12.32 consume una potencia compleja total de $3 + j1.8$ kVA, mientras que la fuente genera $3.45 + j1.8$ kVA. Si $R_w = 5\ \Omega$, determinar (*a*) I_{aA}; (*b*) I_{AB}; (*c*) V_{an}.
28. La carga conectada en Δ del circuito de la figura 12.32 demanda 1 800 W con un FP retrasado de $\sqrt{2}/2$, y se pierden 240 W en la resistencia del alambre de $R_w = 2.3\ \Omega$. Calcular el valor rms de la tensión de fase de la fuente y el valor rms de la corriente de fase de la carga.
29. La fuente de la figura 12.33 está balanceada y exhibe una secuencia de fase (+). Determinar (*a*) $\mathbf{I}_{aA}$; (*b*) $\mathbf{I}_{bB}$; (*c*) $\mathbf{I}_{cC}$; (*d*) la potencia compleja total que suministra la fuente.

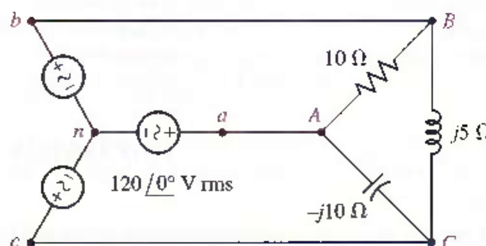


FIGURA 12.33

30. En el circuito que se describe en la figura 12.32, $\mathbf{V}_{AB} = 200\underline{/0°}$ V rms con secuencia de fase (+), $R_w = 200$ mΩ y la impedancia de fase $\mathbf{Z}_p$ se compone de una resistencia de 10 Ω en paralelo con una reactancia inductiva de 30 Ω. Determinar la potencia total que suministra la fuente, el factor de potencia al cual opera y la eficiencia de transmisión.
31. La fuente trifásica balanceada conectada en Y en la figura 12.32 tiene $\mathbf{V}_{an} = 140\underline{/0°}$ V rms con secuencia de fase positiva (+). Sea $R_w = 0\ \Omega$. La carga trifásica balanceada consume 15 kW y +9 kVAR. Obtener (*a*) $\mathbf{V}_{AB}$; (*b*) $\mathbf{I}_{AB}$, (*c*) $\mathbf{I}_{aA}$.
32. En el sistema trifásico de la figura 12.34, suponer una fuente balanceada con una secuencia de fase positiva. Si la frecuencia de operación es de 60 Hz, calcular la magnitud de: (*a*) $\mathbf{V}_{AN}$; (*b*) $\mathbf{V}_{BN}$; (*c*) $\mathbf{V}_{CN}$. Verificar las respuestas con una simulación de PSpice apropiada.

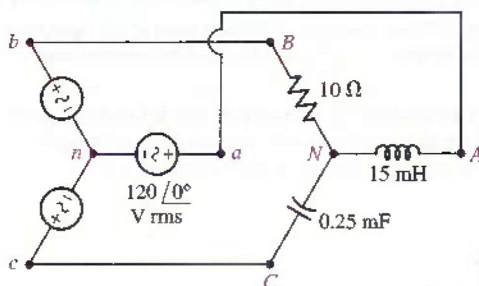


FIGURA 12.34

33. (*a*) Insertar 1 Ω de resistencia en cada una de las líneas de la figura 12.33 y realizar de nuevo el ejercicio 29. (*b*) Verificar la solución con una simulación PSpice apropiada.
34. Un sistema trifásico balanceado, que tiene una tensión de línea de 240 V rms, contiene una carga conectada en Δ de $12 + j$ kΩ por fase y también una carga conectada en Y de $5 + j3$ kΩ por fase. Determinar la corriente de línea, la potencia activa tomada por la carga combinada y el factor de potencia de la carga.

12.5 Medición de potencia en sistemas trifásicos

35. Encontrar la potencia leída por el wattímetro (para ello debe establecer si los hilos de conexión tienen que invertirse o no para obtenerla) en el circuito de la figura 12.35, si las terminales *A* y *B*, respectivamente, se conectan (*a*) *x* y *y*; (*b*) *x* y *z*; (*c*) *y* y *z*.

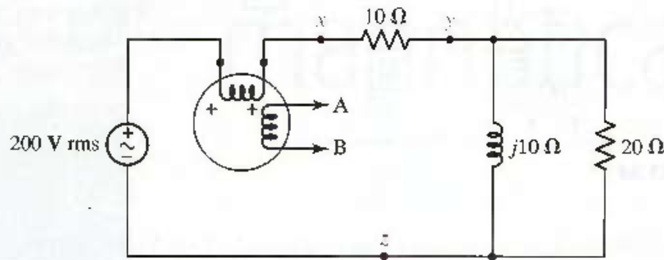


FIGURA 12.35

36. Se conecta un wattímetro en el circuito de la figura 12.36, de manera que $\mathbf{I}_1$ entra en la terminal (+) de la bobina de corriente mientras que $\mathbf{V}_2$ es la tensión de la bobina de potencial (de tensión). Proporcionar la lectura del wattímetro y obtener la solución con una simulación de PSpice apropiada.

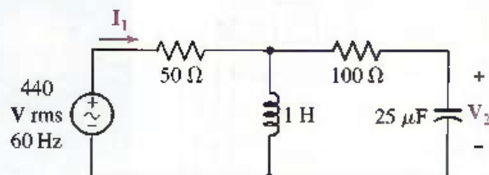


FIGURA 12.36

37. Obtener la lectura dada por el wattímetro conectado en el circuito de la figura 12.37.

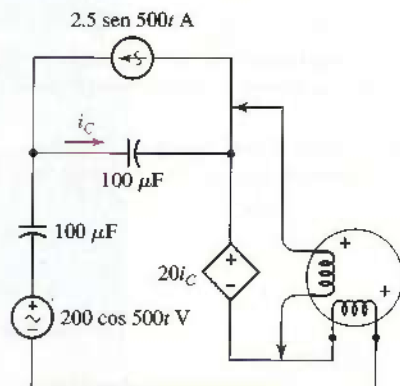


FIGURA 12.37

38. (*a*) Proporcionar ambas lecturas dadas por los wattímetros de la figura 12.38 si $\mathbf{V}_A = 100\underline{/0^\circ}$ V rms, $\mathbf{V}_B = 50\underline{/90^\circ}$ V rms, $\mathbf{Z}_A = 10 - j10\ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = 8 + j6\ \Omega$, y $\mathbf{Z}_C = 30 + j10\ \Omega$. (*b*) ¿La suma de estas lecturas es igual a la potencia activa total tomada por las tres cargas? Verificar las respuestas con una simulación PSpice apropiada.

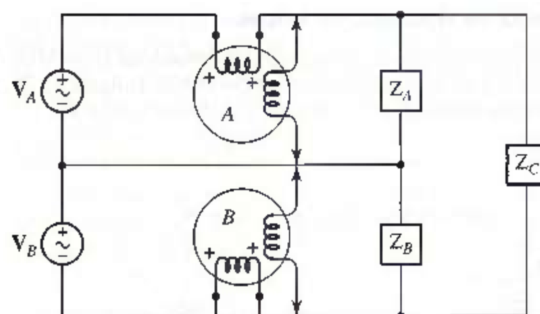


FIGURA 12.38

39. Los valores de los parámetros del circuito de la figura 12.39 son $\mathbf{V}_{ab} = 200\underline{/0°}$, $\mathbf{V}_{bc} = 200\underline{/120°}$, $\mathbf{V}_{ca} = 200\underline{/240°}$ V rms, $\mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}_5 = \mathbf{Z}_6 = 25\underline{/30°}\ \Omega$, $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = 50\underline{/-60°}\ \Omega$. Determinar la lectura dada por cada wattímetro.

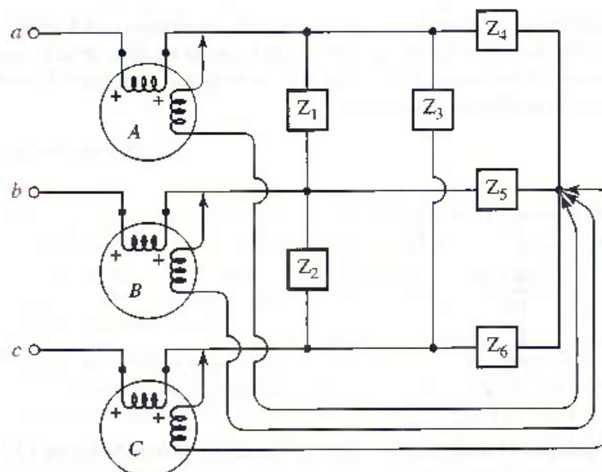


FIGURA 12.39

D 40. En el circuito de la figura 12.32, demostrar cómo podría medirse la potencia activa que absorbe la carga mediante: (*a*) tres wattímetros; (*b*) el método de dos wattímetros.

D 41. En el circuito de la figura 12.31, demostrar cómo podría medirse la potencia activa absorbida por la carga mediante (*a*) tres wattímetros. (*b*) el método de dos wattímetros.

CAPÍTULO 13

Circuitos acoplados magnéticamente

CONCEPTOS CLAVE

- Inductancia mutua.
- Autoinductancia.
- Convención punto.
- Impedancia reflejada o referida.
- Redes T y Π equivalentes.
- Transformador ideal.
- Relación de vueltas de un transformador ideal.
- Acoplamiento de impedancias.
- Ajuste del nivel de tensión.
- Análisis con PSpice de circuitos con transformadores.

INTRODUCCIÓN

Siempre que la corriente fluye a través de un conductor, ya sea de ca o de cd, se genera un campo magnético alrededor de él. En el contexto de los circuitos, uno se refiere a menudo al *flujo magnético* a través de un lazo de alambre, que no es más que la componente normal promedio del campo magnético que emana del lazo, multiplicada por el área del mismo. Cuando un campo magnético variable en el tiempo generado por un lazo penetra un segundo lazo, se induce una tensión entre los extremos de este último. Para distinguir este fenómeno de la "inductancia" que se definió antes, denominada de manera más adecuada "autoinductancia", se definirá un nuevo término: *inductancia mutua.*

No hay un dispositivo tal que sea un "inductor mutuo", pero el principio constituye la base de un dispositivo muy importante: el *transformador*, que consta de dos bobinas de alambre separadas por una pequeña distancia y se utiliza, por lo común, para convertir las tensiones de ca en valores mayores o menores según la aplicación. Todo aparato eléctrico requiere corriente de cd para operar, aunque los enchufes en una toma de corriente de pared de ca emplean un transformador para ajustar los niveles de tensión antes de la *rectificación,* función que efectúan casi siempre los diodos y que se describe en cualquier texto introductorio de electrónica.

13.1 INDUCTANCIA MUTUA

Cuando se definió la inductancia en el capítulo 7, se hizo especificando la relación entre la tensión y la corriente en las terminales

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



donde se tomó en cuenta la convención pasiva de signos. Las bases físicas de tal característica de corriente-tensión se sustentan en dos aspectos:

1. La producción de ***flujo magnético*** por una corriente, que es proporcional a la corriente en inductores lineales.
2. La producción de una tensión por un *campo magnético* variable en el tiempo, proporcional a la tasa de cambio del campo magnético o del flujo magnético.

Coeficiente de inductancia mutua

La inductancia mutua se debe a una ligera extensión de los argumentos anteriores. Una corriente que fluye en una bobina establece un campo magnético en torno a la misma y alrededor también de una segunda bobina cercana. El flujo variable en el tiempo que rodea a la segunda bobina produce una tensión en sus terminales, proporcional a la tasa de cambio en el tiempo de la corriente que fluye por la primera bobina. La figura 13.1*a* muestra un modelo simple de dos bobinas L_1 y L_2, suficientemente próximas una de otra para que el flujo que atraviesa L_1, producto de la corriente $i_1(t)$, establezca una tensión en circuito abierto $v_2(t)$ entre las terminales de L_2. Sin considerar el signo algebraico apropiado de la relación en este momento, se define el *coeficiente de inductancia mutua,* o simplemente ***inductancia mutua***, M_{21}, como

$$v_2(t) = M_{21}\frac{di_1(t)}{dt} \qquad [1]$$

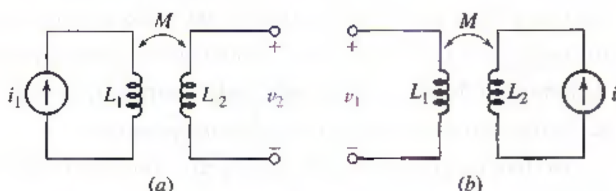


FIGURA 13.1 (*a*) Una corriente i_1 en L_1 produce una tensión, en circuito abierto, v_2 en L_2. (*b*) Una corriente i_2 en L_2 produce una tensión, en circuito abierto, v_1 en L_1.

El orden de los subíndices en M_{21} indica que se produce una respuesta de tensión en L_2 a raíz de una fuente de corriente en L_1. Si se invierte el sistema, como se indica en la figura 13.1*b*, se tiene

$$v_1(t) = M_{12}\frac{di_2(t)}{dt} \qquad [2]$$

Sin embargo, no son necesarios dos coeficientes de inductancia mutua; más adelante se usarán relaciones de energía para probar que M_{12} y M_{21} son iguales, de tal modo que $M_{12} = M_{21} = M$. La existencia del acoplamiento mutuo entre dos bobinas se indica mediante una flecha doble, como en la figura 13.1*a* y *b*.

La inductancia mutua se mide en henrys, y al igual que la resistencia, la inductancia y la capacitancia, es una cantidad positiva.[1] Sin embargo, la tensión $M\,di/dt$, quizás aparezca como una cantidad positiva o negativa, según crezca o no la corriente en un instante específico.

(1) No se supone de manera universal que la inductancia mutua sea positiva. En particular resulta conveniente permitir que "lleve su propio signo" cuando están implicadas tres o más bobinas y cada una interactúa con las otras dos. Se restringirá la atención al caso simple y más importante de dos bobinas.

Convención del punto

El inductor es un elemento de dos terminales y se puede utilizar la convención pasiva de signos para elegir el signo correcto de la tensión $L\,di/dt$ o $j\omega L\mathbf{I}$. Si la corriente entra en la terminal donde se ubica la referencia de tensión positiva, se usa el signo positivo. Sin embargo, no se puede tratar la inductancia mutua exactamente de la misma manera, porque implica cuatro terminales. La elección de un signo correcto se establece mediante el empleo de una de varias posibilidades que incluyen la ***"convención del punto"***, o mediante la inspección de la forma particular en la que se devana cada bobina. Se utilizará la convención del punto y tan sólo se observará con brevedad la construcción física de las bobinas; el empleo de otros símbolos especiales no se requiere cuando sólo se acoplan dos bobinas.

La convención del punto utiliza un gran punto situado en un extremo de cada una de las dos bobinas que se acoplan mutuamente. Se determina el signo de la tensión mutua de la forma siguiente:

> Una corriente que entra a la terminal con *punto* de una bobina, produce una tensión en circuito abierto con una referencia de tensión *positiva* en la terminal con *punto* de la segunda bobina.

De tal modo, en la figura 13.2*a*, i_1 entra en la terminal con punto de L_1, v_2 se mide positiva en la terminal con punto de L_2, y es igual a $M\,di_1/dt$. Se ha visto antes que muchas veces no es posible elegir tensiones o corrientes a lo largo de un *circuito*, de modo que la convención pasiva de signos se satisfaga siempre; la misma situación surge con el acoplamiento mutuo. Por ejemplo, tal vez resulte más conveniente representar a v_2 por medio de una referencia de tensión positiva en la terminal sin punto, como en la figura 13.2*b*; en ese caso $v_2 = -M\,di_1/dt$. Las corrientes que entran a la terminal con punto tampoco se encuentran siempre disponibles, como se indica mediante la figura 13.2*c* y *d*. Se observa entonces que:

> Una corriente que entra a la terminal *sin punto* de una bobina proporciona una tensión que se mide *positivamente* en la terminal *sin punto* de la segunda bobina.

Observar que en el análisis anterior no se incluye ninguna contribución a la tensión de la inductancia propia, la cual ocurriría si i_2 fuera diferente de cero. Se considerará en detalle esta situación, pero es apropiado presentar, primero, un ejemplo rápido.

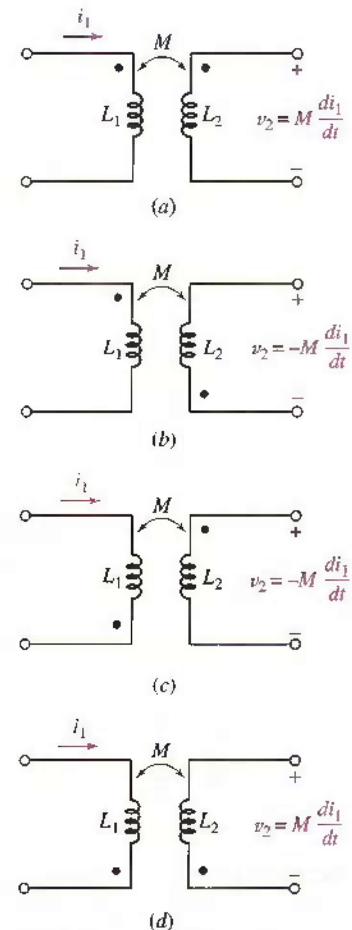


FIGURA 13.2 La corriente que entra en la terminal con punto de una bobina produce una tensión que se mide positiva en la terminal con punto de la segunda bobina. La corriente que entra en la terminal sin punto de una bobina genera una tensión que se mide positiva en la terminal sin punto de la segunda.

EJEMPLO 13.1

En el circuito que se presenta en la figura 13.3, determinar: (*a*) v_1 si $i_2 = 5$ sen $45t$ A e $i_1 = 0$; (*b*) v_2 si $i_1 = -8e^{-t}$ A e $i_2 = 0$.

(*a*) Puesto que la corriente i_2 está entrando en la terminal *sin punto* de la bobina derecha, la referencia positiva de la tensión inducida en la bobina izquierda es la terminal sin punto. Por lo tanto, se tiene una tensión en circuito abierto de

$$v_1 = -(2)(45)(5\cos 45t) = -450\cos 45t \text{ V}$$

que aparece entre las terminales de la bobina izquierda como consecuencia del flujo magnético variable en el tiempo que genera i_2 al circular dentro de

(Continúa en la siguiente página)

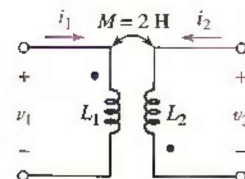


FIGURA 13.3 La convención del punto proporciona una relación entre la terminal a la que entra una corriente en una bobina, así como la referencia de tensión positiva de la otra bobina.

la bobina derecha. Puesto que no fluye corriente a través de la bobina de la izquierda, no hay contribución de la autoinducción a v_1.
(*b*) Ahora se tiene una corriente que entra a la terminal *con punto*, pero v_2 tiene su referencia positiva en la terminal *sin punto*. De tal manera,

$$v_2 = -(2)(-1)(-8e^{-t}) = -16e^{-t} \text{ V}$$

PRÁCTICA

13.1 Suponiendo que $M = 10$ H, con L_2 en circuito abierto, e $i_1 = -2e^{-5t}$ A, calcular la tensión v_2 en: (*a*) la figura 13.2*a*; (*b*) la figura 13.2*b*.

Respuesta: $100e^{-5t}$ V; $-100e^{-5t}$ V.

Tensión combinada de la inducción mutua y de la autoinducción

Sólo se ha considerado la tensión mutua presente en una bobina en *circuito abierto*. En general, una corriente distinta de cero fluirá en cada una de las dos bobinas, así que se generará una tensión mutua en una bobina debido a la corriente que fluye en la otra. *Esta tensión mutua se presenta independientemente y aparte de cualquier tensión de autoinducción*. En otras palabras, la tensión en las terminales de L_1 estará compuesta por dos términos, $L_1\, di_1/dt$ y $M\, di_2/dt$, cada uno con un signo que depende de las direcciones de la corriente, la tensión medida y la ubicación de los dos puntos. En la parte de un circuito, dibujada en la figura 13.4, se muestran las corrientes i_1 e i_2 donde se supone de manera arbitraria que cada una entra a la terminal con punto. La tensión a través de L_1 se compone, por lo tanto, de dos partes:

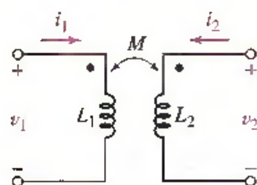


FIGURA 13.4 En razón de que los pares v_1, i_1 y v_2, i_2 satisfacen la convención de signos pasiva, las tensiones de autoinduccción son positivas; dado que i_1 e i_2 entran cada una en terminales con punto y puesto que v_1 y v_2 se miden positivas en las terminales con punto, las tensiones de la inducción mutua también son positivas.

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

al igual que la tensión a través de L_2,

$$v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

En la figura 13.5, las corrientes y las tensiones no se eligen con el fin de obtener todos los términos positivos de v_1 y v_2. Si se inspeccionan sólo los símbolos de referencia de i_1 y v_1, es patente que no se satisface la convención pasiva de signos y que el signo de $L_1\, di_1/dt$ debe, por lo tanto, ser negativo. Se llega a una conclusión idéntica para el término $L_2\, di_2/dt$. Se establece el signo del término mutuo de v_2 inspeccionando la dirección de i_1 y v_2; puesto que i_1 entra en la terminal con punto y v_2 se mide positiva en la terminal con punto, el signo de $M\, di_1/dt$ debe ser positivo. Por último, i_2 entra en la terminal sin punto de L_2, y v_1 se mide positiva en la terminal sin punto de L_1; en consecuencia, la parte mutua de v_1, $M\, di_2/dt$, también debe ser positiva. Así, se tiene que

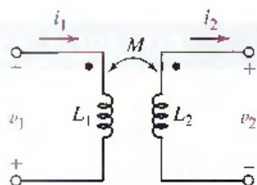


FIGURA 13.5 Debido a que los pares v_1, i_1 y v_2, i_2 no se miden de acuerdo con la convención de signos pasiva, las tensiones de autoinducción son negativas; en razón de que i_1 entra en la terminal con punto y v_2 se mide positiva en la terminal con punto, el término mutuo de v_2 es positivo; y dado que i_2 entra a la terminal sin punto y v_1 se mide positiva en la terminal sin punto, el término mutuo de v_1 también es positivo.

$$v_1 = -L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = -L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

Las mismas consideraciones propician elecciones idénticas de los signos para la excitación mediante una fuente senoidal que opera a la frecuencia angular ω

$$\mathbf{V}_1 = -j\omega L_1\mathbf{I}_1 + j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{V}_2 = -j\omega L_2\mathbf{I}_2 + j\omega M\mathbf{I}_1$$

Bases físicas de la convención del punto

Es posible comprender mejor el simbolismo del punto si se consideran las bases físicas de la convención; el significado de los puntos se interpreta ahora en términos del *flujo magnético*. En la figura 13.6, se presentan dos bobinas devanadas sobre una forma cilíndrica y resulta evidente la dirección de cada devanado. Si se supone que la corriente i_1 es positiva y que crece con el tiempo, el flujo magnético que i_1 produce dentro de la forma cilíndrica tiene una dirección que se podría conocer mediante la regla de la mano derecha: cuando esa mano rodea la bobina con los dedos apuntando en la dirección del flujo de corriente, el pulgar indica la dirección del flujo dentro de la bobina. Así, i_1 produce un flujo que se dirige hacia abajo; dado que i_1 aumenta con el tiempo, el flujo, que es proporcional a i_1, también se incrementa con el tiempo. Considerando ahora la segunda bobina, imaginemos que i_2 es positiva y creciente; la aplicación de la regla de la mano derecha muestra que i_2 produce también un campo magnético que se dirige hacia abajo y que aumenta. Dicho de otro modo, las corrientes supuestas i_1 e i_2 originan *flujos aditivos*.

La tensión entre las terminales de cualquier bobina proviene de la tasa de cambio en el tiempo del flujo dentro de esa bobina. Por lo tanto, la tensión en las terminales de la primera bobina es mayor con i_2 circulando de lo que sería si i_2 fuera cero. Por ello, i_2 induce una tensión en la primera bobina que tiene el mismo sentido que la tensión autoinducida en esa bobina. El signo de la tensión autoinducida se conoce gracias a la convención pasiva de signos que de ese modo permite obtener el signo de la tensión mutua.

La convención del punto sólo permite descartar la construcción física de las bobinas al colocar en una terminal de cada bobina un punto tal que las corrientes que entran a las terminales así marcadas produzcan flujos aditivos. Resulta claro que siempre hay dos posibles ubicaciones para los puntos, pues siempre podrían moverse a los otros extremos de las bobinas y seguirse presentando los flujos aditivos.

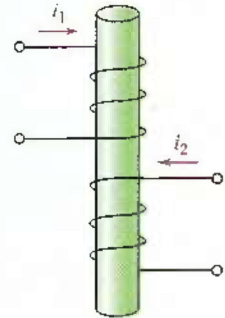


FIGURA 13.6 Construcción física de dos bobinas mutuamente acopladas. A partir de considerar la dirección del flujo magnético que produce cada bobina, se demuestra que los puntos pueden ubicarse en la terminal superior de cada bobina, o en su terminal inferior.

EJEMPLO 13.2

En el caso del circuito que se indica en la figura 13.7*a*, determinar la proporción existente entre la tensión de salida en la resistencia de 400 Ω y la tensión de la fuente.

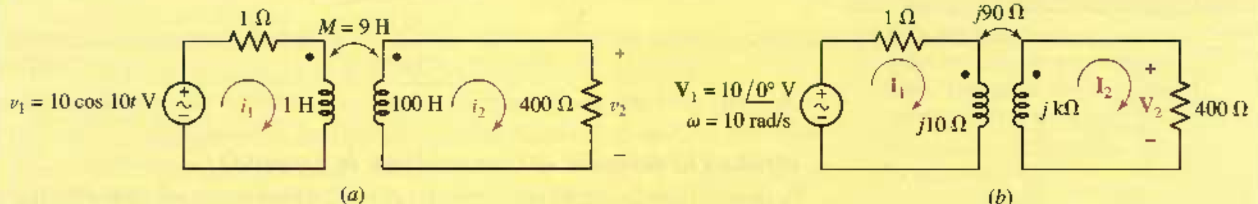


FIGURA 13.7 (*a*) Circuito que contiene inductancia mutua, en el cual se desea obtener la proporción (razón) de tensión $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$. (*b*) La autoinductancia y las inductancias mutuas se sustituyen por las impedancias correspondientes.

Identificar el objetivo del problema.

Se necesita la expresión de $\mathbf{V}_2$. Se dividirá luego entre $10\underline{/0°}$ V.

(Continúa en la siguiente página)

Recopilar la información conocida.
Se comienza sustituyendo 1 H y 100 H por sus correspondientes impedancias, $j10\ \Omega$ y $j\ \mathrm{k}\Omega$, respectivamente (figura 13.7*b*). También se sustituye la inductancia mutua de 9 H por $j\omega M = j90\ \Omega$.

Elaborar un plan.
El análisis de malla tal vez sea un buen método, ya que se tiene un circuito con dos mallas perfectamente definidas. Una vez que se encuentre $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_2$ es simplemente 400 $\mathbf{I}_2$.

Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.
En la malla izquierda, el signo del término mutuo se determina aplicando la convención del punto. Puesto que $\mathbf{I}_2$ entra en la terminal sin punto de L_2, la tensión mutua en L_1 debe tener la referencia positiva en la terminal sin punto. Por lo tanto,

$$(1 + j10)\mathbf{I}_1 - j90\mathbf{I}_2 = 10\underline{/0^\circ}$$

Puesto que $\mathbf{I}_1$ entra a la terminal marcada con punto, el término mutuo de la malla derecha tiene su referencia (+) en la terminal con punto del inductor de 100 H. Por lo tanto, se podría escribir

$$(400 + j1\,000)\mathbf{I}_2 - j90\mathbf{I}_1 = 0$$

Determinar si se requiere información adicional.
Existen dos ecuaciones con dos incógnitas, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. Luego de resolver para las dos corrientes, la tensión de salida $\mathbf{V}_2$ se obtendría al multiplicar $\mathbf{I}_2$ por 400 Ω.

Buscar la solución.
Después de resolver estas dos ecuaciones con una calculadora científica, se tiene

$$\mathbf{I}_2 = 0.172\underline{/-16.70^\circ}\ \text{A}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{400(0.172\underline{/-16.70^\circ})}{10\underline{/0^\circ}}$$
$$= 6.880\underline{/-16.70^\circ}$$

Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?
Se observa que la tensión de salida $\mathbf{V}_2$ es en realidad mayor en magnitud que la tensión de entrada $\mathbf{V}_1$. ¿Se debe esperar siempre este resultado? La respuesta es negativa. Como se verá en secciones posteriores, el transformador se construye para lograr ya *sea* una reducción *o* un aumento de tensión. Sin embargo, se efectúa una estimación rápida a fin de encontrar al menos un límite superior e inferior para la respuesta. Si la resistencia de 400 Ω se

sustituye por un cortocircuito, $\mathbf{V}_2 = 0$. Si en vez de eso se sustituye la resistencia de 400 Ω por un circuito abierto, $\mathbf{I}_2 = 0$ y, en consecuencia,

$$\mathbf{V}_1 = (1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1$$

y

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1$$

Al resolver, se sabe que el valor máximo que se esperaría para $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ es $8.955\underline{/5.711^\circ}$. De tal modo, la respuesta al menos parece razonable.

La tensión de salida del circuito de la figura 13.7*a* es mayor en magnitud que la tensión de entrada, por lo que se logra una ganancia de tensión con este tipo de circuito. También resulta interesante considerar esta proporción (razón) de tensiones como una función de ω.

Para determinar $\mathbf{I}_2(j\omega)$ en relación con este circuito particular, se escriben las ecuaciones de malla en términos de la frecuencia angular no especificada ω:

$$(1 + j\omega)\,\mathbf{I}_1 \qquad - j\omega 9\,\mathbf{I}_2 = 10\underline{/0^\circ}$$

y

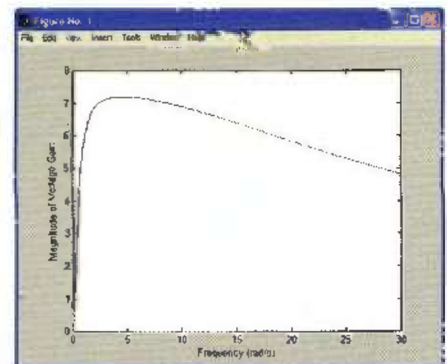
$$-j\omega 9\,\mathbf{I}_1 + (400 + j\omega 100)\,\mathbf{I}_2 = 0$$

Al resolver por sustitución, se observa que

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j90\omega}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

De tal manera, se obtiene la proporción (razón) entre la tensión de salida y la de entrada como una función de la frecuencia angular ω

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{400\mathbf{I}_2}{10}$$
$$= \frac{j\omega 3\,600}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$



■ **FIGURA 13.8** La ganancia de tensión $|\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1|$ del circuito que se muestra en la figura 13.7*a* se grafica como una función de ω mediante el siguiente programa de MATLAB:

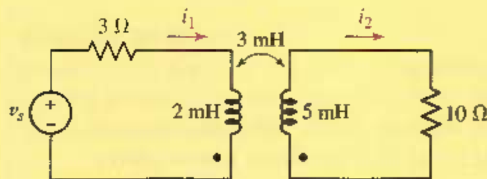
```
>> w = linspace(0,30,1000);
>> num = j*w*3600;
>> for indx = 1:1000
den = 400 + j*500*w(indx) – 19*w(indx)*w(indx);
gain(indx) = num(indx)/den;
end
>> plot(w, abs(gain));
>> xlabel('Frequency (rad/s)');
>> ylabel('Magnitude of Voltage Gain');
```

Esta proporción (razón), denominada algunas veces ***función de transferencia del circuito,*** se grafica en la figura 13.8 y tiene una magnitud máxima de casi 7 cerca de una frecuencia de 4.6 rad/s. Sin embargo, para frecuencias muy pequeñas o muy grandes, la magnitud de la función de transferencia es menor que la unidad.

El circuito sigue siendo pasivo, salvo la fuente de tensión, y la *ganancia de tensión* no debe interpretarse en forma errónea como una *ganancia de potencia*. En $\omega = 10$ rad/s, la ganancia de tensión es igual a 6.88, pero la fuente de tensión ideal, que tiene una tensión de terminal de 10 V, entrega una potencia total de 8.07 W, de la cual sólo 5.94 W llegan a la resistencia de 400 Ω. La proporción entre la potencia de salida y la de la fuente, que se puede definir como ***ganancia de potencia,*** es entonces 0.736.

PRÁCTICA

13.2 En el caso del circuito de la figura 13.9, escribir ecuaciones de malla apropiadas para la malla izquierda y la malla derecha, si $v_s = 20e^{-1\,000t}$ V.

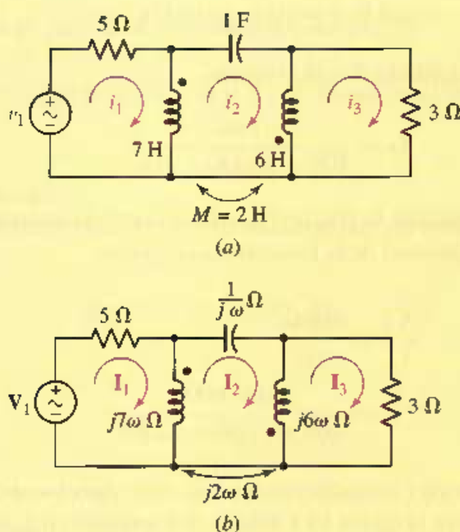


■ **FIGURA 13.9**

Respuesta: $20e^{-1\,000t} = 3i_1 + 0.002\,di_1/dt - 0.003\,di_2/dt$; $10i_2 + 0.005di_2/dt - 0.003\,di_1/dt = 0$.

EJEMPLO 13.3

Escribir el conjunto completo de ecuaciones del circuito de la figura 13.10*a*.



■ **FIGURA 13.10** (*a*) Circuito de tres mallas con acoplamiento mutuo. (*b*) La capacitancia de 1 F así como la autoinductancia y la inductancia mutua, se sustituyen por sus impedancias correspondientes.

El circuito contiene tres mallas y ya se han asignado las tres corrientes de malla. También en este caso, el primer paso consiste en sustituir tanto la inductancia mutua como las dos autoinductancias por sus impedancias correspondientes, como en la figura 13.10*b*. Al aplicar la ley de Kirchhoff de tensión en la primera malla, se asegura un signo positivo para el término mutuo al elegir

$(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2)$ como la corriente que pasa por la segunda bobina. Por lo tanto,

$$5\mathbf{I}_1 + 7j\omega(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 2j\omega(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) = \mathbf{V}_1$$

o

$$(5 + 7j\omega)\mathbf{I}_1 - 9j\omega\mathbf{I}_2 + 2j\omega\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1 \qquad [3]$$

La segunda malla requiere dos términos de autoinductancia y dos términos de inductancia mutua. La ecuación no puede escribirse con descuido. Se obtiene

$$7j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + 2j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + \frac{1}{j\omega}\mathbf{I}_2 + 6j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + 2j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$

o

$$-9j\omega\mathbf{I}_1 + \left(17j\omega + \frac{1}{j\omega}\right)\mathbf{I}_2 - 8j\omega\mathbf{I}_3 = 0 \qquad [4]$$

Por último, en el caso de la tercera malla,

$$6j\omega(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + 2j\omega(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 3\mathbf{I}_3 = 0$$

o

$$2j\omega\mathbf{I}_1 - 8j\omega\mathbf{I}_2 + (3 + 6j\omega)\mathbf{I}_2 = 0 \qquad [5]$$

Las ecuaciones [3] a [5] se resuelven mediante cualquiera de los métodos convencionales.

PRÁCTICA

13.3 En el caso del circuito de la figura 13.11, escribir una ecuación de malla apropiada en términos de las corrientes fasoriales $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ para: (*a*) la malla izquierda; (*b*) la malla derecha.

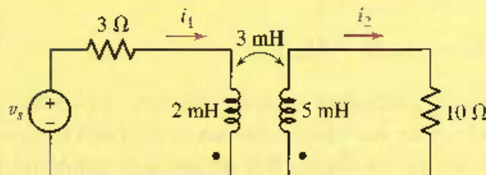
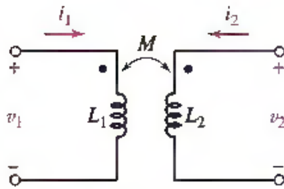


FIGURA 13.11

Respuestas: $\mathbf{V}_s = (3 + j10)\mathbf{I}_1 - j15\mathbf{I}_2$; $0 = -j15\mathbf{I}_1 + (10 + j25)\mathbf{I}_2$.

13.2 CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS

Piénsese en la energía que se almacena en un par de inductores mutuamente acoplados. El resultado será de utilidad de diferentes maneras. Se justificará primero el supuesto de que $M_{12} = M_{21}$, y luego se podrá determinar el máximo valor posible de la inductancia mutua entre los dos inductores dados.



■ **FIGURA 13.12** Par de bobinas acopladas con inductancia mutua de $M_{12} = M_{21} = M$.

Igualdad de M_{12} y M_{21}

En el par de bobinas acopladas que se ilustra en la figura 13.12 se señalan las corrientes, las tensiones y los puntos de polaridad. Para demostrar que $M_{12} = M_{21}$, se empieza igualando a cero todas las corrientes y las tensiones, con lo cual se establece como cero la energía inicial almacenada en la red. Luego se pone en circuito abierto el par de terminales del derecho y se incrementa i_1 desde cero hasta cierto valor constante I_{cd} en el tiempo $t = t_1$. La potencia que entra a la red desde la izquierda en cualquier instante es

$$v_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1$$

además, la potencia que entra desde la derecha equivale a

$$v_2 i_2 = 0$$

puesto que $i_2 = 0$.

La energía almacenada dentro de la red cuando $i_1 = I_1$ es, por lo tanto,

$$\int_0^{t_1} v_1 i_1\, dt = \int_0^{I_1} L_1 i_1\, di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Se mantiene ahora i_1 constante, ($i_1 = I_1$), y se permite que i_2 cambie desde cero en $t = t_1$, hasta algún valor constante I_2 en $t = t_2$. En ese caso, la energía que entrega la fuente del lado derecho es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2 i_2\, dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2\, di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Sin embargo, aun cuando el valor de i_1 permanece constante, la fuente del lado izquierdo también entrega energía a la red durante tal intervalo

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1 i_1\, dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{12} \frac{di_2}{dt} i_1\, dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

La energía total almacenada en la red, cuando i_1 e i_2 han alcanzado valores constantes, está dada por

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

Ahora bien, se podrían establecer las mismas corrientes finales en esta red lo que permitiría que las corrientes alcancen sus valores finales en el orden inverso; esto es, si se aumenta primero i_2 desde cero hasta I_2 y después se mantiene I_2 constante mientras i_1 crece desde cero hasta I_1. Si se calcula la energía total almacenada en este experimento, el resultado que se encontrará será

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

La única diferencia es el intercambio de las inductancias mutuas M_{21} y M_{12}. Sin embargo, las condiciones inicial y final en la red son las mismas, y por ello los dos valores de la energía almacenada deben resultar idénticos. Por lo tanto,

$$M_{12} = M_{21} = M$$

y

$$W = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \qquad [6]$$

Si una corriente entra a la terminal marcada con punto, al tiempo que la otra sale de una terminal marcada con punto, se invierte el signo de la energía mutua:

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 - M I_1 I_2 \quad [7]$$

Aunque las ecuaciones [6] y [7] se obtuvieron al considerar los valores finales de las dos corrientes como constantes, dichas "constantes" pueden tener cualquier valor, así que las expresiones de energía representan de manera correcta la energía que se almacena cuando los valores *instantáneos* de i_1 e i_2 son I_1 e I_2, respectivamente. En otras palabras, los símbolos en minúscula podrían también utilizarse sin ningún problema:

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2}L_2 [i_2(t)]^2 \pm M [i_1(t)] [i_2(t)] \quad [8]$$

El único supuesto sobre el que se basa la ecuación [8] es el establecimiento lógico del nivel de referencia de energía cero, cuando ambas corrientes son cero.

Establecimiento del límite superior de *M*

Se podría utilizar ahora la ecuación [8] para establecer un límite superior correspondiente al valor de M. Puesto que $w(t)$ representa la energía que se almacena dentro de la red *pasiva*, no puede ser negativa para cualesquier valor de i_1, i_2, L_1, L_2, o M. Supóngase primero que i_1 e i_2 son positivas o negativas; por lo tanto, su producto resulta positivo. Según la ecuación [8], el único caso en el que la energía tal vez sería negativa es

$$w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$$

que se escribiría, al completar el cuadrado, como

$$w = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L_1}i_1 - \sqrt{L_2}i_2\right)^2 + \sqrt{L_1 L_2}i_1 i_2 - M i_1 i_2$$

Debido a que en realidad la energía no puede ser negativa, tampoco es viable que lo sea el lado derecho de esta ecuación. Sin embargo, el primer término quizá sea tan pequeño como cero, por lo que se tiene la restricción de que no es posible que la suma de los dos últimos términos sea negativa. Por consiguiente,

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M$$

o

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad [9]$$

Por lo tanto, existe un límite superior de la posible magnitud de la inductancia mutua, que no será mayor a la media geométrica de las inductancias de las dos bobinas entre las cuales existe la inductancia mutua. Si bien se ha obtenido esta desigualdad con el supuesto de que i_1 e i_2 portan el mismo signo algebraico, es factible un desarrollo similar si los signos son opuestos; sólo se requiere elegir el signo positivo en la ecuación [8].

También podría haberse demostrado la validez de la desigualdad [9] a partir de una consideración física del acoplamiento magnético. Si se piensa que i_2 es cero y que la corriente i_1 establece el enlace de flujo magnético que vincula tanto a L_1 como a L_2, resulta evidente que el flujo dentro de L_2 no es mayor que el flujo dentro de L_1, el cual representa el flujo total. En consecuencia, desde un punto de vista cualitativo hay un límite superior para la magnitud de la inductancia mutua posible entre dos inductores determinados.

Coeficiente de acoplamiento

El grado con el cual M se acerca a su valor máximo se describe mediante el ***coeficiente de acoplamiento***, definido como

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad [10]$$

Puesto que $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$,

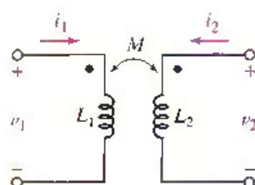
$$0 \leq k \leq 1$$



Los valores más grandes del coeficiente de acoplamiento se obtienen con bobinas que están físicamente más próximas, las que se devanan u orientan para proporcionar un flujo magnético común mayor, o que se les fija una trayectoria común a través de un material que sirve para concentrar y localizar el flujo magnético (un material de alta permeabilidad). Se dice que las bobinas que tienen un coeficiente de acoplamiento cercano a la unidad están *estrechamente acopladas*.

EJEMPLO 13.4

En la figura 13.13, sean $L_1 = 0.4$ H, $L_2 = 2.5$ H, $k = 0.6$, e $i_1 = 4i_2 = 20\cos(500t - 20°)$ mA. Evaluar las siguientes cantidades en $t = 0$: (*a*) i_2; (*b*) v_1; (*c*) la energía total almacenada en el sistema.



■ **FIGURA 13.13** Dos bobinas con un coeficiente de acoplamiento de 0.6, $L_1 = 0.4$ H y $L_2 = 2.5$ H.

(*a*) $i_2(t) = 5\cos(500t - 20°)$ mA, por lo que $i_2(0) = 5\cos(-20°) = 4.698$ mA.

(*b*) Para determinar el valor de v_1, es necesario incluir las contribuciones tanto de la autoinductancia de la bobina 1 como de la inductancia mutua de la bobina 2. Por consiguiente, prestando atención a la convención del punto, se tiene

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

A fin de evaluar esta cantidad, se necesita el valor de M, el cual se obtiene de la ecuación [10]:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.6\sqrt{(0.4)(2.5)} = 0.6 \text{ H}$$

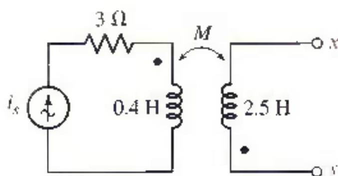
Así, $v_1(0) = 0.4[-10\text{sen}(-20°)] + 0.6[-2.5\,\text{sen}(-20°)] = 1.881$ V.

(*c*) La energía total se determina sumando la energía almacenada en cada inductor, la cual tiene tres componentes independientes puesto que se sabe que dos bobinas estarán acopladas magnéticamente. Debido a que ambas corrientes entran a la terminal "con punto", se tiene

$$w(t) = \tfrac{1}{2}L_1[i_1(t)]^2 + \tfrac{1}{2}L_2[i_2(t)]^2 + M[i_1(t)][i_2(t)]$$

Sabiendo, del inciso (*a*) que $i_2(0) = 4.698$ mA e $i_1(0) = 4i_2(0) = 18.79$ mA, se observa que la energía total almacenada en las dos bobinas en $t =$ corresponde a 151.2 μJ.

PRÁCTICA



■ **FIGURA 13.14**

13.4 Sea $i_s = 2\cos 10t$ A en el circuito de la figura 13.14, calcular la energía total almacenada en la red pasiva en $t = 0$ si $k = 0.6$ y las terminales x y y se dejan: (*a*) en circuito abierto; (*b*) en cortocircuito.

Respuesta: 0.8 J; 0.512 J.

13.3 EL TRANSFORMADOR LINEAL

Ya se puede aplicar el conocimiento del acoplamiento magnético a la descripción de dos dispositivos prácticos específicos, cada uno de los cuales puede representarse por un modelo que contiene inductancia mutua. Ambos dispositivos son transformadores, un término que se definiría como una red que contiene dos o más bobinas que se acoplan magnéticamente (figura 13.15) de manera deliberada. En esta sección se analiza el transformador lineal, que constituye un modelo excelente del transformador lineal práctico que se utiliza a frecuencias de radio o a frecuencias superiores. En la sección siguiente se considerará al transformador ideal, un modelo idealizado de acoplamiento unitario de un transformador físico que tiene un núcleo hecho de algún material magnético, casi siempre una aleación de hierro.

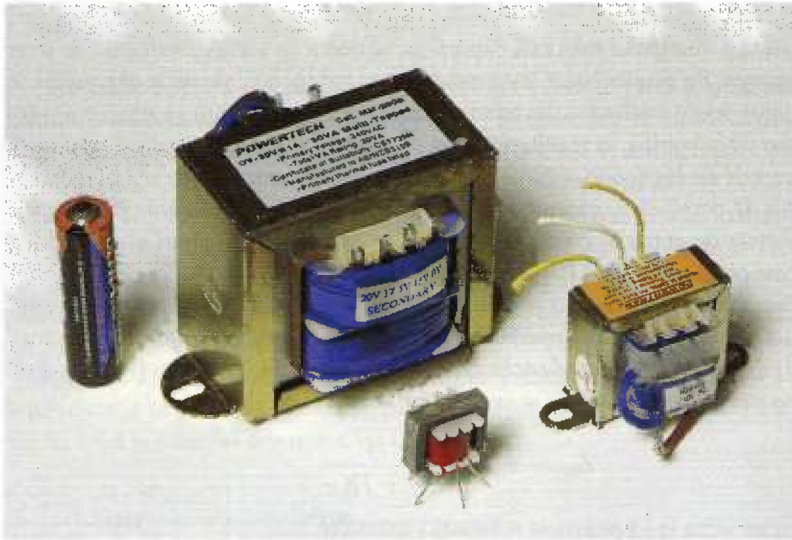


FIGURA 13.15 Selección de pequeños transformadores para su uso en aplicaciones de la electrónica; se muestra una batería tamaño AA para efectos de poder observar la escala.

En la figura 13.16 se muestra un transformador con dos corrientes de malla identificadas. La primera malla, que a menudo contiene la fuente, recibe el nombre de ***primario***; en tanto que la segunda, que suele contener la carga, se conoce como el ***secundario***. Los inductores marcados como L_1 y L_2 también se conocen como el primario y el secundario, respectivamente, del transformador. Se supondrá que el transformador es *lineal*, lo que implica que no se emplea ningún material magnético (que puede provocar una relación no *lineal* entre el flujo y la corriente). Sin embargo, sin un material de este tipo, resulta difícil conseguir un coeficiente de acoplamiento superior a unos cuantos décimos. Las dos resistencias sirven para explicar la resistencia del alambre (incluyendo la de los embobinados), a partir del cual se devanan las bobinas del primario y del secundario, y cualesquiera otras pérdidas.

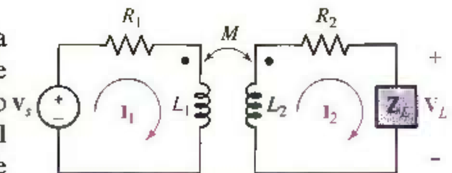


FIGURA 13.16 Transformador lineal que contiene una fuente en el circuito primario y una carga en el circuito secundario. La resistencia se incluye también tanto en el primario como en el secundario.

Impedancia reflejada (referida)

Sea la impedancia de entrada que se presenta en las terminales del circuito primario. Las dos ecuaciones de malla son

$$\mathbf{V}_s = (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad [11]$$

y

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L)\mathbf{I}_2 \qquad [12]$$

Se puede simplificar al definir

$$\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L$$

por lo que

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad [13]$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \qquad [14]$$

Despejando de la segunda ecuación $\mathbf{I}_2$ y sustituyendo el resultado en la primera ecuación, se puede encontrar la impedancia de entrada, esto es,

$\mathbf{Z}_{ent}$ es la impedancia vista por la bobina primaria del transformador.

$$\mathbf{Z}_{ent} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{Z}_{11} - \frac{(j\omega)^2 M^2}{\mathbf{Z}_{22}} \qquad [15]$$

Antes de manipular más esta expresión, se deducen varias conclusiones muy interesantes. En primer lugar, este resultado es independiente de la ubicación de los puntos sobre cualquier devanado, pues si cualquier punto se mueve al otro extremo de la bobina, el resultado es un cambio en el signo de cada término que incluye a M en las ecuaciones de [11] a [14]. Este mismo efecto se obtendría al sustituir M por $(-M)$, aunque un cambio así no tiene posibilidad de afectar la impedancia de entrada, como lo confirma la ecuación [15]. También se podría observar en la ecuación [15] que la impedancia de entrada es ni más ni menos que $\mathbf{Z}_{11}$, si el acoplamiento se reduce hasta cero. Cuando el acoplamiento aumenta a partir de cero, la impedancia de entrada difiere de $\mathbf{Z}_{11}$ por una cantidad $\omega^2 M^2/\mathbf{Z}_{22}$, llamada ***impedancia reflejada o referida***. La naturaleza de este cambio resulta más evidente si se desarrolla esta expresión:

$$\mathbf{Z}_{ent} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}}$$

y se racionaliza la impedancia reflejada (referida)

$$\mathbf{Z}_{ent} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + \frac{-j\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

Puesto que $\omega^2 M^2 R_{22}/(R_{22}^2 + X_{22}^2)$ debe ser positiva, resulta evidente que la presencia del secundario aumenta las pérdidas en el circuito primario. En otras palabras, su presencia podría tomarse en cuenta en el primario y aumentar el valor de R_1. Además, la reactancia que refleja el secundario en el circuito primario tiene un signo que es opuesto al de X_{22}, la reactancia neta alrededor del lazo secundario. Esta reactancia X_{22} es la suma de ωL_2 y X_L; ésta es necesariamente positiva para cargas inductivas, y positiva o negativa para cargas capacitivas, según la magnitud de la reactancia de la carga.

PRÁCTICA

13.5 Los valores de los elementos de cierto transformador lineal son $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $L_1 = 2$ mH, $L_2 = 10$ mH, y $M = 4$ mH. Si $\omega = 5000$ rad/s, determinar $\mathbf{Z}_{ent}$ para $\mathbf{Z}_L$ igual a: (*a*) 10 Ω; (*b*) $j20\ \Omega$; (*c*) $10 + j20\ \Omega$; (*d*) $-j20\ \Omega$.

Respuestas: $5.32 + j2.74\ \Omega$; $3.49 + j4.33\ \Omega$; $4.24 + j4.57\ \Omega$; $5.56 - j2.82\ \Omega$.

Redes equivalentes T y Π

A menudo resulta conveniente sustituir un transformador por una red equivalente en la forma de T o Π. Si se separan las resistencias respectivas del primario y del secundario del transformador, sólo queda el par de inductores acoplados mutuamente, como se muestra en la figura 13.17. Observar que las dos terminales inferiores del transformador se conectan entre sí para formar una red de tres terminales. Se efectúa lo anterior debido a que ambas redes equivalentes son también redes de tres terminales. Las ecuaciones diferenciales que describen este circuito son, también en este caso,

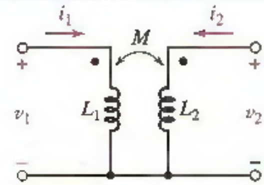


FIGURA 13.17 Transformador particular que se debe sustituir por una red equivalente Π o T.

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad [16]$$

y

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} \qquad [17]$$

La forma de estas dos ecuaciones es familiar y se interpreta con facilidad en términos del análisis de malla. Se elige una i_1 en dirección de las manecillas del reloj y una i_2 en el sentido contrario, de manera que i_1 e i_2 resulten por completo identificables con las corrientes de la figura 13.17. Los términos $M\,di_2/dt$ en la ecuación [16] y $M\,di_1/dt$ en la ecuación [17], indican que ambas mallas deben tener entonces una *autoinductancia* común M. En razón de que la inductancia total alrededor de la malla izquierda es L_1, se requiere incorporar una autoinductancia de $L_1 - M$ en la primera malla, pero no en la segunda. De modo similar, se necesita una autoinductancia de $L_2 - M$ en la segunda malla, pero no en la primera. La red equivalente resultante se presenta en la figura 13.18 y la equivalencia se garantiza mediante pares idénticos de ecuaciones que relacionan v_1, i_1, v_2, e i_2 para las dos redes.

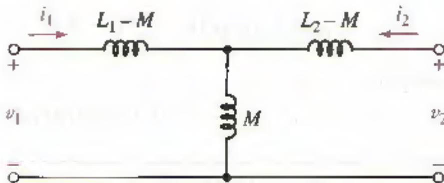


FIGURA 13.18 Circuito equivalente en T del transformador que se muestra en la figura 13.17.

Si cualquiera de los puntos en los devanados de un transformador dado se ponen sobre el extremo opuesto de su bobina, será negativo el signo de los términos mutuos de las ecuaciones [16] y [17], lo cual es análogo a reemplazar M por $-M$. Además, con una sustitución de este tipo en la red de la figura 13.18 se obtiene el equivalente correcto de este caso. Los tres valores de autoinductancia serían entonces $L_1 + M$, $-M$, y $L_2 + M$.

Las inductancias en el equivalente T son autoinductancias; no se presenta inductancia mutua. Es posible que se obtengan valores negativos de inductancia para el circuito equivalente, aunque esto no tiene importancia si el único deseo es un análisis matemático; la construcción real de la red equivalente es, desde luego, imposible en cualquier forma que implique una inductancia negativa. Sin embargo, hay ocasiones en las que con los procedimientos relativos a la síntesis de redes para proporcionar una función de transferencia deseada se determinan circuitos que contienen una red en T con una inductancia negativa, la cual podría realizarse mediante un transformador lineal apropiado.

EJEMPLO 13.5

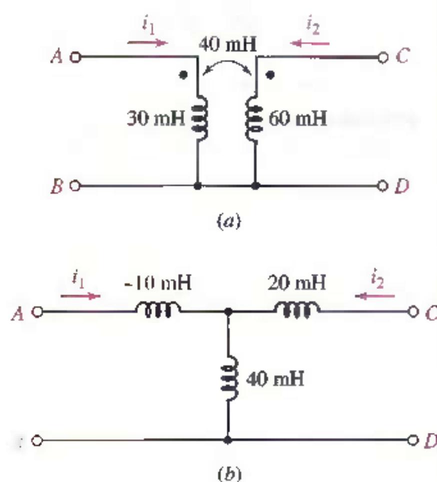


FIGURA 13.19 (*a*) Transformador lineal utilizado como ejemplo. (*b*) Red equivalente en T del transformador.

Determinar el circuito equivalente en T del transformador lineal que se muestra en la figura 13.19*a*.

Se identifican $L_1 = 30$ mH, $L_2 = 60$ mH, y $M = 40$ mH; asimismo, se observa que los puntos se encuentran en las terminales superiores, del mismo modo que en el circuito básico de la figura 13.17.

Por consiguiente, $L_1 - M = -10$ mH está en el brazo izquierdo superior, $L_2 - M = 20$ mH se ubica en el derecho superior y el ramo del centro contiene $M = 40$ mH. El circuito equivalente completo en T se muestra en la figura 13.19*b*.

Para demostrar la equivalencia, se dejan las terminales *C* y *D* en circuito abierto y se aplica $v_{CD} = 10\cos 100t$ V a la entrada, en la figura 13.19*a*. De tal modo,

$$i_1 = \frac{1}{30 \times 10^{-3}} \int 10\cos(100t)\,dt = 3.33\,\text{sen}\,100t \text{ A}$$

y

$$v_{CD} = M\frac{di_1}{dt} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100\cos 100t$$
$$= 13.33\cos 100t \qquad \text{V}$$

Aplicando la misma tensión en el equivalente T, se descubre que

$$i_1 = \frac{1}{(-10+40) \times 10^{-3}} \int 10\cos(100t)\,dt = 3.33\,\text{sen}\,100t \qquad \text{A}$$

también en este caso. Asimismo, la tensión en *C* y *D* equivale a la tensión en el inductor de 40 mH. De tal modo,

$$v_{CD} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100\cos 100t = 13.33\cos 100t \qquad \text{V}$$

y las dos redes producen resultados iguales.

PRÁCTICA

13.6 (*a*) Si las dos redes que se presentan en la figura 13.20 son equivalentes, especificar los valores de L_x, L_y, y L_z. (*b*) Repetir el ejercicio suponiendo ahora que el punto en el secundario de la figura 13.20*b* se localiza en la parte inferior de la bobina.

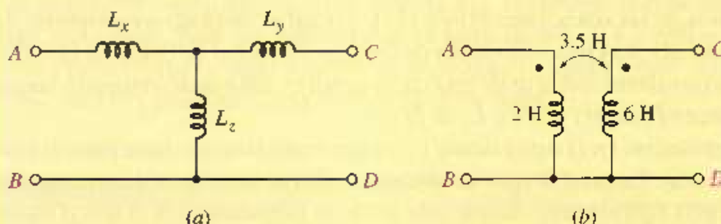


FIGURA 13.20

Respuestas: −1.5, 2.5, 3.5 H; 5.5, 9.5, −3.5 H.

La red en Π equivalente no se obtiene con tanta facilidad, ya que es más complicada y no se utiliza mucho. Se elaborará resolviendo la ecuación [17] para

di_2/dt y sustituyendo el resultado en la ecuación [16]:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

o

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} v_1 - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} v_2$$

Si se integra ahora desde 0 hasta t, se obtiene

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1\, dt' - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2\, dt' \qquad [18]$$

De modo similar, también se tiene

$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1\, dt' + \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2\, dt' \qquad [19]$$

Las ecuaciones [18] y [19] se interpretan como un par de ecuaciones nodales; debe instalarse una fuente de corriente de escalón en cada nodo para proporcionar las condiciones iniciales adecuadas. Los factores que multiplican cada integral tienen la misma forma general de inversas de ciertas inductancias equivalentes. Por lo tanto, el segundo coeficiente de la ecuación [18], $M/(L_1 L_2 - M^2)$, es $1/L_B$, o el recíproco de las inductancias que se extienden entre los nodos 1 y 2, como el que se muestra en la red en Π equivalente de la figura 13.21. Así,

$$L_B = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M}$$

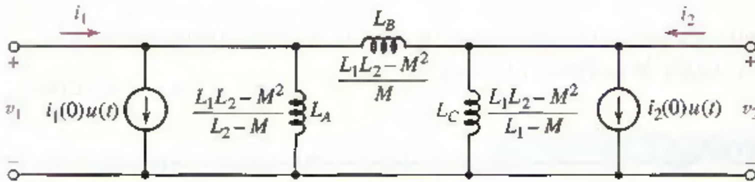


FIGURA 13.21 Red en Π que es equivalente al transformador de la figura 13.17.

El primer coeficiente en la ecuación [18], $L_2/L_1 L_2 - M^2$, es $1/L_A + 1/L_B$. En consecuencia,

$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2}$$

o

$$L_A = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M}$$

Por último,

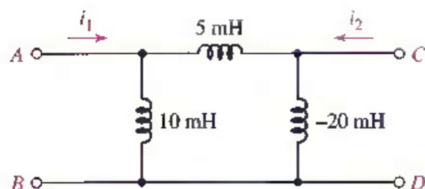
$$L_C = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M}$$

Ningún acoplamiento magnético se presenta entre los inductores en la Π equivalente, y las corrientes iniciales en las tres *autoinductancias* son iguales a cero.

Se podría compensar la inversión de cualquier punto en el transformador determinado con tan sólo cambiar el signo de M en la red equivalente. Además, del mismo modo que las encontramos en la T equivalente, quizás aparezcan autoinductancias negativas en la red en Π equivalente.

EJEMPLO 13.6

Determinar la red en Π equivalente del transformador de la figura 13.19*a*, suponiendo corrientes iniciales iguales a cero.



■ **FIGURA 13.22** Equivalente en Π del transformador lineal que se presentó en la figura 13.19*a*. Se supone que $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.

Puesto que el término $L_1L_2 - M^2$ es común a L_A, L_B, y L_C, se empieza evaluando esta cantidad, con lo cual se obtiene

$$30 \times 10^{-3} \times 60 \times 10^{-3} - (40 \times 10^{-3})^2 = 2 \times 10^{-4}\ \mathrm{H}^2$$

De esta manera:

$$L_A = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_2 - M)} = \frac{2 \times 10^{-4}}{(20 \times 10^{-3})} = 10\ \mathrm{mH}$$

$$L_C = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_1 - M)} = -20\ \mathrm{mH}$$

y

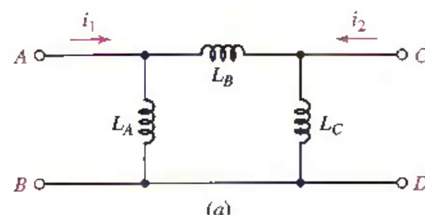
$$L_B = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{M} = 5\ \mathrm{mH6}$$

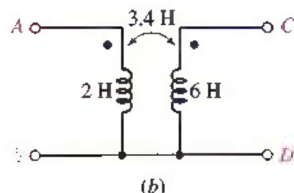
La red en Π equivalente se muestra en la figura 13.22.

Si se verifica de nuevo el resultado obtenido cuando $v_{AB} = 10\cos 100t$ V con las terminales *C-D* en circuito abierto, se obtiene de inmediato la tensión de salida mediante una división de tensión:

$$v_{CD} = \frac{-20 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} - 20 \times 10^{-3}} 10\cos 100t = 13.33\cos 100t \qquad \mathrm{V}$$

como antes. Por lo tanto, la red en la figura 13.22 es eléctricamente equivalente a las redes de la figura 13.19*a* y *b*.





■ **FIGURA 13.23**

PRÁCTICA

13.7 Si las redes en la figura 13.23 son equivalentes, especificar los valores (en mH) de L_A, L_B, y L_C.

Respuesta: $L_A = 169.2$ mH, $L_B = 129.4$ mH, $L_C = -314.3$ mH.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

La capacidad para simular circuitos que contienen inductancias acopladas magnéticamente es una función útil, sobre todo con la continua reducción de las dimensiones de los circuitos modernos. Cuando varios lazos y lazos parciales de conductores se juntan en nuevos diseños, los diversos circuitos y subcircuitos que se pretenden aislar mutuamente se acoplan de manera inadvertida a través de campos magnéticos parásitos e interactúan entre sí. PSpice permite incorporar este efecto mediante la componente **K_Linear**, que enlaza un par de inductores en el diagrama mediante un coeficiente de acoplamiento k en el intervalo $0 \leq k \leq 1$.

Por ejemplo, simular el circuito de la figura 13.19*a*, que consta de dos bobinas cuyo acoplamiento se describe mediante una inductancia mutua de $M = 40$ mH, correspondiente a un coeficiente de acoplamiento de $k = 0.9428$. El diagrama del circuito básico se presenta en la figura 13.24. Observar que no aparece un "punto" al lado de los símbolos del inductor. Cuando se coloca primero en forma horizontal en el diagrama, la terminal con punto se ubica a la izquierda, en torno a la cual se gira el símbolo. Nótese también que el componente **K_Linear** no está "alambrado" en ninguna parte del diagrama; su ubicación es arbitraria. Los dos inductores acoplados, **L1** y **L2**, se especifican junto con el coeficiente de acoplamiento mediante la ventana de diálogo del componente.

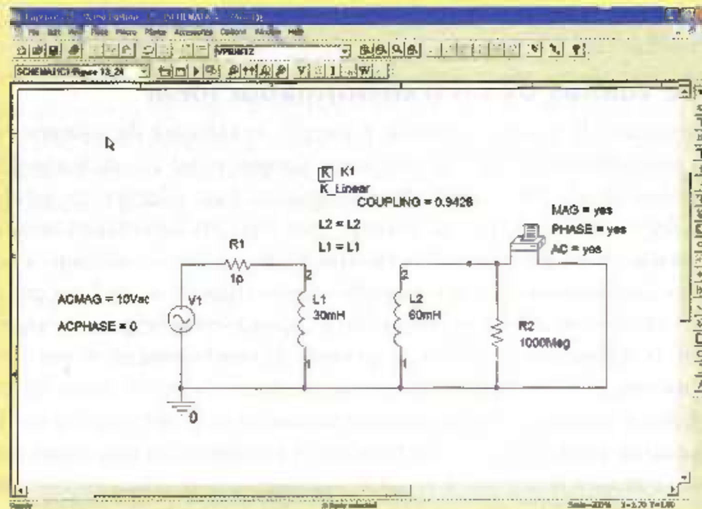


FIGURA 13.24 Diagrama del circuito basado en la figura 13.19*a*.

El circuito se conecta a una fuente de tensión senoidal de 100 rad/s (15.92 Hz) un hecho que se incorpora mediante un barrido ca a una frecuencia dada. También se requiere agregar las dos resistencias al diagrama para que PSpice lleve a cabo la simulación sin generar un mensaje de error. Primero, se inserta una pequeña resistencia en serie entre la fuente de tensión y L1; se eligió un valor de 1 pΩ para minimizar sus efectos. Segundo, se conectó a L2 una resistencia de 1 000 MΩ (infinito, en esencia). La salida de la simulación tiene una magnitud en tensión de 13.33 V y un ángulo de fase de -3.819×10^{-8} grados (esencialmente cero), lo que concuerda con los valores que se calcularon a mano en el ejemplo 13.5.

PSpice proporciona también dos modelos de transformador diferentes, uno lineal, **XFRM_LINEAR,** y uno ideal **XFRM_NONLINEAR**, un elemento de circuito que es el tema de la siguiente sección. El transformador lineal requiere que los valores se especifiquen para el coeficiente de acoplamiento y para ambas inductancias de bobina. El transformador ideal necesita también un coeficiente de acoplamiento, aunque, como se verá, un transformador *ideal* tiene valores de inductancia infinitos o casi infinitos. Por lo tanto, los parámetros restantes requeridos para la parte **XFRM_NONLINEAR** son el número de vueltas de alambre que tiene cada bobina.

13.4 EL TRANSFORMADOR IDEAL

Un ***transformador ideal*** constituye una aproximación útil a un transformador acoplado de forma muy estrecha, en el que el coeficiente de acoplamiento es en esencia la unidad y en el que las reactancias inductivas del primario y del secundario son muy grandes en comparación con las impedancias de la terminación. Tales características se obtienen con mucha precisión mediante la mayor parte de los transformadores de núcleo de hierro bien diseñados, sobre un intervalo razonable de frecuencias para un intervalo razonable de impedancias a nivel terminal. El análisis aproximado de un circuito que contiene un transformador de núcleo de hierro podría lograrse con mucha facilidad sustituyéndolo por un transformador ideal, que podría pensarse como un modelo de primer orden de un transformador de núcleo de hierro.

Relación de vueltas de un transformador ideal

Con el transformador ideal surge un nuevo concepto: la ***relación de número de vueltas*** a. La autoinductancia de una bobina es proporcional al cuadrado del número de vueltas de alambre que forman la bobina. Esta relación es válida sólo si todo el flujo establecido por la corriente que fluye en las bobinas enlaza a todas las vueltas. Para formular este resultado de manera cuantitativa se requiere utilizar conceptos de campo magnético, tema que no se incluye en la explicación del análisis de circuitos. Sin embargo, quizá sea suficiente un argumento cualitativo. Si una corriente i fluye a través de una bobina de N vueltas, entonces el flujo magnético de una sola vuelta se reproducirá N veces. Si se considera que las N vueltas son coincidentes una con la otra, entonces la totalidad del flujo abarca a todas las vueltas. Cuando la corriente y el flujo cambian con el tiempo, se induce una tensión en cada *vuelta* que es N veces mayor que la ocasionada por una bobina de una sola vuelta. De tal modo, la tensión inducida en la *bobina de N vueltas* debe ser N^2 veces la tensión de una sola vuelta. A partir de lo anterior, se origina la proporcionalidad entre la inductancia y el cuadrado del número de vueltas. Se concluye que:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = a^2 \qquad [20]$$

o

$$\boxed{a = \frac{N_2}{N_1}} \qquad [21]$$

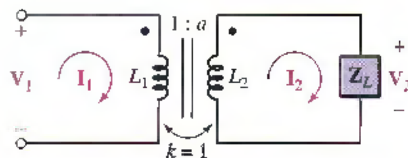


FIGURA 13.25 Transformador ideal que se conecta a una impedancia de carga general.

La figura 13.25 presenta un transformador ideal al que se conecta una carga secundaria. La naturaleza ideal del transformador se establece mediante varias convenciones: el uso de líneas verticales entre las dos bobinas para indicar las laminaciones de hierro presentes en muchos transformadores con núcleo de este metal, el valor unitario del coeficiente de acoplamiento y la presencia del símbolo 1:a, lo que sugiere una relación de vueltas de N_1 a N_2.

Se analiza este transformador en el estado senoidal permanente para interpretar los supuestos en el contexto más simple. Las dos ecuaciones de malla son

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad [22]$$

y

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_L + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 \qquad [23]$$

Se determinan primero la impedancia de entrada de un transformador ideal. Al resolver la ecuación [23] para $\mathbf{I}_2$ y sustituir en la ecuación [22], se obtiene

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 j\omega L_1 + \mathbf{I}_1 \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

y

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

Puesto que $k = 1$, $M^2 = L_1 L_2$, se tiene entonces

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

Además del coeficiente de acoplamiento unitario, otra característica de un transformador ideal es una impedancia demasiado grande tanto en las bobinas del primario como del secundario, sin que importe la frecuencia de operación. Lo anterior sugiere que el caso ideal sería que L_1 y L_2 tendieran al infinito. Sin embargo, su proporción debe permanecer finita, según se especifica mediante la relación de vueltas. De tal manera,

$$L_2 = a^2 L_1$$

lo cual lleva a

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1}$$

Si se deja ahora que L_1 se vuelva infinita, ambos términos del lado derecho de la expresión anterior también lo hacen, de modo que el resultado es indeterminado. Por lo tanto, se requiere combinar primero estos dos términos:

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{j\omega L_1 \mathbf{Z}_L - \omega^2 a^2 L_1^2 + \omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} \qquad [24]$$

o

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{j\omega L_1 \mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} = \frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L / j\omega L_1 + a^2} \qquad [25]$$

Ahora bien, cuando $L_1 \to \infty$, se observa que $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$ se convierte en:

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{Z}_L}{a^2} \qquad [26]$$

para $\mathbf{Z}_L$ finita.

Este resultado tiene algunas implicaciones interesantes y al menos una de ellas parece contradecir una de las características del transformador lineal. La impedancia de entrada de un transformador ideal es proporcional a la impedancia de carga, con la constante de proporcionalidad igual al recíproco del cuadrado de la relación de vueltas. En otras palabras, si la impedancia de *carga* es capacitiva, entonces la impedancia de *entrada* también resulta capacitiva. Sin embargo, en el transformador lineal, la impedancia reflejada o referida sufrió un cambio de signo en su parte reactiva; una carga capacitiva proporciona una contribución inductiva a la impedancia de entrada. La explicación de este hecho se obtiene al reconocer primero que $\mathbf{Z}_L / a^2$ no es la impedancia reflejada (referida), si bien a menudo se denomina de manera inexacta mediante ese nombre. La verdadera impedancia reflejada es infinita en el transformador ideal; de otra manera no podría

"cancelar" la impedancia infinita de la inductancia primaria; tal cancelación ocurre en el numerador de la ecuación [24]. La impedancia $\mathbf{Z}_L/a^2$ representa un término pequeño que corresponde a la cantidad mediante la que no ocurre una cancelación exacta. La verdadera impedancia reflejada (referida) en el transformador ideal sí cambia de signo en su parte reactiva; sin embargo, cuando las respectivas inductancias del primario y del secundario se vuelven infinitas, el efecto de la reactancia infinita de la bobina del primario y de la reactancia reflejada (referida) infinita, pero negativa, de la bobina del secundario se cancela.

Por lo tanto, la primera característica importante del transformador ideal es su capacidad para cambiar la magnitud de una impedancia, o para cambiar el nivel de impedancia. Un transformador ideal que tiene 100 vueltas en el primario y 10 000 vueltas en el secundario presenta una relación de vueltas de 10 000/100, o 100. Cualquier impedancia puesta a lo largo del secundario aparece reducida (o referida) en magnitud en las terminales del primario por un factor de 100^2 o 10 000. Una resistencia de 20 000 Ω se observa como de 2 Ω, un inductor de 200 mH se mira como 20 μH, y un capacitor de 100 pF se ve como de 1 μF. Si se intercambian los devanados del primario y del secundario, entonces $a = 0.01$ y la impedancia de carga al parecer se incrementa en magnitud. En la práctica, este cambio exacto en la magnitud no siempre sucede, pues se debe recordar que al efectuar el último paso en nuestra deducción y dejar que L_1 se volviera infinita en la ecuación [25], fue necesario pasar por alto $\mathbf{Z}_L$, en comparación con $j\omega L_2$. Puesto que L_2 nunca puede ser infinita, resulta evidente que el modelo del transformador ideal será inválido si las impedancias de carga son muy grandes.

Uso de transformadores para el acoplamiento de impedancia

Un ejemplo práctico del uso de un transformador con núcleo de hierro como un dispositivo para cambiar el nivel de impedancia se presenta en el acoplamiento de un amplificador de potencia de audio de bulbo de vacío con un sistema de altavoz (bocinas). Para alcanzar una transferencia de potencia máxima, se sabe que la resistencia de la carga debe ser igual a la resistencia interna de la fuente; el altavoz o bocina suele tener una magnitud de impedancia (supuesta muchas veces como una resistencia) de sólo unos cuantos ohms, en tanto que el amplificador de potencia por lo común posee una resistencia interna de varios miles de ohms. Así, se requiere un transformador ideal en el que $N_2 < N_1$. Por ejemplo, si la impedancia interna del amplificador (o generador) corresponde a 4 000 Ω y la impedancia del altavoz es 8 Ω, entonces se desea que

$$\mathbf{Z}_g = 4\,000 = \frac{\mathbf{Z}_L}{a^2} = \frac{8}{a^2}$$

o

$$a = \frac{1}{22.4}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{N_1}{N_2} = 22.4$$

Existe una relación simple entre las corrientes del primario y del secundario, respectivamente $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ en un transformador ideal. De acuerdo con la ecuación [23], se tiene

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

También en este caso se deja que L_2 se vuelva infinita, así que se puede concluir que

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

o

$$\boxed{\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{a}} \qquad [27]$$

Por lo tanto, la proporción (o razón) entre las corrientes respectivas del primario y del secundario es la relación (o razón) de número de vueltas. Si se tiene que $N_2 > N_1$, entonces $a > 1$, de modo que es patente que circula una corriente mayor en el devanado con menor número de vueltas. En otras palabras,

$$N_1\mathbf{I}_1 = N_2\mathbf{I}_2$$



Asimismo, debe señalarse que la relación (o razón) de corrientes es el *negativo* de la relación de vueltas si cualquier corriente se invierte o se cambia la localización de cualquier punto.

En el ejemplo en el que se usó un transformador ideal para cambiar el nivel de impedancia a fin de acoplar de manera eficiente un altavoz con un amplificador de potencia, una corriente rms de 50 mA a 1 000 Hz en el primario provoca una corriente rms de 1.12 A a 1 000 Hz en el secundario. La potencia suministrada al altavoz es igual a $(1.12)^2(8)$, o 10 W, y la potencia que el amplificador de potencia entrega al transformador corresponde a $(0.05)^2 4\,000$, o 10 W. El resultado es reconfortante, pues el transformador ideal no contiene ni un dispositivo activo que pueda generar potencia, ni ninguna resistencia que pueda absorberla.

Uso de transformadores en el ajuste del nivel de tensión

Dado que la potencia que se entrega al transformador ideal es idéntica a la suministrada a la carga, siempre que las corrientes del primario y del secundario se relacionan por la relación (o razón) de número de vueltas, debe parecer razonable que las tensiones respectivas del primario y del secundario también deban vincularse con esa misma relación. Si se define la tensión del secundario, o tensión de carga, como

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_L$$

y la tensión del primario como la tensión en L_1, entonces

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \mathbf{I}_1\frac{\mathbf{Z}_L}{a^2}$$

La proporción (razón) de las dos tensiones se vuelve entonces

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = a^2\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}$$

o

$$\boxed{\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = a = \frac{N_2}{N_1}} \qquad [28]$$



La razón entre la tensión del secundario y la del primario es igual a la relación del número de vueltas. Debe observarse con cuidado que esta ecuación es opuesta a la [27], pues lo anterior es una fuente común de errores en los estudiantes. La razón también puede ser negativa si se invierte alguna tensión, o si se cambia cualquier ubicación de punto.

Por lo tanto, al elegir sólo la relación (o razón) de número de vueltas, se puede ahora cambiar cualquier tensión de ca en cualquier otra tensión de ca. Si $a > 1$, la tensión del secundario será mayor que la del primario, de modo que el artefacto será lo que se denomina por lo general un ***transformador elevador***. Si $a < 1$, la tensión del secundario será menor que la del primario, se tendría un ***transformador reductor***. Las compañías eléctricas casi siempre generan potencia a una tensión en el intervalo de 12 a 25 kV. Aunque es una tensión bastante grande, las pérdidas de transmisión a largas distancias se reducen a través del aumento del nivel de tensión hasta varios cientos de miles de volts mediante un transformador elevador (figura 13.26*a*); después dicha tensión se reduce a varias decenas de kilovolts en las subestaciones de distribución de potencia locales, mediante transformadores reductores (figura 13.26*b*). También se ubican transformadores reductores adicionales fuera de los edificios, a fin de reducir la tensión desde la tensión de transmisión hasta el nivel de 110 o 220 V requerido para operar maquinaria (figura 13.26*c*).

Al combinar las relaciones (razones) de corrientes y de tensiones, o sea las ecuaciones [27] y [28], se obtiene

$$\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1\mathbf{I}_1$$

y se observa que los voltamperes del primario y del secundario son iguales. La magnitud de este producto suele especificarse como un valor máximo permisible en los transformadores de potencia. Si la carga tiene un ángulo de fase θ, o sea

$$\mathbf{Z}_L = |\mathbf{Z}_L|\underline{/\theta}$$

entonces $\mathbf{V}_2$ adelanta a $\mathbf{I}_2$ en un ángulo θ. Además, la impedancia de entrada es $\mathbf{Z}_L/a^2$, y por ello $\mathbf{V}_1$ también adelanta a $\mathbf{I}_1$ por el mismo ángulo θ. Si dejamos que la tensión y la corriente representen valores rms, entonces $|\mathbf{V}_2|\ |\mathbf{I}_2| \cos\theta$ debe ser igual a $|\mathbf{V}_1|\ |\mathbf{I}_1| \cos\theta$, de modo que toda la potencia entregada en las terminales del primario llega a la carga; el transformador no absorbe ni libera (suministra) ninguna potencia.

Las características del transformador ideal, que se determinaron en su totalidad mediante el análisis fasorial, son en verdad válidas en el estado senoidal permanente, pero no hay razón para creer que sean correctas para la respuesta *completa*. En la actualidad, a menudo se aplican y la demostración de que esta afirmación es válida, resulta mucho más simple que el análisis basado en fasores que justamente se acaba de terminar. Sin embargo, el análisis sirvió para señalar las aproximaciones específicas que deben hacerse mediante un modelo más exacto de un transformador real, a fin de obtener un transformador ideal. Por ejemplo, se vio que la reactancia del devanado secundario necesita ser mucho mayor en magnitud que la impedancia de cualquier carga que se conecte al secundario. De ese modo se logra cierta sensación de que se obtienen ciertas condiciones de operación en las que el transformador deja de comportarse como un transformador ideal.



(*a*)



(*b*)

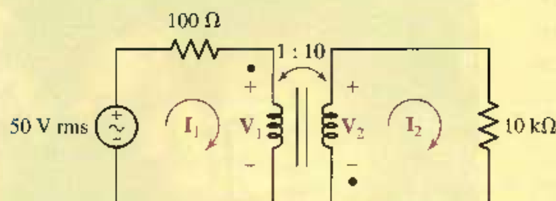


(*c*)

FIGURA 13.26 (*a*) Transformador elevador que se utiliza para incrementar la tensión de salida del generador para la transmisión. (*b*) Transformador de subestación empleado para reducir la tensión desde el nivel de transmisión de 220 kV hasta varias decenas de kilovolts para distribución local. (*c*) Transformador reductor que se utiliza para reducir el nivel de tensión de distribución hasta 240 V para consumo eléctrico. Fotos cortesía del Dr. Wade Enright, Te Kura Pukaha Vira O Te Whare Wananga O Waitaha, Aotearoa.

EJEMPLO 13.7

En el caso del circuito de la figura 13.27, determinar la potencia promedio (activa) que se disipa en la resistencia de 10 kΩ.



■ **FIGURA 13.27** Circuito de un transformador ideal simple.

La potencia promedio (activa) disipada por la resistencia de 10 kΩ es, simplemente,

$$P = 10000|\mathbf{I}_2|^2$$

La fuente de 50 V rms "percibe" (ve) una impedancia de entrada del transformador de $\mathbf{Z}_L/a^2$ o 100 Ω. De tal modo, se obtiene

$$\mathbf{I}_1 = \frac{50}{100 + 100} = 250 \text{ mA rms}$$

A partir de la ecuación [27], $\mathbf{I}_2 = (1/a)\mathbf{I}_1 = 25$ mA rms, por lo que se puede ver que la resistencia de 10 kΩ disipa 6.25 W.

En este ejemplo se pasan por alto los ángulos de fase, pues no afectan el cálculo de la potencia promedio (activa) disipada por una carga puramente resistiva.

PRÁCTICA

13.8 Repetir el ejemplo 13.7 utilizando tensiones para calcular la potencia disipada.

Respuesta: 6.25 W.

Relaciones de tensión en el dominio del tiempo

Ahora se determinará la forma en que se relacionan las cantidades en el dominio del tiempo v_1 y v_2 en el transformador ideal. Volviendo al circuito de la figura 13.17 y a las ecuaciones [16] y [17] que lo describen, se resolvería la segunda ecuación para di_2/dt y se sustituirá en la primera

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2}v_2 - \frac{M^2}{L_2}\frac{di_1}{dt}$$

Sin embargo, para acoplamiento unitario ($k = 1$), $M^2 = L_1L_2$, se tiene

$$v_1 = \frac{M}{L_2}v_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}v_2 = \frac{1}{a}v_2$$

Así, la relación entre la tensión del primario y la del secundario se determina al aplicar la respuesta completa en el dominio del tiempo.

APLICACIÓN PRÁCTICA

El transformador superconductor (o supraconductor)

En casi todos los casos, se pasan por alto los diversos tipos de pérdidas que pueden presentarse en un transformador particular. Sin embargo, cuando se trabaja con grandes transformadores de potencia se requiere prestar gran atención a estas pérdidas, a pesar de eficiencias totales que, por lo general, llegan a 97% o más. Si bien esta gran eficiencia puede considerarse como un valor casi ideal, quizá represente una gran cantidad de energía desperdiciada cuando el transformador maneja varios miles de amperes de corriente. Las llamadas pérdidas i^2R (pronunciado "*i* cuadrada *R*") representan potencia disipada como calor, las cuales pueden incrementar la temperatura de las bobinas de los transformadores. La resistencia del alambre aumenta con la temperatura, por lo que el calentamiento sólo conduce a la obtención de pérdidas mayores. Además, las altas temperaturas producen la degradación del aislamiento del alambre, lo cual da lugar a una vida de servicio más corta del transformador. En consecuencia, muchos transformadores de potencia modernos utilizan un baño de aceite líquido que elimina el exceso de calor de sus bobinas; sin embargo, este procedimiento tiene varias desventajas en las que se incluyen el impacto ambiental y el peligro de incendio por derramamiento de aceite como resultado de la corrosión con el tiempo (figura 13.28).



FIGURA 13.28 Incendio que sucedió en el año 2004 en la subestación de energía eléctrica estadounidense de 340 000 V cerca de Mishawaka, Indiana.

Un medio factible para mejorar el desempeño de estos artefactos consiste en utilizar alambre superconductor para sustituir las bobinas resistivas de un diseño de transformador normal. Los superconductores son materiales que resisten altas temperaturas, pero que de repente no muestran resistencia al flujo de corriente, una vez que se alcanza una temperatura crítica. En el caso de la mayor

Una expresión que relaciona la corriente del primario y la del secundario en el dominio del tiempo se obtiene con mayor facilidad dividiendo la ecuación [16] entre L_1,

$$\frac{v_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1}\frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} + a\frac{di_2}{dt}$$

Para recurrir luego a una de las hipótesis implícitas en el transformador ideal: L_1 debe ser infinita. Si se supone que v_1 no es infinita, entonces

$$\frac{di_1}{dt} = -a\frac{di_2}{dt}$$

Integrando, se tiene

$$i_1 = -ai_2 + A$$

parte de los elementos, tal temperatura crítica es sólo unos cuantos grados superior al cero absoluto, de modo que se requiere de enfriamiento criogénico muy costoso basado en helio líquido. Sin embargo, con el descubrimiento en los ochenta de los superconductores cerámicos que tienen temperaturas críticas del orden de 90 K (−183°C) y más elevadas, fue posible sustituir el equipo criogénico basado en helio por sistemas de nitrógeno líquido.

La figura 13.29 muestra el prototipo de un transformador superconductor con núcleo parcial desarrollado en la Universidad de Canterbury. Este diseño emplea nitrógeno líquido, elemento que es benigno para el medio ambiente, en lugar de un baño de aceite, y es significativamente menor que un transformador convencional de la misma capacidad. El resultado es una mejora medible de la eficiencia total del transformador, la cual se traduce en un ahorro operativo sustancial para el propietario.



FIGURA 13.29 Transformador prototipo de potencia superconductora de núcleo parcial de 15 kVA.
Fotografía cortesía del Departamento de Ingeniería Eléctrica y en Computación, Universidad de Canterbury.

A pesar de lo anterior, todos los diseños tienen desventajas que deben compararse con las ventajas que ofrecen, y los diseños de transformador superconductor no son una excepción a la regla. Por ahora, el obstáculo más importante es el costo relativamente alto de fabricar varios kilómetros de alambre superconductor, comparado con el costo del alambre de cobre. Parte de ello se debe al gran reto que representa la fabricación de alambre superconductor a partir de materiales cerámicos, pero parte también es debida al entubado de plata que se utiliza para rodear al superconductor a fin de ofrecer una trayectoria de baja resistencia a la corriente en caso de que el sistema de enfriamiento falle (aunque menos caro que la plata, el cobre reacciona con la cerámica y, por lo tanto, no es una alternativa viable). El resultado neto es que, si bien tal vez un transformador superconductor ahorre dinero a una empresa eléctrica durante mucho tiempo —la gran mayoría de los transformadores superan los 30 años de servicio—, el costo inicial es mucho más alto que el correspondiente a un transformador resistivo tradicional. En la actualidad, muchas compañías (incluso las empresas de electricidad) se manejan por consideraciones de costos a corto plazo, y no siempre están ansiosas por invertir enormes capitales cuyos beneficios sólo se logren a largo plazo.

donde A es una constante de integración que no varía con el tiempo. De tal modo, si se pasa por alto toda la corriente directa en ambos devanados y se enfoca la atención sólo en la parte variable en el tiempo de la respuesta, entonces

$$i_1 = -a i_2$$

El signo negativo se debe a la ubicación de los puntos y a la selección de las direcciones de corriente en la figura 13.17.

En consecuencia, se obtienen las mismas relaciones (razones) de corrientes y de tensiones en el dominio del tiempo que las determinadas antes en el dominio de la frecuencia, siempre que se pasen por alto las componentes de cd. Los resultados en el dominio del tiempo son más generales, aunque se obtuvieron mediante un proceso menos informativo.

Se podrían utilizar las características establecidas del transformador ideal para simplificar circuitos en los que aparecen transformadores ideales. Suponer, con fines ilustrativos, que todo lo que se encuentra a la izquierda de las terminales

del primario se sustituyó por su equivalente de Thévenin, al igual que en la red a la derecha de las terminales del secundario. Por lo tanto, se considera el circuito de la figura 13.30. Se supone una excitación a cualquier frecuencia de pulsación (o angular) ω.

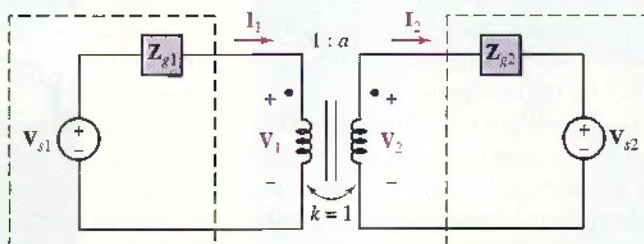


FIGURA 13.30 Las redes conectadas a las terminales del primario y del secundario de un transformador ideal se representan por sus equivalentes de Thévenin.

Circuitos equivalentes

Ahora se podrían utilizar los teoremas de Thévenin o de Norton para conseguir un circuito equivalente que no contenga un transformador. Por ejemplo, se determinará el equivalente de Thévenin de la red de la izquierda de las terminales del secundario. Al poner en circuito abierto el secundario, $\mathbf{I}_2 = 0$ y por ello $\mathbf{I}_1 = 0$ (recuerde que L_1 es infinita). No aparece tensión en $\mathbf{Z}_{g1}$, y por lo tanto, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{s1}$ y $\mathbf{V}_{2oc} = a\mathbf{V}_{s1}$. La impedancia de Thévenin se obtiene si se elimina $\mathbf{V}_{s1}$ y se utiliza el cuadrado de la relación de número de vueltas, teniendo cuidado al utilizar el recíproco de la relación de vueltas, pues se observa hacia el interior de las terminales del secundario. En consecuencia, $\mathbf{Z}_{th2} = \mathbf{Z}_{g1}a^2$.

Como una verificación del equivalente, se determinará la corriente en el secundario en cortocircuito $\mathbf{I}_{2sc}$. Con el secundario en cortocircuito, el generador del primario encara una impedancia de $\mathbf{Z}_{g1}$, y por consiguiente $\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_{s1}/\mathbf{Z}_{g1}$. Así, $\mathbf{I}_{2sc} = \mathbf{V}_{s1}/a\mathbf{Z}_{g1}$. La proporción o razón entre la tensión en circuito abierto y la corriente en cortocircuito es, $a^2\mathbf{Z}_{g1}$, como debe ser. El equivalente de Thévenin del transformador y el circuito primario se muestran en el circuito de la figura 13.31.

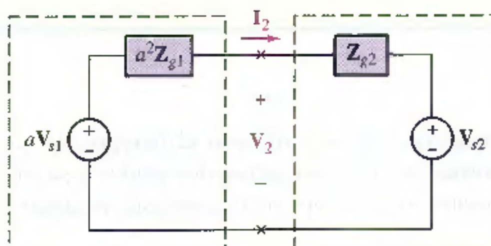


FIGURA 13.31 El equivalente de Thévenin de la red que está a la izquierda de las terminales del secundario en la figura 13.30 se utiliza para simplificar ese circuito.

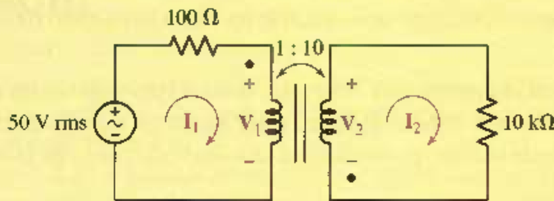
Entonces, cada tensión del primario se debería multiplicar por la relación de número de vueltas, cada corriente del primario dividirse entre esta misma relación y cada impedancia del primario multiplicarse por el cuadrado de ella; después, estas tensiones, corrientes e impedancias modificadas sustituyen a las tensiones, corrientes e impedancias dadas, más el transformador. Si se intercambia cualquier punto, el equivalente se obtiene mediante el negativo de la relación (o razón) del número de vueltas.

Observar que esta equivalencia, como se ilustra en la figura 13.31, sólo es posible si la red se conecta a las terminales del primario, y las que están conectadas a las terminales del secundario pueden sustituirse por sus equivalentes de Thévenin. Esto es, cada una debe ser una red de dos terminales. Por ejemplo, si se cortan los dos hilos de conexión del primario en el transformador, el circuito debe dividirse en dos redes independientes; no es posible que haya un elemento de red que establezca un vínculo en el transformador entre el primario y el secundario.

Un análisis similar del transformador y de la red secundaria muestra que se podría reemplazar todo lo que está a la derecha de las terminales del primario por una red idéntica sin el transformador. Para ello se debe dividir cada tensión entre a, multiplicar cada corriente por a y dividir cada impedancia entre a^2. Una inversión de cualquier devanado requiere el uso de una relación de vueltas de $-a$.

EJEMPLO 13.8

En el circuito de la figura 13.32, determinar el circuito equivalente en el que se sustituyen el transformador y el circuito del secundario, así como en el que se sustituyen el transformador y el circuito del primario.



■ **FIGURA 13.32** Circuito simple en el que la carga resistiva se acopla con la impedancia de la fuente mediante un transformador ideal.

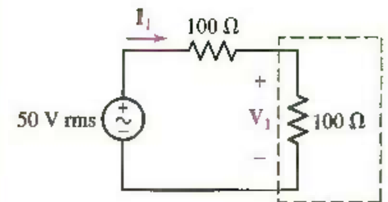
Éste es el mismo circuito analizado en el ejemplo 13.7. Como antes, la impedancia de entrada es $10\,000/(10)^2$, o 100 Ω y por ello $|\mathbf{I}_1| = 250$ mA rms. También se calcula la tensión en la bobina del primario:

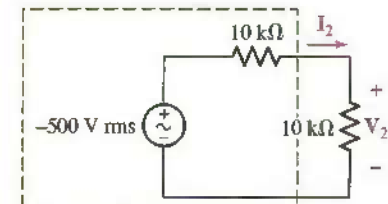
$$|\mathbf{V}_1| = |50 - 100\mathbf{I}_1| = 25 \text{ V rms}$$

y de ese modo se determina que la fuente entrega $(25 \times 10^{-3})(50) = 12.5$ W, de los cuales $(25 \times 10^{-3})^2(100) = 6.25$ W se disipan en la resistencia interna de la fuente y $12.5 - 6.25 = 6.25$ W se entregan a la carga. Ésta es la condición para la transferencia de potencia máxima a la carga.

Si se eliminan el circuito del secundario y el transformador ideal mediante el uso del equivalente de Thévenin, la fuente de 50 V y la resistencia de 100 Ω ven sólo una impedancia de 100 Ω. De este modo se obtiene el circuito simplificado de la figura 13.33*a*. En estas condiciones, la corriente y la tensión del primario resultan de inmediato evidentes.

Si, en lugar de eso, la red de la izquierda de las terminales del secundario se reemplaza por su equivalente de Thévenin, se encuentra que (teniendo presente la ubicación de los puntos) $\mathbf{V}_{th} = -10(50) = -500$ V rms, y $\mathbf{Z}_{th} = (-10)^2(100) = 10$ kΩ; el circuito resultante se presenta en la figura 13.33*b*.

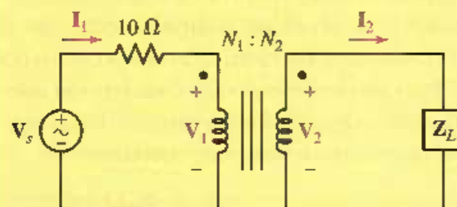




■ **FIGURA 13.33** El circuito de la figura 13.32 se simplifica mediante la sustitución de: (*a*) el transformador y el circuito del secundario por el equivalente de Thévenin, o (*b*) el transformador y el circuito del primario por el equivalente de Thévenin.

PRÁCTICA

13.9 Sea $N_1 = 1\,000$ vueltas y $N_2 = 5\,000$ vueltas en el transformador ideal de la figura 13.34. Si $\mathbf{Z}_L = 500 - j400\ \Omega$, determinar la potencia promedio (activa) que se entrega a $\mathbf{Z}_L$ para: (*a*) $\mathbf{I}_2 = 1.4\underline{/20°}$ A rms; (*b*) $\mathbf{V}_2 = 900\underline{/40°}$ V rms; (*c*) $\mathbf{V}_1 = 80\underline{/100°}$ V rms; (*d*) $\mathbf{I}_1 = 6\underline{/45°}$ A rms; (*e*) $\mathbf{V}_s = 200\underline{/0°}$ V rms.



■ **FIGURA 13.34**

Respuestas: 980 W; 988 W; 195.1 W; 720 W; 692 W.

RESUMEN Y REPASO

- La inductancia mutua describe la tensión inducida en los extremos de una bobina debida al campo magnético generado por una segunda bobina.
- La convención del punto permite asignar un signo al término de la inductancia mutua.
- De acuerdo con la convención del punto, una corriente que entra a la terminal *con punto* de una bobina, produce una tensión en circuito abierto con una referencia de tensión positiva en la terminal *con punto* de la segunda bobina.
- La energía total almacenada en un par de bobinas acopladas incluye tres términos independientes: las dos energías almacenadas en cada una de las autoinductancias representada por el término $(\frac{1}{2}Li^2)$ en cada caso y la energía almacenada en la inductancia mutua (Mi_1i_2).
- El coeficiente de acoplamiento está dado por $k = M/\sqrt{L_1L_2}$, y se restringe a valores entre 0 y 1.
- Un transformador lineal consta de dos bobinas acopladas: el devanado primario y el devanado secundario.
- Un transformador ideal es un modelo útil de los transformadores prácticos con núcleo de hierro. El coeficiente de acoplamiento k se considera unitario y se supone que los valores de inductancia serán infinitos.
- La relación (o razón) del número de vueltas $a = N_2/N_1$ de un transformador ideal se relaciona con las tensiones respectivas de la bobina del primario y la del secundario: $\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1$.
- La relación (o razón) del número de vueltas (a) relaciona también las corrientes en las bobinas respectivas del primario y del secundario: $\mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2$.

LECTURAS ADICIONALES

Casi todo lo que se desea saber acerca de los transformadores puede encontrarse en:

M. Heathcote, *J&P Transformer Book,* 12a. ed. Oxford: Reed Educational and Professional Publishing Ltd., 1998.

Otro título muy completo acerca de transformadores es:

W.T. McLyman, *Transformer and Inductor Design Handbook,* 3a. ed. Nueva York: Marcel Dekker,2004.

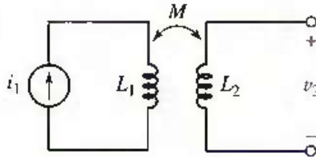
Un buen libro acerca de transformadores con un fuerte enfoque económico es

B.K. Kennedy, *Energy Efficient Transformers.* Nueva York: McGraw-Hill, 1998.

EJERCICIOS

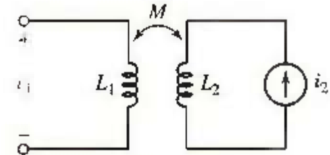
13.1 Inductancia mutua

1. Considerar el circuito de la figura 13.35. Si $i_1(t) = 400 \cos 120\pi t$ A y el valor máximo de $v_2(t)$ es 100 V, ¿cuál es el valor de la inductancia mutua que enlaza L_1 y L_2?



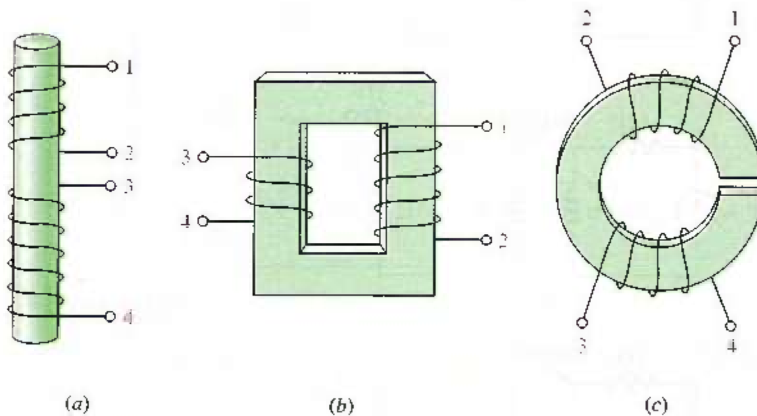
■ **FIGURA 13.35**

2. Si en el circuito de la figura 13.36, la tensión $v_1(t)$ se sabe que es $115\sqrt{2}\cos(120\pi t - 16°)$ V, ¿cuál es el valor de la inductancia mutua que enlaza los dos inductores L_1 y L_2?



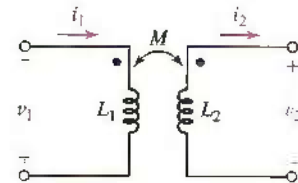
■ **FIGURA 13.36**

3. En la figura 13.37 se muestra la construcción física de tres pares de bobinas acopladas. Señálense las dos diferentes ubicaciones posibles de los dos puntos en cada par de bobinas.



■ **FIGURA 13.37**

4. Los dos inductores acoplados de la figura 13.38 están conectados en un circuito donde las tensiones y corrientes están como se muestra. $L_1 = 1$ H, $L_2 = 3$ H, y $M = 0.5$ H. Si $i_1 = 30$ sen $80t$ A e $i_2 = 30 \cos 80t$ A, calcular: *(a)* v_1; *(b)* v_2.



■ **FIGURA 13.38**

5. Los dos inductores acoplados de la figura 13.39 están conectados en un circuito con las tensiones y corrientes que se muestran. $L_1 = 22\ \mu$H, $L_2 = 15\ \mu$H, y $M = 5\ \mu$H. Si $i_1 = 3\cos 800t$ nA e $i_2 = 2\cos 800t$ nA, calcular: (*a*) v_1; (*b*) v_2.

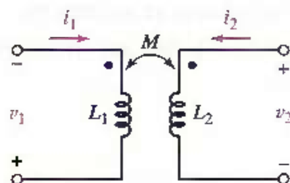


FIGURA 13.39

6. Con relación a la figura 13.40, suponer que $v_1 = 5e^{-t}$ V y $v_2 = 3e^{-2t}$ V. Si $L_1 = L_2 = 8$ H y $M = 0.4$ H, determinar: (*a*) di_1/dt; (*b*) di_2/dt; (*c*) $i_1(t)$ si no hay energía almacenada en $t = 0$.

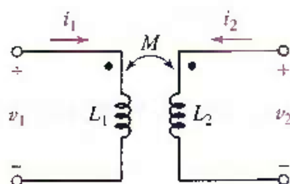


FIGURA 13.40

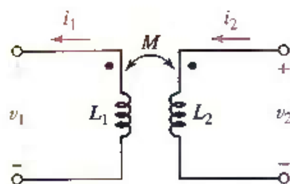
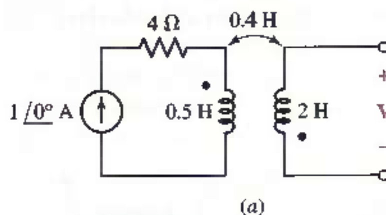


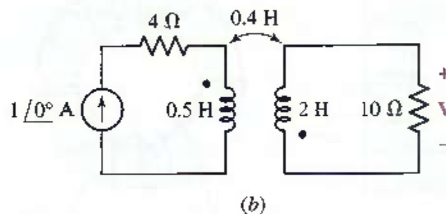
FIGURA 13.41

7. En la figura 13.41, suponer que $v_1 = 2e^{-t}$ V y $v_2 = 4e^{-3t}$ V. Si $L_1 = L_2 = 2$ mH y $M = 1.5$ mH, determinar: (*a*) di_1/dt; (*b*) di_2/dt; (*c*) $i_2(t)$ si no hay energía almacenada en $t = 0$.

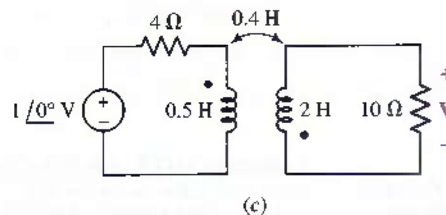
8. Determinar $v(t)$ para cada red de la figura 13.42, si $f = 50$ Hz.



(*a*)



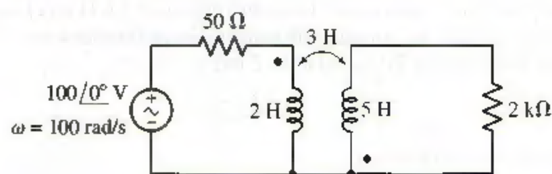
(*b*)



(*c*)

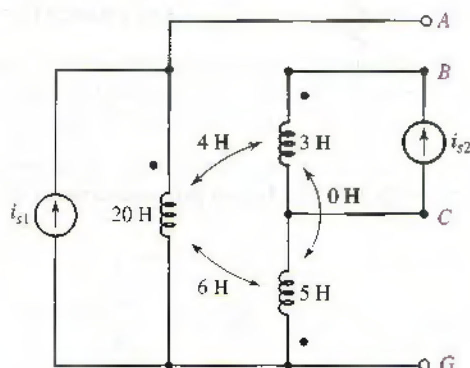
FIGURA 13.42

9. En el circuito que se presenta en la figura 13.43, determinar la potencia promedio (activa) que absorbe: (*a*) la fuente; (*b*) cada una de las dos resistencias; (*c*) cada una de las dos inductancias; (*d*) la inductancia mutua.



■ **FIGURA 13.43**

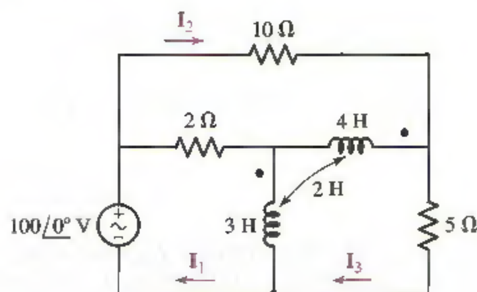
10. Sean $i_{s1}(t) = 4t$ A e $i_{s2}(t) = 10t$ A en el circuito de la figura 13.44. Determinar: (*a*) v_{AG}; (*b*) v_{CG}; (*c*) v_{BG}.



■ **FIGURA 13.44**

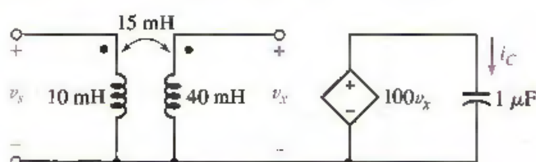
11. (*a*) Obtener la red equivalente de Thévenin que encara la resistencia de 2 kΩ en el circuito del ejercicio 9. (*b*) ¿Cuál es la potencia promedio (activa) máxima que se extrae de la red mediante un valor óptimo de $\mathbf{Z}_L$ (en lugar de 2 kΩ)?

12. En el circuito de la figura 13.45, calcular las corrientes $i_1(t)$, $i_2(t)$, e $i_3(t)$ si $f = 50$ Hz.

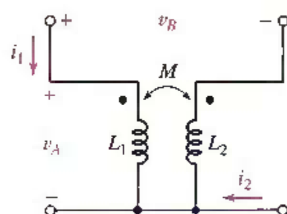


■ **FIGURA 13.45**

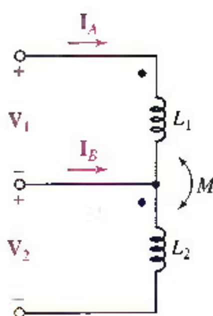
13. Determinar la expresión de $i_C(t)$ válida para $t > 0$ en el circuito de la figura 13.46, si $v_s(t) = 10t^2u(t)/(t^2 + 0.01)$ V.



■ **FIGURA 13.46**



(*a*)

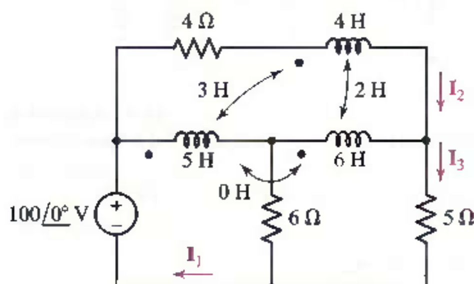


(*b*)

■ **FIGURA 13.47**

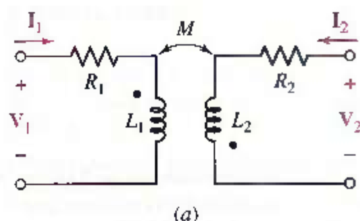
14. (*a*) Para la red de la figura 13.47*a*, escribir dos ecuaciones donde $v_A(t)$ y $v_B(t)$ sean funciones de $i_1(t)$ e $i_2(t)$. (*b*) Escribir las dos ecuaciones donde $\mathbf{V}_1(j\omega)$ y $\mathbf{V}_2(j\omega)$ están en función de $\mathbf{I}_A(j\omega)$ e $\mathbf{I}_B(j\omega)$ en la red de la figura 13.47*b*.

15. Observar que no hay acoplamiento mutuo entre los inductores de 5 y 6 H en el circuito de la figura 13.48. (*a*) Escribir un conjunto de ecuaciones en términos de $\mathbf{I}_1(j\omega)$, $\mathbf{I}_2(j\omega)$, e $\mathbf{I}_3(j\omega)$. (*b*) Calcular $\mathbf{I}_3(j\omega)$ si $\omega = 2$ rad/s.

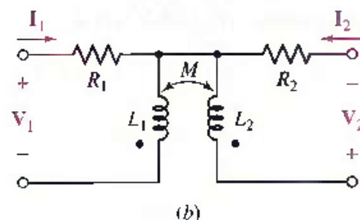


■ **FIGURA 13.48**

16. Calcular $\mathbf{V}_1(j\omega)$ y $\mathbf{V}_2(j\omega)$ en términos de $\mathbf{I}_1(j\omega)$ e $\mathbf{I}_2(j\omega)$ para cada circuito de la figura 13.49.

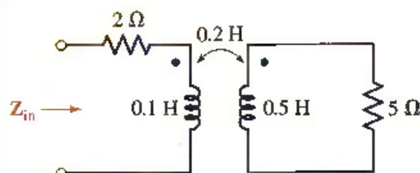


(*a*)



(*b*)

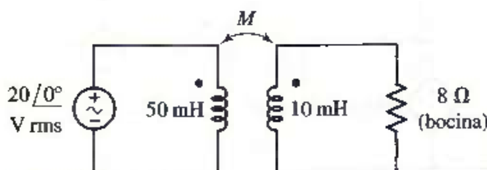
■ **FIGURA 13.49**



■ **FIGURA 13.50**

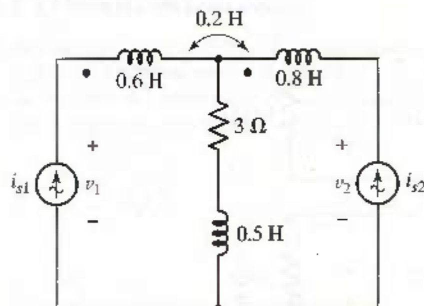
17. (*a*) Encontrar $\mathbf{Z}_{ent}(j\omega)$ en la red de la figura 13.50. (*b*) Graficar $\mathbf{Z}_{ent}$ sobre el intervalo de frecuencia de pulsación $0 \leq \omega \leq 1\,000$ rad/s. (*c*) Determinar $\mathbf{Z}_{ent}(j\omega)$ para $\omega = 50$ rad/s.

18. Consultar el circuito de la figura 13.51. ¿Qué valor de M provocará que se entregue exactamente una potencia promedio (activa) de 3.2 W al altavoz (bocina) de bajos de 8 Ω, a una frecuencia de audio de 160 Hz?



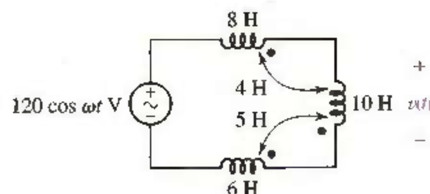
■ **FIGURA 13.51**

19. Sean $i_{s1} = 2 \cos 10t$ A e $i_{s2} = 1.2 \cos 10t$ A en la figura 13.52. Calcular: (*a*) $v_1(t)$; (*b*) $v_2(t)$; (*c*) la potencia promedio (activa) que suministra cada fuente.



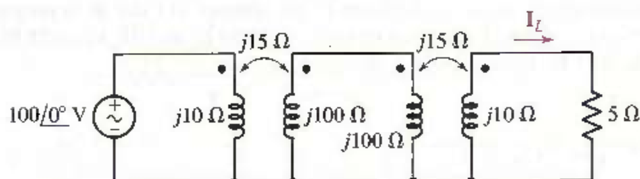
■ **FIGURA 13.52**

20. Es posible arreglar tres bobinas de manera que se tenga un acoplamiento mutuo entre las bobinas *A* y *B* y entre *B* y *C*, pero no entre *A* y *C*. Dicho arreglo se muestra en la figura 13.53. Encontrar $v(t)$.



■ **FIGURA 13.53**

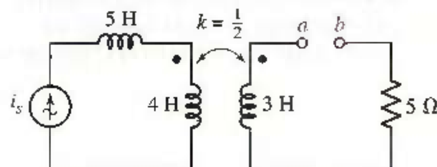
21. Obtener $\mathbf{I}_L$ en el circuito que se indica en la figura 13.54.



■ **FIGURA 13.54**

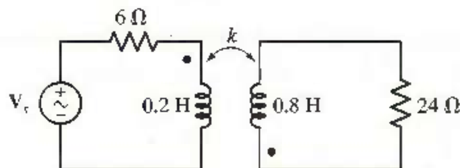
13.2 Consideraciones energéticas

22. Sea $i_s = 2 \cos 10t$ A en el circuito de la figura 13.55. Determinar la energía total almacenada en $t = 0$ si: (*a*) *a*-*b* está en circuito abierto como se muestra; (*b*) *a*-*b* está en cortocircuito.



■ **FIGURA 13.55**

23. Sea $\mathbf{V}_s = 12\underline{/0^\circ}$ V rms en el transformador lineal de la figura 13.56. Con $\omega =$ 100 rad/s, encontrar la potencia promedio (activa) que suministra la resistencia de 24 Ω como una función de *k*.



■ **FIGURA 13.56**

24. Dos bobinas acopladas mutuamente, para las cuales $L_1 = 2\ \mu$H, $L_2 = 80\ \mu$H, y $k = 1$ tiene una carga de $\mathbf{Z}_L = 2 + j10\ \Omega$ conectada entre las terminales de L_2. Calcular $\mathbf{Z}_{ent}$ en las terminales de L_1 si $\omega = 250$ krad/s.

25. Sea $\omega = 100$ rad/s en el circuito de la figura 13.57. Calcular la potencia promedio (activa): (*a*) entregada a la carga de 10 Ω; (*b*) entregada a la carga de 20 Ω; (*c*) generada por la fuente.

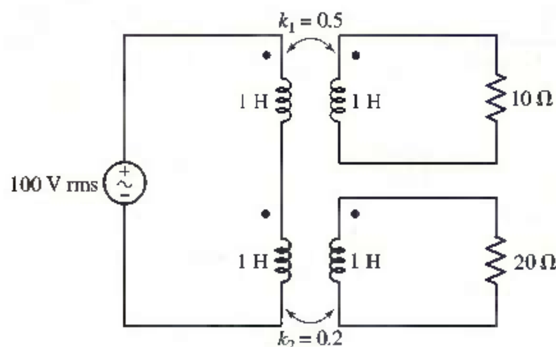


FIGURA 13.57

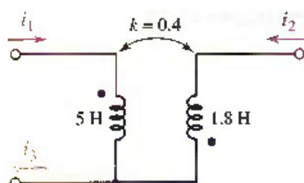


FIGURA 13.58

26. En el caso de las bobinas acopladas que se muestran en la figura 13.58, sean $i_1(t) = 4e^{-t/10}$ A e $i_2(t) = 5e^{-t/5}$ A. Determinar: (*a*) *M*; (*b*) $i_2(t)$; (*c*) la energía total almacenada en el sistema, en $t = 0$.

27. Sea $\omega = 1\,000$ rad/s en el circuito de la figura 13.59, obtener el valor de la proporción $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_s$ si: (*a*) $L_1 = 1$ mH, $L_2 = 25$ mH, y $k = 1$; (*b*) $L_1 = 1$ H, $L_2 = 25$ H, y $k = 0.99$; (*c*) $L_1 = 1$ H, $L_2 = 25$ H, y $k = 1$.

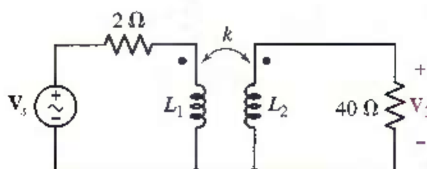


FIGURA 13.59

28. (*a*) Un puente de inductancia usado en las bobinas acopladas de la figura 13.60 mide los siguientes valores en condiciones de cortocircuito y de circuito abierto: $L_{AB,CD=OC} = 10$ mH, $L_{CD,AB=OC} = 5$ mH, $L_{AB,CD=SC} = 8$ mH. Encontrar *k*. (*b*) Suponiendo puntos en *A* y *D*, con $i_1 = 5$ A, ¿qué valor debe tener i_2 para que se almacenen 100 mJ en el sistema?

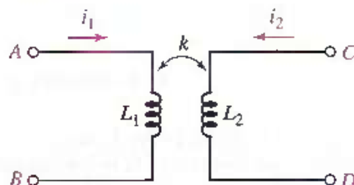


FIGURA 13.60

29. En el circuito que se muestra en la figura 13.61, $f = 60$ Hz. Calcular $\mathbf{V}_2$ como una función de *k* y graficar $|\mathbf{V}_2|$ en función de *k*.

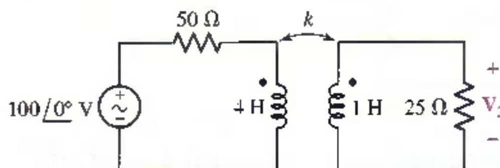
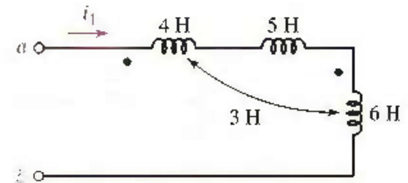


FIGURA 13.61

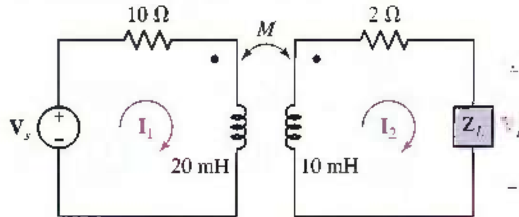
30. Si $i_1 = 2\cos 500t$ A en la red de la figura 13.62, calcular el valor de la energía máxima almacenada en la red.



■ **FIGURA 13.62**

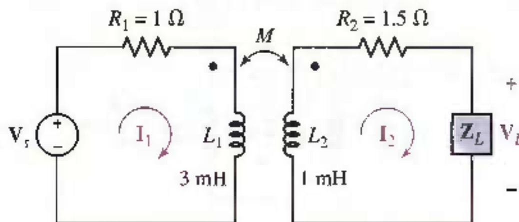
13.3 El transformador lineal

31. Se sabe que la impedancia $\mathbf{Z}_L$ de la carga del circuito de la figura 13.63 es de $7\underline{/32^\circ}\ \Omega$ a una frecuencia de operación de 50 Hz. La inductancia mutua que enlaza las bobinas del primario y del secundario tiene un valor de 800 nH. Calcular: (*a*) la impedancia reflejada o referida y (*b*) la impedancia de entrada vista por $\mathbf{V}_s$.



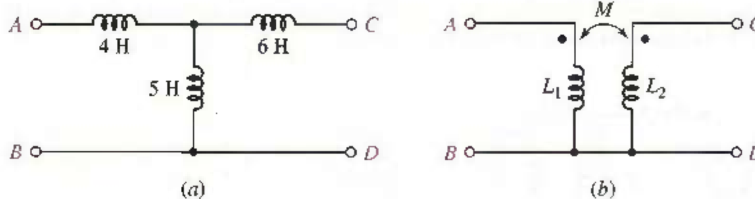
■ **FIGURA 13.63**

32. Si el circuito de la figura 13.64 opera a 60 Hz y $\text{Re}\{\mathbf{Z}_L\} = 2\ \Omega$, ¿qué reactancia se requiere que tenga $\mathbf{Z}_L$ para que la impedancia reflejada (referida) sea igual a $\mathbf{Z}_{11}$ cuando $M = 1$ mH? ($\mathbf{Z}_{11} \triangleq R_1 + j\omega L_1$).



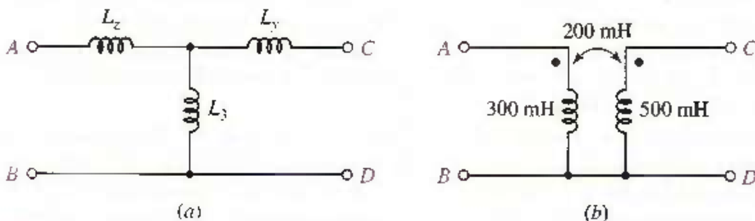
■ **FIGURA 13.64**

33. Las redes de la figura 13.65 son equivalentes. Calcular los valores de L_1, L_2, y M.



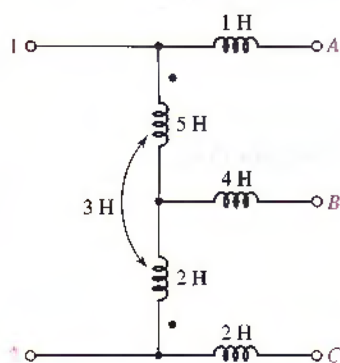
■ **FIGURA 13.65**

34. ¿Qué valores de L_x, L_y, y L_3 se requieren si se desea que las dos redes de la figura 13.66 sean equivalentes?



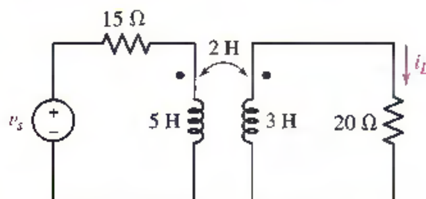
■ **FIGURA 13.66**

35. Encontrar la inductancia equivalente vista en las terminales 1 y 2 en la red de la figura 13.67 si las siguientes terminales se conectan entre sí: (*a*) ninguna; (*b*) *A* con *B*; (*c*) *B* con *C*; (*d*) *A* con *C*.



■ **FIGURA 13.67**

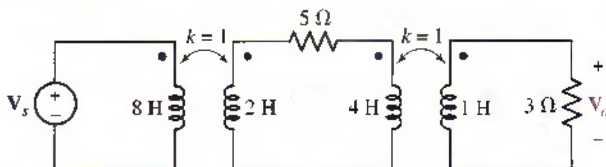
36. Observar la figura 13.68 y: (*a*) utilizar el equivalente T como ayuda para encontrar la relación $\mathbf{I}_L(j\omega)/\mathbf{V}_s(j\omega)$. (*b*) Sea $v_s(t) = 100u(t)$ V y calcular $i_L(t)$. [Sugerencia: tal vez se deseen escribir las dos ecuaciones diferenciales del circuito, como ayuda para determinar di_L/dt en $t = 0^+$.]



■ **FIGURA 13.68**

37. Determinar los equivalentes en T de ambas posiciones de punto en un transformador lineal sin pérdidas, para el que $L_1 = 4$ mH, $L_2 = 18$ mH, y $M = 8$ mH. Utilizar las T para encontrar las tres inductancias de entrada equivalentes obtenidas cuando el secundario está: (*a*) en circuito abierto; (*b*) en cortocircuito; (*c*) conectado en paralelo con el primario.

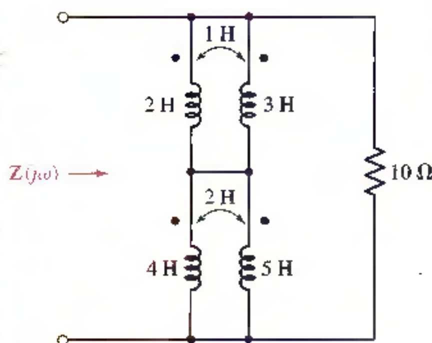
38. Determinar $\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ en el circuito de la figura 13.69.



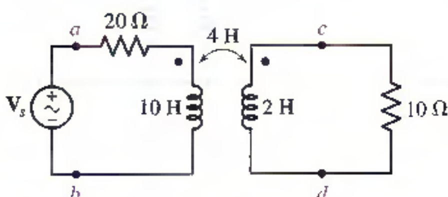
■ **FIGURA 13.69**

39. Utilizar el equivalente en T como ayuda a fin de determinar la impedancia de entrada $\mathbf{Z}(j\omega)$ de la red que se muestra en la figura 13.70.

40. Sea $\mathbf{V}_s = 100\underline{/0°}$ V rms y $\omega = 100$ rad/s en el circuito de la figura 13.71. Obtener el equivalente de Thévenin de la red: (*a*) de la derecha de las terminales de *a* y *b*; (*b*) de la izquierda de las terminales *c* y *d*.



■ **FIGURA 13.70**

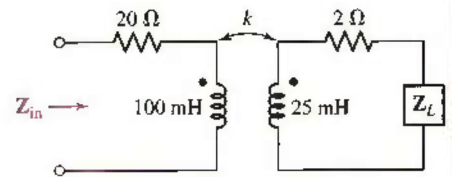


■ **FIGURA 13.71**

41. Una carga $\mathbf{Z}_L$ se conecta al secundario de un transformador lineal que se caracteriza por las inductancias $L_1 = 1$ H y $L_2 = 4$ H así como por un coeficiente de acoplamiento unitario $\omega = 1\,000$ rad/s, encontrar la red en serie equivalente (valores de *R*, *L*, y *C*) vista en las terminales de entrada, si $\mathbf{Z}_L$ se representa mediante: (*a*) 100 Ω; (*b*) 0.1 H; (*c*) 10 μF.

42. Un transformador lineal tiene $L_1 = 6$ H, $L_2 = 12$ H, y $M = 5$ H. Calcular los ocho valores diferentes de L_{ent} que se obtienen mediante los ocho diferentes métodos posibles con los que se determina una red de dos terminales (inductancias simples, combinaciones en serie y en paralelo, transformadores en cortocircuito, varias combinaciones en serie y en paralelo, transformadores en cortocircuito, varias combinaciones de punto). Mostrar cada red y encontrar su L_{ent}.

43. En el circuito de la figura 13.72, considerar que $\mathbf{Z}_L$ es un capacitor de 100 μF con una impedancia de $-j31.83\ \Omega$. Calcular $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$ cuando $k =$ (*a*) 0; (*b*) 0.5; (*c*) 0.9; (*d*) 1. Verificar mediante simulaciones de PSpice.

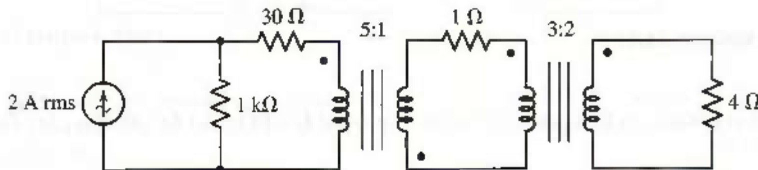


■ FIGURA 13.72

44. Repetir el ejercicio 41 si L_1 se incrementa hasta 125 H, L_2 aumenta hasta 20 H, y M crece de manera que $k = 1$. Verificar con una simulación de PSpice.

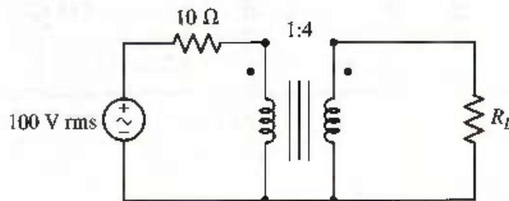
13.4 El transformador ideal

45. Calcular la potencia promedio que se entrega a cada uno de las cuatro resistencias del circuito de la figura 13.73. Verificar con una simulación de PSpice.



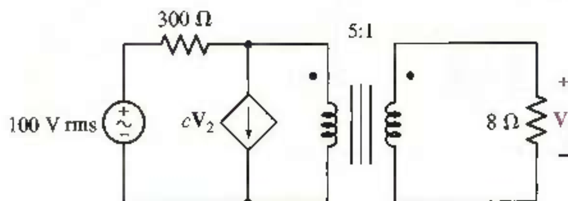
■ FIGURA 13.73

46. (*a*) ¿Cuál es el valor máximo de la potencia promedio (activa) que se suministra a R_L en el circuito de la figura 13.74? (*b*) Sea $R_L = 100\ \Omega$ y conectar una resistencia de 40 Ω entre las terminales superiores del primario y del secundario. Determinar P_L.



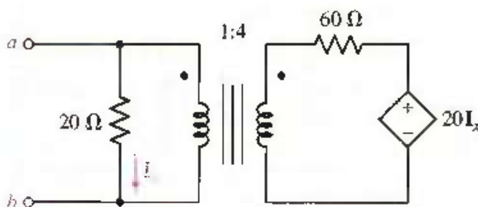
■ FIGURA 13.74

47. Indicar la potencia promedio (activa) que se entrega a la carga de 8 Ω en el circuito de la figura 13.75, si c es igual a: (*a*) 0; (*b*) 0.04 S; (*c*) -0.04 S.



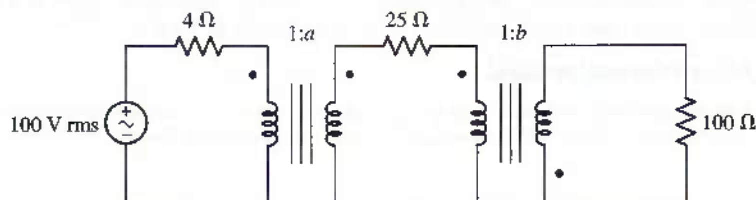
■ FIGURA 13.75

48. Determinar el equivalente de Thévenin en las terminales a y b de la red que se presentó en la figura 13.76.



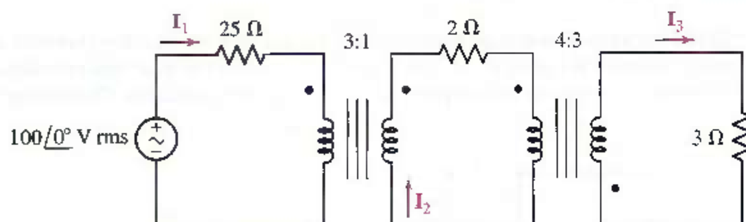
■ FIGURA 13.76

49. Elegir los valores de a y b en el circuito de la figura 13.77, de manera que la fuente ideal suministre 1 000 W, la mitad de los cuales se entregan a la carga de 100 Ω.



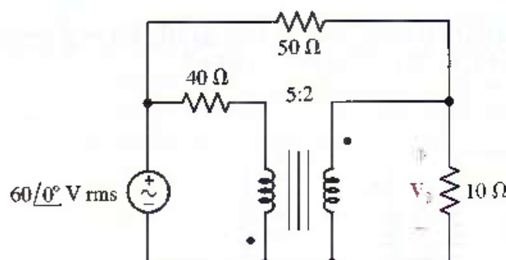
■ **FIGURA 13.77**

50. En el circuito de la figura 13.78, determinar: (*a*) $\mathbf{I}_1$; (*b*) $\mathbf{I}_2$; (*c*) $\mathbf{I}_3$; (*d*) $P_{25\Omega}$; (*e*) $P_{2\Omega}$; (*f*) $P_{3\Omega}$.



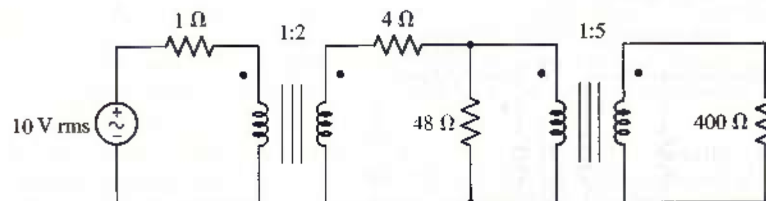
■ **FIGURA 13.78**

51. Calcular $\mathbf{V}_2$ en el circuito de la figura 13.79.



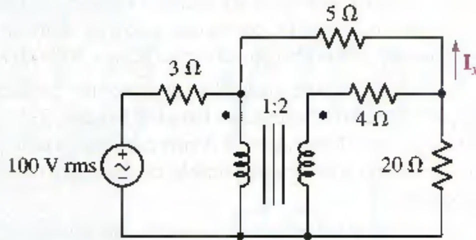
■ **FIGURA 13.79**

52. Encontrar la potencia activa que se está disipando en cada resistencia del circuito de la figura 13.80.

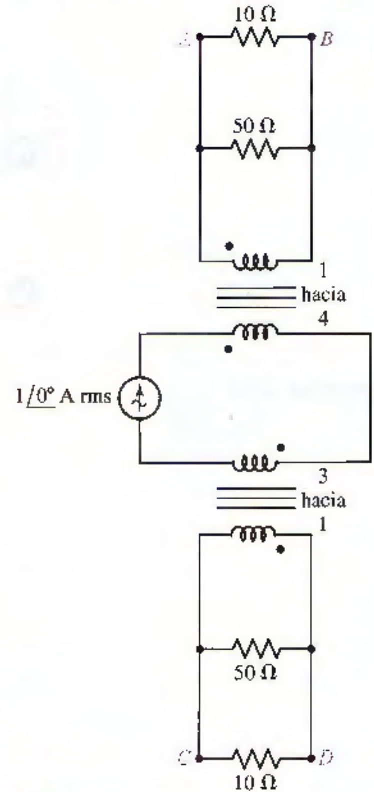


■ **FIGURA 13.80**

53. Obtener $\mathbf{I}_x$ en el circuito de la figura 13.81.



■ **FIGURA 13.81**



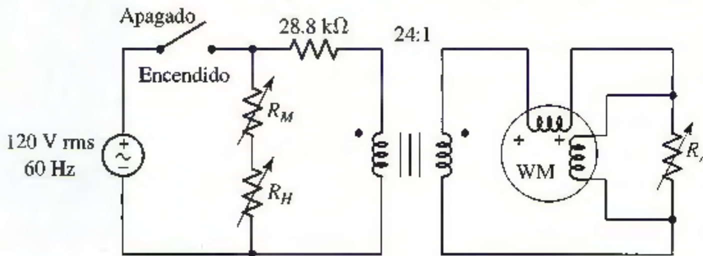
■ **FIGURA 13.82**

54. (*a*) Encontrar la potencia promedio (activa) entregada a cada resistencia de 10 Ω en el circuito de la figura 13.82. (*b*) Repetir el ejercicio después de conectar *A* con *C* y *B* con *D*.

55. Mostrar la forma en que se pueden utilizar dos transformadores ideales para acoplar un generador, con una impedancia de salida de $4 + j0$ kΩ a una carga que consiste en un altavoz (bocina) de 8 W y uno de 10 W de modo que el primero reciba el *doble* de la potencia promedio (activa) que se suministra al segundo. Dibujar un esquema de circuito adecuado y especificar las relaciones (razones) de número de vuelta requeridas.

56. Un transformador cuya placa indica 2 300/230 V, 25 kVA opera con tensiones del primario y del secundario de 2 300 V y 230 V rms, respectivamente; además, suministra 25 kVA a partir de su devanado secundario. Si este transformador se alimenta con 2 300 V rms y se conecta a cargas secundarias que requieren 8 kW a un FP unitario, y 15 kVA a un FP de 0.8 retrasado, (*a*) ¿cuál es al corriente del primario? (*b*) ¿Cuántos kilowatts sigue suministrando el transformador a una carga que opera a un FP de 0.95 retrasado? (*c*) Verificar sus respuestas con PSpice.

57. Entrada la noche, un anuncio de televisión vende un dispositivo por 19.95 dólares que medirá su coeficiente intelectual. En un momento de debilidad, toma el teléfono y realiza el pedido; de 4 a 6 semanas más tarde, llega su compra y se le indica girar un botón marcado R_H hasta su altura (en cm), un botón marcado R_M hasta su masa (en kg) y un tercer botón R_A hasta su edad (en años). Enojado por el número que se indica en el exhibidor del aparato, lo lanza por la habitación y el panel posterior se desprende, revelando el esquema de la figura 13.83. Observar que los cm, los kg y los años corresponden a ohms y que la potencia medida por el wattímetro en mW se exhibe como el coeficiente intelectual. (*a*) ¿Cuál sería el CI que predeciría para el compañero de cuarto? (*b*) ¿Cuáles son las características del individuo que mostraría el CI más alto? (*c*) ¿Cuánto dinero se ha perdido?

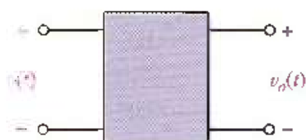


■ **FIGURA 13.83**

58. La compañía donde trabaja le pide que viaje desde Fresno, California, donde la potencia eléctrica se suministra como 120 V rms, 60 Hz, hasta Rostock, Alemania (donde el suministro corresponde a 240 V rms, 50 Hz), durante 6 semanas para contribuir a poner en marcha una nueva instalación para la fabricación de semiconductores. Por suerte su laptop se conecta a tomas de corriente en cualquier país, siempre que usted cuente con un adaptador del enchufe. Sin embargo, su quemador de CD

externo sólo funciona a 120 V ca. Diseñar un circuito que le permita utilizar su quemador de CD en Alemania, suponiendo que sólo operará a 50 Hz. (Por lo común, los transformadores que se diseñan para utilizarse sólo a 60 Hz tienen un núcleo de hierro de menor peso que los que se diseñan para 50 Hz, por lo que quizá se sobrecalentarán a 50 Hz. Muchos transformadores, sin embargo, se especifican a 50/60 Hz.)

D 59. Como primera tarea en un nuevo trabajo, se le pide diseñar un circuito que permita utilizar en Australia un criocompresor de helio diseñado en Estados Unidos. Tal aparato consta de tres motores trifásicos que demandan 10 A rms por fase, a una tensión de línea de 208 V. La única potencia trifásica disponible en Australia es de 400 V rms. Diseñar el circuito necesario.



■ **FIGURA 13.84**

D 60. La red de la figura 13.84 tiene la inusual propiedad de sólo permitir que pasen hacia la derecha tensiones positivas $v(t)$; los valores negativos dan como resultado $v_o(t) = 0$. (*a*) Si se requiere que una tensión de salida $v_o(t)$ tenga una tensión máxima de 5 V, diseñar un circuito apropiado utilizando un suministro de 115 V rms y la red de la figura 13.84. Graficar la salida del dispositivo diseñado. (*b*) Si se desea una salida "más uniforme" (es decir, con menor "rizo"), sugerir una modificación al diseño.

CAPÍTULO 14

Frecuencia compleja y transformada de Laplace

CONCEPTOS CLAVE

- Frecuencia neperiana.
- Frecuencia compleja.
- Transformada de Laplace.
- Uso de tablas de transformadas.
- Método de los residuos.
- Utilización de MATLAB para manipular polinomios.
- Utilización de MATLAB para determinar residuos de fracciones racionales.
- Teorema del valor inicial.
- Teorema del valor final.

INTRODUCCIÓN

El lector se encuentra a punto de iniciar la cuarta parte fundamental del estudio del análisis de circuitos: la explicación del concepto de frecuencia compleja. Este tema constituye un notable concepto unificador que permitirá integrar en un solo paquete todas las técnicas analíticas formuladas antes. El análisis de circuitos resistivos, el análisis senoidal de estado permanente, el análisis transitorio, la respuesta forzada, la respuesta completa y el análisis de circuitos excitados por funciones exponenciales forzadas y funciones senoidales forzadas amortiguadas exponencialmente se convertirán en su totalidad en casos especiales de las técnicas generales del análisis de circuitos que se asocian con el concepto de frecuencia compleja.

Un método utilizado muy a menudo para encarar este tema es iniciar inmediatamente el estudio de la integral de la transformada de Fourier, pero este enfoque no contiene ningún sentido de comprensión o intuición real. Por ende, se analizará en primera instancia el concepto básico de la frecuencia compleja y su relevancia en el análisis de circuitos. A partir de ello se presentará la transformada de Laplace como una forma de analizar circuitos que contengan fuentes dependientes del tiempo más genéricas, se aprenderá cómo llevar a cabo transformaciones inversas a fin de obtener respuestas en el dominio del tiempo y se considerarán algunos teoremas especiales que pueden utilizar las propiedades clave de funciones en el dominio de la frecuencia. Dichas técnicas se ampliarán en el capítulo 15 y abarcarán una amplia gama de análisis de situaciones dadas o consideradas.

14.1 FRECUENCIA COMPLEJA

Se presenta la noción de *frecuencia compleja* considerando una función senoidal amortiguada exponencialmente, tal como la tensión

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \qquad [1]$$

donde σ (sigma) es una cantidad real y casi siempre negativa. Aunque se hace referencia a menudo a esta función como "amortiguada", tal vez la amplitud senoidal puede aumentar, lo cual ocurre si $\sigma > 0$; sin embargo, el caso más práctico es el de la función amortiguada. El estudio de la respuesta natural de un circuito *RLC* también indica que σ es el negativo del coeficiente de amortiguamiento exponencial.

Se podría construir una tensión constante a partir de la ecuación [1] si $\sigma = \omega = 0$:

$$v(t) = V_m \cos\theta = V_0 \qquad [2]$$

Si sólo se iguala σ a cero, se obtiene una tensión senoidal general

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \qquad [3]$$

y si $\omega = 0$, se tiene la tensión exponencial

$$v(t) = V_m \cos\theta\, e^{\sigma t} = V_0 e^{\sigma t} \qquad [4]$$

Por lo tanto, la senoide amortiguada de la ecuación [1] incluye como casos especiales la función de cd de la ecuación [2], la senoidal de la ecuación [3] y la exponencial de la ecuación [4].

Se logra un conocimiento adicional de la importancia de σ al comparar la función exponencial de la función [4] con la representación compleja de la función senoidal con un ángulo de fase de cero grados:

$$v(t) = V_0 e^{j\omega t} \qquad [5]$$

Resulta evidente que ambas funciones, ecuaciones [4] y [5], tienen mucho en común. La única diferencia es que el exponente de la ecuación [4] es real y el de la ecuación [5] imaginario. La similitud entre las dos funciones se remarca al describir a σ como una "frecuencia", lo cual es una elección de terminología que se explicará en detalle en las secciones siguientes, aunque por ahora sólo es necesario señalar que σ se denomina de manera específica la *parte real* de la frecuencia compleja; sin embargo, no debe denominarse "frecuencia real", pues es un término más adecuado para f (o, con menor rigor, para ω). Se hará referencia también a σ como la ***frecuencia neperiana***, nombre que resulta de la unidad dimensional del exponente de e. De tal manera, dada e^{7t}, las dimensiones de $7t$ son ***nepers*** (Np), y 7 es la frecuencia neperiana en nepers por segundo.

El neper se nombró de esa manera en honor del filósofo y matemático escocés John Napier (1550-1617) y de su sistema logarítmico; la ortografía de su nombre es históricamente incierta (vea, por ejemplo, H.A. Wheeler, *IRE Transactions on Circuit Theory* 2, 1955, p. 219).

Forma general

La respuesta forzada de una red a una función forzada general con la forma de la ecuación [1] se obtiene de manera muy simple a través de un método casi idéntico al que se utiliza en el análisis basado en fasores. Una vez que se puede determinar la respuesta forzada a esta senoide amortiguada, se debe reconocer que también se requiere obtener la respuesta forzada ante una tensión de cd, una tensión exponencial y una tensión senoidal. Se verá ahora cómo es posible considerar σ y ω como las partes real e imaginaria respectivamente de una frecuencia compleja.

Se proporcionará primero una definición puramente matemática de frecuencia compleja y luego se desarrollará en forma gradual una interpretación física, a medida que se avance en el capítulo. Se sugiere que cualquier función que pudiera escribirse en la forma

$$f(t) = \mathbf{K}e^{\mathbf{s}t} \qquad [6]$$

donde $\mathbf{K}$ y $\mathbf{s}$ son constantes complejas (independientes del tiempo) se caracterice por la ***frecuencia compleja*** $\mathbf{s}$; por lo tanto, ésta simplemente es el factor que

multiplica t en dicha representación exponencial compleja. Hasta que se pueda determinar por inspección la frecuencia compleja de una función dada, se requiere escribir la función en la forma de la ecuación [6].

El caso de cd

Se podría aplicar, primero, esta definición a las funciones forzadas más familiares. Por ejemplo, una tensión constante

$$v(t) = V_0$$

se debería escribir en la forma

$$v(t) = V_0 e^{(0)t}$$

En consecuencia, se concluye que la frecuencia compleja de una corriente o de una tensión de cd es cero (es decir, $\mathbf{s} = 0$).

El caso exponencial

El siguiente caso sencillo es la función exponencial

$$v(t) = V_0 e^{\sigma t}$$

que ya está en la forma requerida. La frecuencia compleja de dicha tensión es entonces σ (esto es, $\mathbf{s} = \sigma + j0$).

El caso senoidal

Se considerará ahora una tensión senoidal que quizá nos dé una ligera sorpresa. Dada

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

se desea encontrar una expresión equivalente en términos de la exponencial compleja. De acuerdo con nuestra experiencia anterior, se usa la fórmula que se dedujo de la identidad de Euler,

$$\cos(\omega t + \theta) = \tfrac{1}{2}[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}]$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} v(t) &= \tfrac{1}{2}V_m[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}] \\ &= \left(\tfrac{1}{2}V_m e^{j\theta}\right)e^{j\omega t} + \left(\tfrac{1}{2}V_m e^{-j\theta}\right)e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

o

$$v(t) = \mathbf{K}_1 e^{\mathbf{s}_1 t} + \mathbf{K}_2 e^{\mathbf{s}_2 t}$$

Se tiene la *suma* de dos exponenciales complejas, y por ello están presentes *dos* frecuencias complejas: una para cada término. La frecuencia compleja del primer término es $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 = j\omega$ y la del segundo $\mathbf{s} = \mathbf{s}_2 = -j\omega$. Estos dos valores de $\mathbf{s}$ son ***conjugados***, o sea $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^*$; así que los dos valores de $\mathbf{K}$ también son conjugados: $\mathbf{K}_1 = \frac{1}{2}V_m e^{j\theta}$ y $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^* = \frac{1}{2}V_m e^{-j\theta}$. El primero y el segundo términos completos son entonces conjugados, lo que se pudo haber esperado en vista de que su suma debe ser una cantidad real, $v(t)$.

El conjugado complejo de cualquier número se obtiene sustituyendo simplemente todas las "j" con "$-j$." El concepto se origina en la elección arbitraria de $j = +\sqrt{-1}$. Sin embargo, la raíz negativa es igualmente válida, lo cual lleva a la definición de un conjugado complejo.

El caso senoidal amortiguado exponencialmente

Por último, se determinará la frecuencia compleja o frecuencias asociadas con la función senoidal amortiguada en forma exponencial, ec. [1]. En este caso se utiliza también la fórmula de Euler para obtener una representación exponencial compleja:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$$
$$= \tfrac{1}{2}V_m e^{\sigma t}[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}]$$

y, por lo tanto,

$$v(t) = \tfrac{1}{2}V_m e^{j\theta}e^{j(\sigma+j\omega)t} + \tfrac{1}{2}V_m e^{-j\theta}e^{j(\sigma-j\omega)t}$$

Se descubre que también se necesita un par complejo conjugado de frecuencias, $\mathbf{s}_1 = \sigma + j\omega$ y $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^* = \sigma - j\omega$, para describir la senoide amortiguada exponencialmente. En general, ni σ ni ω son iguales a cero, de modo que la forma de onda senoidal que varía de manera exponencial constituye el caso general; las formas de onda constante, senoidal y exponencial son casos especiales.

La relación de s con la realidad

Un valor real positivo de **s**, por ejemplo, $\mathbf{s} = 5 + j0$, identifica una función que crece en forma exponencial $\mathbf{K}e^{+5t}$, donde **K** debe ser real si la función va a ser física. Un valor real negativo de s, como $\mathbf{s} = -5 + j0$, se refiere a una función $\mathbf{K}e^{-5t}$ que decrece de modo exponencial.

Un valor puramente imaginario de **s**, como $j10$, nunca puede asociarse con una cantidad que sólo es real. La forma funcional es $\mathbf{K}e^{j10t}$, que también se escribe como $\mathbf{K}(\cos 10t + j \operatorname{sen} 10t)$; resulta evidente que ésta posee una parte real y una imaginaria y que cada una es senoidal. Para construir una función real se necesita considerar los valores conjugados de s, tales como $\mathbf{s}_{1,2}\ \pm j10$, con los que deben asociarse valores conjugados de **K**. Sin embargo, en términos generales se identificaría cualquiera de las frecuencias complejas $\mathbf{s}_1 = +j10$ o $\mathbf{s}_2 = -j10$ con una tensión senoidal a la frecuencia angular de 10 rad/s; se entiende la presencia de la frecuencia compleja conjugada. La amplitud y el ángulo de fase de la tensión senoidal dependerán de la elección de **K** para cada una de las dos frecuencias. De tal modo, al elegir $\mathbf{s}_1 = j10$ y $\mathbf{K}_1 = 6 - j8$, donde

$$v(t) = \mathbf{K}_1 e^{\mathbf{s}_1 t} + \mathbf{K}_2 e^{\mathbf{s}_2 t}, \qquad \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^* \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^*$$

Se obtiene la senoide real $20\cos(10t - 53.1°)$.

Observar que $|6 - j8| = 10$, por lo que $V_m = 2|\mathbf{K}| = 20$. Asimismo, $ang(6 - j8) = -53.13°$.

De manera similar, un valor general de **s**, como $3 - j5$, se asocia con una cantidad real sólo si lo acompaña su conjugado, $3 + j5$. De nuevo en términos generales, se podría considerar a cualquiera de las dos frecuencias complejas conjugadas como si describieran una función senoidal que crece de manera exponencial, $e^{3t}\cos 5t$, la amplitud específica y el ángulo de fase dependerán también en este caso de los valores específicos de las **K** complejas conjugadas.

Por ahora ya se debería tener cierta apreciación de la naturaleza física de la frecuencia compleja **s**; en general, describe una senoide que varía de manera exponencial. La parte real de **s** se asocia con la variación exponencial; si es negativa, la función disminuye a medida que t aumenta; si es positiva, la función crece; y si es cero, la amplitud senoidal es constante. Cuanto mayor sea la *magnitud* de la parte real de **s**, mayor resultará la tasa de incremento o reducción exponencial. La parte imaginaria de **s** describe la variación senoidal y corresponde de manera específica a la frecuencia en radianes. Una magnitud grande de la parte imaginaria de **s** indica una función del tiempo que cambia con mayor rapidez.

Las magnitudes grandes de la parte real de **s**, de la parte imaginaria de **s** o de la magnitud de **s** indican una función que varía con rapidez.

Se suele utilizar la letra σ para designar la parte real de $\mathbf{s}$, y ω (no $j\omega$) para expresar la parte imaginaria:

$$\boxed{\mathbf{s} = \sigma + j\omega} \qquad [7]$$

Algunas veces la frecuencia en radianes se conoce como "frecuencia real", aunque esta terminología es muy confusa cuando se descubre que se debe decir en ese caso que ¡"la frecuencia real" es la parte imaginaria de "la frecuencia compleja"! Cuando sea necesario especificar, se denominará a $\mathbf{s}$ la frecuencia compleja, a σ la frecuencia neperiana, a ω la frecuencia radián y a $f = \omega/2\pi$ la frecuencia cíclica; cuando no haya posibilidad de confusión, se podría utilizar "frecuencia" para hacer referencia a cualquiera de estas cuatro cantidades. La *frecuencia neperiana* se mide en nepers por segundo, la *frecuencia radián* en radianes por segundo y la *frecuencia compleja* $\mathbf{s}$, en unidades que se denominan de forma indistinta nepers complejos por segundo o radianes complejos por segundo.

PRÁCTICA

14.1 Identificar todas las frecuencias complejas presentes en las funciones en tiempo real siguientes: (*a*) $(2e^{-100t} + e^{-200t})$ sen $2\,000t$; (*b*) $(2 - e^{-10t})\cos(4t + \phi)$; (*c*) $e^{-10t}\cos 10t$ sen $40t$.

14.2 Utilizar las constantes reales A, B, C, ϕ, etc., para construir la forma general de la función real del tiempo, correspondiente a una corriente que tiene componentes en estas frecuencias: (*a*) 0, 10, $-10\ \mathrm{s}^{-1}$; (*b*) -5, $j8$, $-5 - j8\ \mathrm{s}^{-1}$; (*c*) -20, 20, $-20 + j20$, $20 - j20\ \mathrm{s}^{-1}$.

Respuestas: 14.1: $-100 + j2000$, $-100 - j2000$, $-200 + j2000$, $-200 - j2000\ \mathrm{s}^{-1}$; $j4$, $-j4$, $-10 + j4$, $-10 - j4\ \mathrm{s}^{-1}$; $-10 + j30$, $-10 - j30$, $-10 + j50$, $-10 - j50\ \mathrm{s}^{-1}$; 14.2: $A + Be^{10t} + Ce^{-10t}$; $Ae^{-5t} + B\cos(8t + \phi_1) + Ce^{-5t}\cos(8t + \phi_2)$; $Ae^{-20t} + Be^{20t} + Ce^{-20t}\cos(20t + \phi_1) + De^{20t}\cos(20t + \phi_2)$.

14.2 FUNCIÓN FORZADA SENOIDAL AMORTIGUADA

Se ha dedicado suficiente tiempo a definir e interpretar de manera introductoria la frecuencia compleja; ahora es el momento de poner a trabajar este concepto y familiarizarse con él al observar qué es lo que hace y cómo se usa.

La senoide general que varía exponencialmente, que se puede representar con la función de tensión

$$v(t) = V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta) \qquad [8]$$

se expresa en términos de la frecuencia compleja s, mediante la identidad de Euler como antes:

$$v(t) = \mathrm{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \theta)}\} \qquad [9]$$

o

$$v(t) = \mathrm{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(-\omega t - \theta)}\} \qquad [10]$$

Cualquier representación es apropiada, así que ambas expresiones recuerdan que un par de frecuencias complejas conjugadas se asocia con una senoide o con una senoide amortiguada en forma exponencial. La ecuación [9] se relaciona en

forma más directa con la senoide amortiguada dada, de modo que se tratará fundamentalmente con ella. Agrupando factores, se sustituye luego $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ en:

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t}\}$$

y se obtiene

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{\mathbf{s}t}\} \qquad [11]$$

Antes de aplicar una función forzada de esta forma a cualquier circuito, se debe observar la semejanza de esta última representación de la senoide amortiguada con la representación correspondiente a una senoide *no amortiguada,* la cual se estudió en el capítulo 10:

$$\text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\}$$

La única diferencia es que ahora se tiene $\mathbf{s}$ donde antes se tuvo $j\omega$. En lugar de restringir las funciones forzadas senoidales y sus frecuencias en radianes, en este caso se amplía la notación para incluir la función forzada senoidal amortiguada a una frecuencia compleja. No es sorpresa en lo absoluto ver cómo más adelante en esta sección se formulará una descripción *en el dominio de la frecuencia* de la senoide amortiguada de modo exponencial exactamente de la misma manera en que se hizo con la senoide. Sólo se omitirá la notación Re{ } y se suprimirá $e^{\mathbf{s}t}$.

Ahora ya se puede aplicar la senoide amortiguada exponencialmente, según se indica mediante las ecuaciones [8], [9], [10] u [11], a una red eléctrica, donde la respuesta forzada —quizá una corriente en alguna rama de la red— es la respuesta que se desea. Dado que la respuesta forzada tiene la forma de la función forzada, así como su integral y sus derivadas, se podría suponer que la respuesta es

$$i(t) = I_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

o

$$i(t) = \text{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{\mathbf{s}t}\}$$

donde la frecuencia compleja tanto de la fuente como de la respuesta deben ser idénticas.

Si se recuerda en este momento que la parte *real* de la función forzada compleja produce la parte *real* de la respuesta, en tanto que la parte *imaginaria* origina la parte *imaginaria* de la respuesta, entonces se está dirigiendo uno también en este caso a la aplicación de una función forzada *compleja* en la red y se obtendrá una respuesta compleja cuya parte real es la respuesta real deseada. En realidad, se trabajará con la notación Re{ } omitida, aunque es necesario percatarse de que quizá se reinserte en cualquier tiempo y de que *es necesario* hacerlo, siempre que se desee la respuesta en el dominio del tiempo. De tal modo, dada la función forzada real

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{\mathbf{s}t}\}$$

se aplica la función forzada compleja $V_m e^{j\theta} e^{\mathbf{s}t}$; la respuesta forzada resultante $I_m e^{j\phi} e^{\mathbf{s}t}$ es compleja, y ésta debe tener como su parte real la respuesta forzada en el dominio del tiempo que se desea:

$$i(t) = \text{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{\mathbf{s}t}\}$$

La solución al problema de análisis de circuitos consiste en determinar la amplitud I_m y el ángulo de fase ϕ correspondientes a la respuesta desconocida.

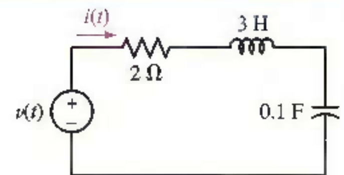
Antes de llevar a cabo en realidad los detalles del análisis de un problema y ver cómo el procedimiento se asemeja al del análisis senoidal, vale la pena describir los pasos del método básico.

- Primero se definen las características del circuito con un conjunto de ecuaciones integrodiferenciales de lazo o nodales.
- Luego las funciones forzadas dadas y las respuestas forzadas supuestas, todas en forma compleja, se sustituyen en las ecuaciones y se efectúan las integraciones y las diferenciaciones indicadas.
- Todos los términos de todas las ecuaciones contendrán en ese caso el mismo factor e^{st}. Por lo tanto, se divide todo entre este factor, o "se elimina e^{st}", entendiendo que éste debe reinsertarse si se desea la descripción en el dominio del tiempo de cualquier función de respuesta.

Con la notación Re{ } y el factor e^{st} eliminados, se convierten todas las tensiones y las corrientes del *dominio del tiempo* al *dominio de la frecuencia*. Las ecuaciones integrodiferenciales se convierten en ecuaciones algebraicas y su solución se obtiene con tanta facilidad como en el estado senoidal permanente. Se ilustra el método básico mediante un ejemplo numérico.

EJEMPLO 14.1

Aplicar la función forzada $v(t) = 60e^{-2t}\cos(4t + 10°)$ V al circuito *RLC* en serie de la figura 14.1 y especificar la respuesta forzada determinando los valores de I_m y ϕ en la expresión $i(t) = I_m e^{-2t}\cos(4t + \phi)$ en el dominio del tiempo.



■ **FIGURA 14.1** Circuito *RLC* en serie al que se aplica una función forzada senoidal amortiguada. Se desea una solución en el dominio de la frecuencia de $i(t)$.

Se expresa primero la función forzada en la notación Re{ }:

$$v(t) = 60e^{-2t}\cos(4t + 10°) = \text{Re}\{60e^{-2t}e^{j(4t+10°)}\}$$
$$= \text{Re}\{60e^{j10°}e^{(-2+j4)t}\}$$

o

$$v(t) = \text{Re}\{\mathbf{V}e^{st}\}$$

donde

$$\mathbf{V} = 60\underline{/10°} \qquad \text{y} \qquad s = -2 + j4$$

Luego de eliminar Re{ }, queda la función forzada compleja

$$60\underline{/10°}e^{st}$$

De modo similar se representa la respuesta reconocida mediante la cantidad compleja $\mathbf{I}e^{st}$, donde $\mathbf{I} = I_m\underline{/\phi}$.

El siguiente paso debe ser la ecuación integrodiferencial del circuito. A partir de la ley de Kirchhoff de tensión, se obtiene

$$v(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = 2i + 3\frac{di}{dt} + 10\int i\,dt$$

(Continúa en la siguiente página)

así que se sustituye la función forzada compleja dada y la respuesta forzada compleja supuesta en esta ecuación:

$$60\underline{/10^\circ}e^{st} = 2\mathbf{I}e^{st} + 3\mathbf{s}\mathbf{I}e^{st} + \frac{10}{\mathbf{s}}\mathbf{I}e^{st}$$

A continuación se suprime el factor común e^{st}:

$$60\underline{/10^\circ} = 2\mathbf{I} + 3\mathbf{s}\mathbf{I} + \frac{10}{\mathbf{s}}\mathbf{I}$$

y entonces

$$\mathbf{I} = \frac{60\underline{/10^\circ}}{2 + 3\mathbf{s} + 10/\mathbf{s}}$$

Sea ahora $\mathbf{s} = -2 + j4$ y se resuelve para la corriente compleja $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} = \frac{60\underline{/10^\circ}}{2 + 3(-2 + j4) + 10/(-2 + j4)}$$

Después de manipular los números complejos, se tiene

$$\mathbf{I} = 5.37\underline{/-106.6^\circ}$$

Por lo tanto, I_m es 5.37 A, ϕ corresponde a -106.6° y la respuesta forzada es igual a

$$i(t) = 5.37e^{-2t}\cos(4t - 106.6^\circ) \text{ A}$$

De este modo se ha resuelto el problema reduciendo una expresión basada en el *cálculo* a una expresión *algebraica*. Esto es sólo una pequeña indicación del poder de la técnica que se está a punto de estudiar.

PRÁCTICA

14.3 Dada la corriente fasorial que es equivalente a la corriente en el dominio del tiempo: (*a*) 24 sen $(90t + 60^\circ)$ A; (*b*) $24e^{-10t}\cos(90t + 60^\circ)$ A; (*c*) $24e^{-10t}\cos 60^\circ \times \cos 90t$ A. Si $\mathbf{V} = 12\underline{/35^\circ}$ V, determinar: $v(t)$ para s igual a (*d*) 0; (*e*) $-20\ \text{s}^{-1}$; (*f*) $-20 + j5\ \text{s}^{-1}$.

Respuestas: $24\underline{/-30^\circ}$ A; $24\underline{/60^\circ}$ A; $12\underline{/0^\circ}$ A; 9.83 V; $9.83e^{-20t}$ V; $12e^{-20t}\cos(5t + 35^\circ)$ V.

14.3 DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La meta constante ha sido el análisis: dada alguna función forzada en algún punto de un circuito lineal, determinar la respuesta en algún otro punto. En varios de los primeros capítulos se jugó sólo con funciones forzadas de cd y respuestas de la forma V_0e^0. Sin embargo, luego de la introducción de la inductancia y de la capacitancia, la excitación repentina en cd en los circuitos simples *RL* y *RC* produjo respuestas que variaban de manera exponencial con el tiempo: $V_0e^{\sigma t}$. Cuando se consideró el circuito *RLC*, las respuestas tomaron la forma de la senoide variable exponencialmente, $V_0e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$. Todo este trabajo se llevó a cabo en el dominio del tiempo, por lo que la función forzada de cd fue la única que se tomó en cuenta.

A medida que se avanzó en el uso de la función forzada senoidal, el tedio y la complejidad de resolver las ecuaciones integrodiferenciales orillaron a tratar

de encontrar una manera más fácil de resolver los problemas. El resultado: la transformada fasorial, así que se podría recordar que se transitó a través de la consideración de una función forzada compleja de la forma $V_0 e^{j\theta} e^{j\omega t}$. Tan pronto como se concluyó que no era necesario el factor que contenía a t, sólo quedó el fasor $V_0 e^{j\theta}$; se había llegado al *dominio de la frecuencia.*

Después de esto, una flexión menor de la corteza cerebral originó que se aplicara una función forzada de la forma $V_0 e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t}$, lo que condujo a la invención de la frecuencia compleja **s** y, por ello, a relegar todas las formas funcionales anteriores a casos especiales: dc ($\mathbf{s} = 0$), exponencial ($\mathbf{s} = \sigma$), senoidal ($\mathbf{s} = j\omega$) y la senoide exponencial ($\mathbf{s} = \sigma + j\omega$). Por analogía con la experiencia previa con fasores, se vio que en estos casos se podría omitir el factor que contenía a t y se obtuvo de nuevo una solución al trabajar en el dominio de la frecuencia.

La transformada bilateral de Laplace

Se sabe que las funciones forzadas senoidales propician respuestas senoidales y que además las funciones forzadas exponenciales dan como resultado respuestas exponenciales. Sin embargo, los ingenieros pragmáticos se deben enfrentar con muchas formas de onda que no son senoidales ni exponenciales, como las ondas cuadradas, las formas de onda de diente de sierra y los pulsos que se inician en instantes arbitrarios. Cuando tales funciones forzadas se aplican a un circuito lineal, se ve que la respuesta no es similar a la forma de la onda de excitación, ni tampoco es exponencial. Como consecuencia, no se pueden eliminar los términos que contienen t para formar una respuesta en el dominio de la frecuencia, lo cual es bastante desafortunado, pues trabajar en él demostró ser mucho más agradable.

Sin embargo, existe una solución que aprovecha una técnica que permitirá desarrollar cualquier función a una *suma* de formas de onda exponenciales, cada una con su propia frecuencia compleja. Dado que se están considerando circuitos lineales, se sabe que la respuesta total del circuito se obtiene simplemente mediante la suma de la respuesta individual a cada forma de onda exponencial. Y al tratar cada forma de onda exponencial, se ignoraría de nuevo todo término que contenga a t y se trabajaría en cambio en el dominio de la *frecuencia.* Desafortunadamente, se requiere un número infinito de términos exponenciales para representar con precisión una función general del tiempo, por lo que optar por un método de fuerza bruta y aplicar la superposición a las series exponenciales podría ser poco conveniente. Mejor se sumarán estos términos efectuando una integración, lo que tendrá como resultado una función en el dominio de la frecuencia.

Se formalizará este método utilizando lo que se conoce como la ***transformada de Laplace***, definida para una función general $f(t)$ como

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\, dt \qquad [12]$$

La deducción matemática de esta operación integral requiere la comprensión de las series y de la transformada de Fourier, que se explican en los capítulos subsecuentes. Sin embargo, el concepto fundamental detrás de la transformada de Laplace se entiende con base en el análisis de la frecuencia compleja y en la experiencia previa con fasores y con la conversión en ambos sentidos entre los dominios del tiempo y de la frecuencia. En realidad, esto es precisamente lo que hace la transformada de Laplace: convierte la función general $f(t)$ en el dominio del tiempo en una representación correspondiente, $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ en el dominio de la frecuencia.

La transformada inversa bilateral de Laplace

La ecuación [12] define la transformada de *dos lados,* o *bilateral,* de Laplace de $f(t)$. El término *dos lados* o *bilateral* se usa para subrayar el hecho de que tanto los valores positivos como los negativos de t se incluyen en el intervalo de integración. La operación inversa, conocida a menudo como ***transformada inversa de Laplace***, también se define como la expresión integral[1]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st}\mathbf{F}(\mathbf{s})\, ds \qquad [13]$$

donde la constante real σ_0 se incluye en los límites para garantizar la convergencia de la integral impropia; las dos ecuaciones [12] y [13] constituyen el par de transformadas bilaterales de Laplace. La buena noticia es que nunca se necesita recurrir a la ecuación [13] en el estudio del análisis de circuitos: hay una alternativa rápida y fácil que más adelante se aprenderá.

La transformada unilateral de Laplace

En muchos de los problemas de análisis de circuitos, las funciones forzada y de respuesta no existen para siempre en el tiempo, sino que aparecen en algún instante específico que casi siempre se elige como $t = 0$. De tal modo, en funciones de tiempo que no existen para $t < 0$ o en aquellas funciones de tiempo cuyo comportamiento de $t < 0$ no es de interés, la descripción en el dominio del tiempo se considera como $v(t)u(t)$. La integral de definición de la transformada de Laplace se toma con el límite inferior en $t = 0^-$ a fin de incluir el efecto de cualquier discontinuidad en $t = 0$, tal como un impulso o una singularidad de orden superior. La transformada de Laplace correspondiente es entonces

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)u(t)\, dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Esta igualdad define la transformada de Laplace *unilateral* de $f(t)$, o simplemente la *transformada de Laplace* de $f(t)$, dándose por entendido el término unilateral. La expresión de la transformada inversa permanece constante, pero cuando se evalúa, se entiende que es válida sólo para $t > 0$. Aquí radica entonces la definición del par de transformadas de Laplace que se utilizará en lo sucesivo:

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt} \qquad [14]$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st}\mathbf{F}(\mathbf{s})\, ds \\ f(t) &\Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{s}) \end{aligned}} \qquad [15]$$

La cursiva $\mathcal{L}$ también se usaría para indicar la operación de la transformada directa o inversa de Laplace:

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f(t)\} \qquad \text{y} \qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$$

(1) Si se pasa por alto el factor confuso $1/2\pi j$ y se ve la integral como una sumatoria sobre todas las frecuencias, de modo que $f(t) \propto \Sigma[\mathbf{F}(\mathbf{s})\, ds]e^{st}$, se refuerza la noción de que $f(t)$ es en realidad una suma de términos de frecuencia compleja que tienen una magnitud proporcional a $\mathbf{F}(\mathbf{s})$.

EJEMPLO 14.2

Determinar la transformada de Laplace de la función $f(t) + 2u(t-3)$.

Para determinar la transformada unilateral de Laplace de $f(t) = 2u(t-3)$, se debe evaluar la integral

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\, dt$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} 2u(t-3)\, dt$$

$$= 2\int_{3}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\, dt$$

Simplificando, se encuentra

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{-2}{\mathbf{s}} e^{-\mathbf{s}t}\Big|_3^{\infty} = \frac{-2}{\mathbf{s}}(0 - e^{-3\mathbf{s}}) = \frac{2}{\mathbf{s}} e^{-3\mathbf{s}}$$

PRÁCTICA

14.4 Sea $f(t) = -6e^{-2t}[u(t+3) - u(t-2)]$. Determinar: (*a*) la $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ bilateral; (*b*) la $\mathbf{F}(\mathbf{s})$. unilateral.

Respuestas: $\frac{6}{2+\mathbf{s}}[e^{-4-2\mathbf{s}} - e^{6+3\mathbf{s}}]$, $\frac{6}{2+\mathbf{s}}[e^{-4-2\mathbf{s}} - 1]$.

14.4 TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE FUNCIONES DE TIEMPO SIMPLES

En esta sección se empezará a integrar un catálogo de transformadas de Laplace de las funciones de tiempo que se presentan con mayor frecuencia en el análisis de circuitos; por ahora se supondrá que la función de interés es una tensión, aunque una elección de este tipo es estrictamente arbitraria. Se creará este catálogo, al menos al principio, utilizando la definición

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} v(t)\, dt = \mathcal{L}\{v(t)\}$$

la cual, junto con la expresión de la transformada inversa

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{\mathbf{s}t}\mathbf{V}(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}(\mathbf{s})\}$$

establece una correspondencia uno a uno entre $v(t)$ y $\mathbf{V}(\mathbf{s})$. Esto es, para toda $v(t)$ para la que exista $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ hay una $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ única. En este punto quizá se vea con cierta angustia la más bien siniestra forma de la transformada inversa. ¡No hay razón para asustarse! Como se verá dentro de poco, *un estudio introductorio de la teoría de la transformada de Laplace no requiere la evaluación real de esta integral.* Al ir del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y al aprovechar la unicidad que acaba de mencionarse, cualquiera puede ser capaz de generar un catálogo de pares de transformadas que ya contienen la función de tiempo correspondiente para casi toda transformada que se desee invertir.

Sin embargo, antes de seguir es necesario hacer una pausa para considerar si existe alguna posibilidad de que la transformada incluso quizá no exista para alguna $v(t)$ para la cual hay interés. Un conjunto de condiciones suficiente para garantizar la convergencia absoluta de la integral de Laplace de $\text{Re}\{\mathbf{s}\} > \sigma_0$ es:

1. La función $v(t)$ es integrable en todo intervalo finito $t_1 < t < t_2$, donde $0 \le t_1 < t_2 < \infty$.
2. $\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma_0 t}|v(t)|$ existe para algún valor de σ_0.

El analista de circuitos rara vez estudia las funciones de tiempo que no satisfacen estas condiciones.[2]

Función escalón unitario $u(t)$

Considerar ahora algunas transformadas específicas. Se examina primero la transformada de Laplace de la función escalón unitario $u(t)$. Tomando en cuenta la ecuación definida, se escribiría

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} u(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{\mathbf{s}} e^{-\mathbf{s}t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\mathbf{s}}$$

para $\text{Re}\{\mathbf{s}\} > 0$, satisfaciendo la condición 2. Por lo tanto,

La notación de doble flecha se suele usar para indicar pares de transformadas de Laplace.

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}} \qquad [16]$$

y el primer par de transformadas de Laplace se estableció con gran facilidad.

Función impulso unitario $\delta(t - t_0)$

Otra función de singularidad cuya transformada reviste un considerable interés es la función impulso unitario $\delta(t - t_0)$, la cual, tal como se grafica en la figura 14.2, parece bastante extraña en un principio, aunque es muy útil en la práctica. La función impulso unitario se define para tener un área unitaria, por lo que

$$\delta(t - t_0) = 0 \qquad t \ne t_0$$

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t - t_0)\, dt = 1$$

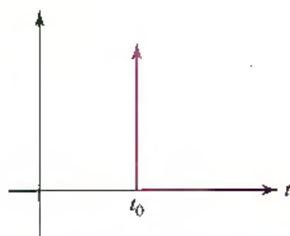


FIGURA 14.2 La función de impulso unitario $\delta(t - t_0)$ se usa a menudo para aproximar un impulso de señal cuya duración es muy corta, en comparación con las constantes de tiempo del circuito.

donde ε es una constante pequeña. Así, esta "función" (un término al que muchos puristas matemáticos hacen reverencia) tiene un valor distinto de cero sólo en el punto t_0. Por lo tanto, para $t_0 > 0^-$, se encuentra que la transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\delta(t - t_0)\, dt = e^{-\mathbf{s}t_0}$$

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-\mathbf{s}t_0} \qquad [17]$$

En particular, observar que se obtiene

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \qquad [18]$$

para $t_0 = 0$.

Otra característica interesante de la función impulso unitario se conoce como ***propiedad de filtrado***. Considerar la integral de la función impulso multiplicada

(2) Ejemplos de tales funciones son e^{t^2} y e^{e^t}, pero no t^n ni n^t. Para una explicación un poco más detallada de la transformada de Laplace y sus aplicaciones, consulte la obra de Clare D. McGillem y George R. Cooper, *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, 3a. ed., Oxford University Press, North Carolina, 1991, capítulo 5.

por una función arbitraria $f(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt$$

Puesto que la función $\delta(t-t_0)$ es cero en todos lados, excepto en $t=t_0$, el valor de la integral es simplemente $f(t_0)$. La propiedad resulta ser *muy* útil para simplificar las expresiones integrales que contienen la función impulso unitario.

Función exponencial $e^{-\alpha t}$

Recordando el previo interés en la función exponencial, se examina su transformada:

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$

y, por lo tanto,

$$e^{-\alpha t}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+\alpha} \qquad [19]$$

Se entiende que $\text{Re}\{s\} > -\alpha$.

Función rampa $t\,u(t)$

Como un ejemplo final, por el momento se considerará la función rampa $tu(t)$. Se obtiene

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}$$

$$tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} \qquad [20]$$

ya sea mediante integración directa por partes o a partir de una tabla de integrales.

¿Y qué hay respecto de la función $te^{-\alpha t}u(t)$? Se deja para el lector demostrar que

$$te^{-\alpha t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^2} \qquad [21]$$

Por supuesto, existen muchas funciones en el dominio del tiempo adicionales que valen la pena considerar, pero sería mejor si se hiciera una pausa por un momento para tener en cuenta el proceso inverso —la transformada inversa de Laplace— antes de agregar más funciones a la lista.

PRÁCTICA

14.5 Determinar $\mathbf{V}(s)$ si $v(t)$ es igual a (*a*) $4\delta(t) - 3u(t)$; (*b*) $4\delta(t-2) - 3tu(t)$; (*c*) $[u(t)][u(t-2)]$.

14.6 Determinar $v(t)$ si $\mathbf{V}(s)$ es igual a (*a*) 10; (*b*) $10/s$; (*c*) $10/s^2$; (*d*) $10/[s(s+10)]$; (*e*) $10s/(s+10)$.

Respuestas: 14.5: $(4s-3)/s$; $4e^{-2s} - (3/s^2)$; e^{-2s}/s. 14.6: $10\delta(t)$; $10u(t)$; $10tu(t)$; $u(t) - e^{-10t}u(t)$; $10\delta(t) - 100e^{-10t}u(t)$.

14.5 TÉCNICAS DE LA TRANSFORMADA INVERSA

Teorema de linealidad

Se dijo que una expresión integral (ecuación [13]) se puede aplicar para convertir una expresión en el dominio s al dominio del tiempo. Asimismo, se hizo referencia al hecho de que dicho método podría evitarse si se explota la característica de unicidad de cualquier par de transformadas de Laplace. Con la finalidad de capitalizar completamente este hecho, se debe presentar en primera instancia uno de los teoremas de la transformada de Laplace más famosos y de mayor utilidad: el ***teorema de linealidad***, el cual establece que la transformada de Laplace de la suma de dos o más funciones del tiempo es igual a la suma de las transformadas de las funciones de tiempo individuales. En el caso de dos funciones de tiempo, se tiene que

Ésta se conoce como la *propiedad aditiva* de la transformada de Laplace.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}[f_1(t) + f_2(t)]\,dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_1(t)\,dt + \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_2(t)\,dt \\ &= \mathbf{F}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{s})\end{aligned}$$

Como un ejemplo del uso de este teorema, suponga que se tiene una transformada de Laplace $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ y que se desea conocer la función de tiempo correspondiente $v(t)$. Muchas veces se podrá descomponer $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ en la suma de dos o más funciones, digamos, $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ y $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$, cuyas transformadas inversas, $v_1(t)$ y $v_2(t)$, ya están tabuladas. En ese caso se vuelve un asunto simple aplicar el teorema de linealidad y escribir

$$\begin{aligned}v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}(\mathbf{s})\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s})\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} = v_1(t) + v_2(t)\end{aligned}$$

Otra consecuencia importante del teorema de linealidad resulta evidente al estudiar la definición de la transformada de Laplace. En razón de que se trabaja simplemente con una integral, *la transformada de Laplace de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la transformada de Laplace de la función.* En otras palabras,

Ésta se conoce como la *propiedad de homogeneidad* de la transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{kv(t)\} = k\mathcal{L}\{v(t)\}$$

o

$$kv(t) \Leftrightarrow k\mathbf{V}(\mathbf{s}) \qquad [22]$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Este resultado es en extremo útil en muchas situaciones que se presentan en el análisis de circuitos, como está a punto de comprobarse.

EJEMPLO **14.3**

Dada una función $\mathbf{G}(\mathbf{s}) = 7/\mathbf{s} - 31/(\mathbf{s} + 17)$, encontrar $g(t)$.

Esta función en el dominio s se compone de la suma de dos términos, $7/\mathbf{s}$ y $-31/(\mathbf{s} + 17)$. A través del teorema de linealidad se sabe que $g(t)$ estará

también compuesto por dos términos, cada uno de los cuales será la transformada inversa de Laplace de uno de los dos términos en el dominio s:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{s+17}\right\}.$$

Se comienza con el primer término. La propiedad de homogeneidad de la transformada de Laplace permite escribir que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s}\right\} = 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 7u(t).$$

Así, se ha utilizado el par de transformadas conocido como $u(t) \Leftrightarrow 1/s$ y la propiedad de homogeneidad para encontrar este primer componente de $g(t)$.

De una manera muy similar, se puede ver que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{s+17}\right\} = 31e^{-17t}u(t)$. Colocando estos dos términos juntos se tiene que

$$g(t) = [7 - 31e^{-17t}]u(t).$$

PRÁCTICA

14.7 Dada la función $\mathbf{H}(s) = \frac{7}{s^2} + \frac{31}{(s+17)^2}$, encontrar $h(t)$.

Respuesta: $h(t) = [7 + 31e^{-17t}]tu(t)$.

Técnicas de la transformada inversa de funciones racionales

Al analizar circuitos con elementos múltiples de almacenamiento de energía, muchas veces se encuentran expresiones en el dominio s que son razones de polinomios s. Por ello, se espera encontrar de manera rutinaria expresiones de la forma

$$\mathbf{V}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)}$$

donde $\mathbf{N}(s)$ y $\mathbf{D}(s)$ son polinomios en s. Los valores de s que originan a $\mathbf{N}(s) = 0$ se conocen como ***ceros*** de $\mathbf{V}(s)$, y los valores de s que dan lugar a $\mathbf{D}(s) = 0$ como ***polos*** de $\mathbf{V}(s)$.



En la práctica, rara vez se necesita recurrir en todo momento a la ecuación [13] para funciones que se encuentran en el análisis de circuitos, siempre y cuando uno sea astuto y utilice las diversas técnicas presentadas en este capítulo.

En vez de arremangarse la camisa y apelar a la ecuación [13] cada vez que sea necesario encontrar una transformada inversa, en muchas ocasiones estas expresiones se pueden descomponer utilizando el método de residuos en términos más simples, cuyas transformadas inversas ya se conocen. El criterio para lo anterior es que $\mathbf{V}(s)$ debe ser una ***función racional***, para la cual el grado del numerador $\mathbf{N}(s)$ debe ser menor que el del denominador $\mathbf{D}(s)$. Si no lo es, primero se debe llevar a cabo una simple división, como se muestra en el ejemplo siguiente. El resultado incluirá una función impulso (suponiendo que el grado del numerador sea el mismo que el del denominador) y una función racional. La transformada inversa de la primera es sencilla; la aplicación directa del método de los residuos se aplicará a la función racional si su transformada inversa no se conoce todavía.

EJEMPLO **14.4**

Encontrar la transformada inversa de $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = 2\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}}$.

F(s) no es una función racional, por lo que se comienza realizando la división larga:

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}\overline{)2\mathbf{s}+4}\quad\text{cociente } 2;\quad \frac{2\mathbf{s}}{4}$$

por lo que $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = 2 + (4/\mathbf{s})$. De acuerdo con el teorema de linealidad,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\} = \mathcal{L}^{-1}\{2\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{\mathbf{s}}\right\} = 2\delta(t) + 4u(t).$$

(Se debe observar que esta función particular puede simplificarse sin utilizar el proceso de la división larga; se seleccionó dicho procedimiento a fin de proporcionar un ejemplo del proceso básico.)

PRÁCTICA

14.8 Dada la función $\mathbf{Q}(\mathbf{s}) = \frac{3\mathbf{s}^2 - 4}{\mathbf{s}^2}$, encontrar $q(t)$.

Respuesta: $q(t) = 3\delta(t) - 4tu(t)$.

Al emplear el método de residuos, efectuando en esencia un desarrollo en fracciones parciales de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$, se centra la atención en las raíces del denominador. De tal manera, se requiere factorizar el polinomio en función de s que abarca a $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ en un producto de términos binomiales. Las raíces de $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ podrían ser cualquier combinación de raíces distintas o repetidas y tal vez sean reales o complejas. Vale la pena señalar, sin embargo, que las raíces complejas siempre aparecen como pares conjugados, siempre que sean reales los coeficientes de $\mathbf{D}(\mathbf{s})$.

Polos distintos y el método de los residuos

Como un ejemplo específico, se determinará la transformada inversa de Laplace de

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)(\mathbf{s}+\beta)}$$

El denominador se factorizó en dos raíces distintas, $-\alpha$ y $-\beta$. Aunque es posible sustituir esta expresión en la ecuación de definición de la transformada inversa, resulta más fácil utilizar el teorema de linealidad. Mediante el uso del desarrollo en fracciones parciales, se divide la transformada particular entre la suma de dos transformadas más simples:

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{A}{(\mathbf{s}+\alpha)} + \frac{B}{(\mathbf{s}+\beta)}$$

donde A y B se determinan mediante cualquiera de los diversos métodos. Tal vez la solución más rápida se obtenga al reconocer que

$$A = \lim_{\mathbf{s}\to-\alpha}\left[(\mathbf{s}+\alpha)\mathbf{V}(\mathbf{s}) - \frac{(\mathbf{s}+\alpha)}{(\mathbf{s}+\beta)}B\right]$$

$$= \lim_{\mathbf{s}\to-\alpha}\left[\frac{1}{(\mathbf{s}+\beta)} - 0\right] = \frac{1}{\beta-\alpha}$$

En esta ecuación se emplea la versión de una sola fracción (es decir, no desarrollada) de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$.

Si se acepta que el segundo término es siempre cero, en la práctica siempre se escribirá

$$A = (\mathbf{s}+\alpha)\mathbf{V}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=-\alpha}$$

De la misma manera,

$$B = (\mathbf{s}+\beta)\mathbf{V}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=-\beta} = \frac{1}{\alpha-\beta}$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{1/(\beta-\alpha)}{(\mathbf{s}+\alpha)} + \frac{1/(\alpha-\beta)}{(\mathbf{s}+\beta)}$$

Ya se evaluaron las transformadas inversas de esta forma, por lo que

$$v(t) = \frac{1}{\beta-\alpha}e^{-\alpha t}u(t) + \frac{1}{\alpha-\beta}e^{-\beta t}u(t)$$
$$= \frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$$

Si se desea, se podría incluir ahora lo anterior como una nueva entrada en el catálogo de pares de Laplace:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)(\mathbf{s}+\beta)}$$

Este método se extiende sin ninguna dificultad a funciones cuyos denominadores son polinomios función de s de orden superior, si bien tal vez las operaciones se vuelvan un poco tediosas. Debe advertirse que no se especificó que las constantes A y B deben ser reales. Sin embargo, en situaciones en las que α y β son complejas, se encuentra que éstas también son conjugados complejos (lo anterior no se requiere matemáticamente, aunque sí en circuitos físicos). En casos de ese tipo, se encuentra que $A = B^*$; en otras palabras, los coeficientes también serán conjugados complejos.



EJEMPLO 14.5

Encontrar la transformada inversa de

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}) = \frac{7\mathbf{s}+5}{\mathbf{s}^2+\mathbf{s}}.$$

Se puede observar que $\mathbf{P}(\mathbf{s})$ es una función racional (el grado del numerador es *uno*, mientras que el grado del denominador es *dos*), por lo que se comienza por factorizar el denominador y escribir

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}) = \frac{7\mathbf{s}+5}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+1)} = \frac{a}{\mathbf{s}} + \frac{b}{\mathbf{s}+1}$$

donde el paso siguiente es determinar los valores de a y b. Aplicando el método de los residuos,

$$a = \left.\frac{7\mathbf{s}+5}{\mathbf{s}+1}\right|_{\mathbf{s}=0} = 5 \quad \text{y} \quad b = \left.\frac{7\mathbf{s}+5}{\mathbf{s}}\right|_{\mathbf{s}=-1} = 2$$

(Continúa en la siguiente página)

Entonces se puede escribir **P**(s) como

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}) = \frac{5}{\mathbf{s}} + \frac{2}{\mathbf{s}+1}$$

cuya transformada inversa es simplemente $p(t) = [5 + 2e^{-t}]u(t)$.

PRÁCTICA

14.9 Dada la función $\mathbf{Q}(\mathbf{s}) = \dfrac{11\mathbf{s}+30}{\mathbf{s}^2+3\mathbf{s}}$, encontrar $q(t)$.

Respuesta: $q(t) = [10 + e^{-3t}]u(t)$.

Polos repetidos

La situación que falta es la de polos repetidos. Considerar la función

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{(\mathbf{s}-p)^n}$$

que se desarrolla de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{a_n}{(\mathbf{s}-p)^n} + \frac{a_{n-1}}{(\mathbf{s}-p)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{(\mathbf{s}-p)}$$

Para determinar cada constante, se multiplica primero la versión no desarrollada de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ por $(\mathbf{s}-p)^n$. La constante a_n se determina evaluando simplemente la expresión que resulta en $\mathbf{s} = p$. Las constantes restantes se obtienen al diferenciar la expresión $(\mathbf{s}-p)^n\mathbf{V}(\mathbf{s})$ el número apropiado de veces, antes de evaluar en $\mathbf{s} = p$, y dividir entre un término factorial. El procedimiento de diferenciación elimina las constantes que se encontraron antes, y la evaluación en $\mathbf{s} = p$ elimina las constantes que quedan. Por ejemplo, a_{n-2} se determina al evaluar

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\mathbf{s}^2}[(\mathbf{s}-p)^n\mathbf{V}(\mathbf{s})]_{\mathbf{s}=p}$$

y el término a_{n-k} se obtiene evaluando

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\mathbf{s}^k}[(\mathbf{s}-p)^n\mathbf{V}(\mathbf{s})]_{\mathbf{s}=p}$$

Para ilustrar el procedimiento básico, determinar la transformada inversa de Laplace de una función que tiene una combinación de ambas situaciones: un polo en $\mathbf{s} = 0$ y dos polos en $\mathbf{s} = -6$.

EJEMPLO **14.6**

Determinar la transformada inversa de la función

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{2}{\mathbf{s}^3 + 12\mathbf{s}^2 + 36\mathbf{s}}$$

Se observa que el denominador, que se factoriza sin dificultad, origina

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)(\mathbf{s}+6)} = \frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}6$$

Como se prometió, hay en realidad tres polos uno en s = 0 y dos en s = −6. A continuación, se desarrolla la función hasta

$$\mathbf{V}(s) = \frac{a_1}{(s+6)^2} + \frac{a_2}{(s+6)} + \frac{a_3}{s}$$

y se aplica el nuevo procedimiento para obtener las constantes desconocidas a_1 y a_2; se encontrará a_3 mediante el procedimiento anterior. Por lo tanto,

$$a_1 = \left[(s+6)^2 \frac{2}{s(s+6)^2}\right]_{s=-6} = \left.\frac{2}{s}\right|_{s=-6} = \frac{-1}{3}$$

y

$$a_2 = \frac{d}{ds}\left[(s+6)^2 \frac{2}{s(s+6)^2}\right]_{s=-6} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s}\right)\right|_{s=-6} = \left.\frac{-2}{s^2}\right|_{s=-6} = \frac{-1}{18}$$

La constante restante a_3 se obtiene utilizando el procedimiento para polos distintos:

$$a_3 = \left. s\frac{2}{s(s+6)^2}\right|_{s=0} = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

En consecuencia, se escribiría ahora $\mathbf{V}(s)$ como

$$\mathbf{V}(s) = \frac{-\frac{1}{3}}{(s+6)^2} + \frac{-\frac{1}{18}}{(s+6)} + \frac{\frac{1}{18}}{s}$$

Utilizando el teorema de linealidad, la transformada inversa de $\mathbf{V}(s)$ se obtiene ahora mediante la determinación de la transformada inversa de cada uno de estos tres términos. Se observa que el primer término de la derecha es de la forma

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

y utilizando la ecuación [21] se encuentra que su transformada inversa corresponde a $-\frac{1}{3}te^{-6t}u(t)$. De manera similar, se descubre que la transformada inversa del segundo término es $-\frac{1}{18}e^{-6t}u(t)$ y que el tercer término es simplemente $\frac{1}{18}u(t)$. Así:

$$v(t) = -\tfrac{1}{3}te^{-6t}u(t) - \tfrac{1}{18}e^{-6t}u(t) + \tfrac{1}{18}u(t)$$

o, de forma más compacta,

$$v(t) = \tfrac{1}{18}[1 - (1+6t)e^{-6t}]u(t)$$

PRÁCTICA

14.10 Determinar $v(t)$ si $\mathbf{V}(s) = 2s/(s^2+4)^2$.

Respuesta: $\frac{1}{2}t$ sen $2t\, u(t)$.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

MATLAB, un paquete de análisis numérico muy poderoso, se utiliza para apoyar de diferentes maneras en la solución de ecuaciones que surgen del análisis de circuitos con excitación variable en el tiempo. La técnica más directa emplea las rutinas de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias

(ODE, *ordinary differential equation*) *ode*23() y *ode*45(). Ambas se fundamentan en métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales, y de ellas *ode*45() tiene la mayor exactitud. Sin embargo, la solución se determina sólo en puntos discretos y, en consecuencia, no se conoce para todos los valores del tiempo. En muchas aplicaciones esto resulta adecuado, siempre que se use una densidad de puntos suficiente.

La técnica de la transformada de Laplace ofrece medios para obtener una expresión exacta de la solución de ecuaciones diferenciales, y como tal tiene muchas ventajas respecto al uso de las técnicas de solución numérica ODE. Otra ventaja importante de la técnica de la transformada de Laplace se volverá patente en los capítulos siguientes, cuando se estudie la importancia de la forma de las expresiones en el dominio s, en particular luego de que se factoricen los polinomios del denominador.

Como ya se observó, las tablas de búsqueda son muy útiles cuando se trabaja con transformadas de Laplace, si bien en métodos de residuos quizás sea un método tedioso para funciones con polinomios de orden superior en sus denominadores. En estas situaciones MATLAB también puede ser de ayuda, pues contiene varias funciones útiles para manipular expresiones de polinomios.

En MATLAB, el polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

se almacena como el vector $[a_n \; a_{n-1} \; \ldots \; a_1 \; a_0]$.

En consecuencia, para definir los polinomios $\mathbf{N(s)} = 2$ y $\mathbf{D(s)} = \mathbf{s}^3 + 12\mathbf{s}^2 + 36\mathbf{s}$ se escribe

```
EDU» N = [2];
EDU» D = [1 12 36 0];
```

Se obtienen las raíces de cualquier polinomio recurriendo a la función *roots*(**p**), donde **p** es un vector que contiene los coeficientes del polinomio. Por ejemplo,

```
EDU» q = [1 8 16];
EDU» roots(q)
```

produce:

```
ans =
  – 4
  – 4
```

MATLAB también permite determinar los residuos de la función racional $\mathbf{N(s)}/\mathbf{D(s)}$ utilizando la función *residue*(). Por ejemplo,

```
EDU» [r p y] = residue(N, D);
```

da como resultado tres vectores: **r**, **p** y **y**, tales que:

$$\frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}} = \frac{r_1}{x - p_1} + \frac{r_2}{x - p_2} + \cdots + \frac{r_n}{x - p_n} + \mathbf{y(s)}$$

en el caso de polos no múltiples, y en el de n polos múltiples

$$\frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}} = \frac{r_1}{(x - p)} + \frac{r_2}{(x - p)^2} + \cdots + \frac{r_n}{(x - p)^n} + \mathbf{y(s)}$$

Observar que en la medida en que el orden del polinomio del numerador sea menor que el del polinomio del denominador, el vector y(s) siempre será nulo.

Ejecutando el comando sin utilizar punto y coma (;) se obtiene la salida

$r =$

-0.0556
-0.3333
0.0556

$p =$

-6
-6
0

$y =$

$[\,]$

que concuerda con la respuesta que se encontró en el ejemplo 14.6.

14.6 TEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ahora se pueden considerar dos teoremas que podrían verse en forma colectiva como la *raison d'être (la razón de ser)* de las transformadas de Laplace en el análisis de circuitos: los teoremas de diferenciación e integración respecto del tiempo. Ambos ayudan a transformar las derivadas e integrales que aparecen en las ecuaciones de circuito en el dominio del tiempo.

Teorema de diferenciación respecto del tiempo

Se estudiará primero la diferenciación en el tiempo al considerar una función de tiempo $v(t)$ cuya transformada de Laplace $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ se sabe que existe. Se desea la transformada de la primera derivada de $v(t)$,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{dv}{dt}\,dt$$

Lo anterior puede integrarse por partes:

$$U = e^{-st} \qquad dV = \frac{dv}{dt}dt$$

y el resultado es

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = v(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + \mathbf{s}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}v(t)\,dt$$

El primer término de la derecha debe tender a cero, a medida que t aumenta sin límite; en otro caso, $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ no existiría. Por consiguiente,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = 0 - v(0^-) + \mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s})$$

y

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s}) - v(0^-) \qquad [23]$$

Se desarrollarían relaciones similares para las derivadas de orden superior:

$$\frac{d^2v}{dt^2} \Leftrightarrow \mathbf{s}^2\mathbf{V}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}v(0^-) - v'(0^-) \qquad [24]$$

$$\frac{d^3v}{dt^3} \Leftrightarrow \mathbf{s}^3\mathbf{V}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}^2v(0^-) - \mathbf{s}v'(0^-) - v''(0^-) \qquad [25]$$

donde $v'(0^-)$ es el valor de la primera derivada de $v(t)$ evaluada en $t = 0^-$, $v''(0^-)$ corresponde al valor inicial de la segunda derivada de $v(t)$, etcétera. Cuando todas las condiciones iniciales son cero, diferenciar una vez con respecto a t en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación por $\mathbf{s}$ en el dominio de la frecuencia; diferenciar dos veces en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación por $\mathbf{s}^2$ en el dominio de la frecuencia, etc. Por lo tanto, *la diferenciación en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio de la frecuencia*. ¡Ésta es una simplificación sustantiva! Se debe empezar también a ver que, cuando las condiciones iniciales no son cero, su presencia se sigue considerando. Un ejemplo sencillo servirá para demostrarlo.

EJEMPLO 14.7

Dado el circuito *RL* en serie de la figura 14.3, determinar la corriente que circula por la resistencia de 4 Ω resistor.

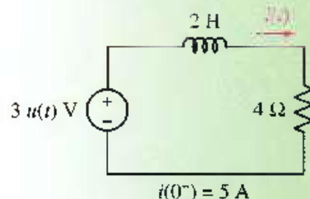


FIGURA 14.3 Circuito que se analiza transformando la ecuación diferencial $2\,di/dt + 4i = 3u(t)$ en $2[\mathbf{sI}(\mathbf{s}) - i(0^-)] + 4\mathbf{I}(\mathbf{s}) = 3/\mathbf{s}$.

Identificar el objetivo del problema.

Es necesario encontrar la expresión de la corriente denominada $i(t)$.

Recopilar la información conocida.

Una tensión de escalón activa la red, así que se tiene un valor inicial de la corriente (en $t = 0^-$) de 5 A.

Elaborar un plan.

Si se aplica la LKT a este circuito, se obtendrá una ecuación diferencial con $i(t)$ como la incógnita. Sin embargo, en lugar de resolver la ecuación diferencial resultante, como se hizo con anterioridad, ahora es posible transformar primero al dominio de la frecuencia tomando la transformada de Laplace de cada término.

Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.

Mediante la LKT se expresa la ecuación de un solo lazo en el dominio del tiempo, así que se encuentra

$$2\frac{di}{dt} + 4i = 3u(t)$$

Ahora se calcula la transformada de Laplace de cada término, por lo que

$$2[\mathbf{sI}(\mathbf{s}) - i(0^-)] + 4\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{3}{\mathbf{s}}$$

Determinar, si se requiere, información adicional.

Se tiene una ecuación que se resolvería para la representación $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ en el dominio de la frecuencia de nuestro objetivo, $i(t)$.

Buscar la solución.

A continuación se despeja $\mathbf{I}(\mathbf{s})$, sustituyendo $i(0^-) = 5$:

$$(2\mathbf{s} + 4)\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{3}{\mathbf{s}} + 10$$

y

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{1.5}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)} + \frac{5}{\mathbf{s}+2}$$

Aplicando el método de los residuos al primer término,

$$\left.\frac{1.5}{\mathbf{s}+2}\right|_{\mathbf{s}=0} = 0.75 \quad \text{y} \quad \left.\frac{1.5}{\mathbf{s}}\right|_{\mathbf{s}=-2} = -0.75$$

por lo que

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{0.75}{\mathbf{s}} + \frac{4.25}{\mathbf{s}+2}$$

Se utilizan después los pares conocidos de transformadas para invertir

$$\begin{aligned} i(t) &= 0.75u(t) + 4.25e^{-2t}u(t) \\ &= (0.75 + 4.25e^{-2t})u(t) \qquad \text{A} \end{aligned}$$

Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?

Con base en la experiencia previa con este tipo de circuito, se espera una respuesta forzada de cd, más una respuesta natural que decae en forma exponencial. En $t = 0$, se obtiene $i(0) = 5$ A, como se requería, y a medida que $t \to \infty$, $i(t) \to \frac{3}{4}$ A, como se esperaba.

Por lo tanto, la solución de $i(t)$ está completa. Tanto la respuesta forzada $0.75u(t)$ como la natural $4.25e^{-2t}u(t)$ están presentes, así que las condiciones iniciales incorporadas de manera automática a la solución. El método ilustra una forma muy cómoda de obtener la solución completa de muchas ecuaciones diferenciales.

PRÁCTICA

14.11 Aplicar los métodos de la transformada de Laplace para determinar $i(t)$ en el circuito de la figura 14.4.

Respuesta: $(0.25 + 4.75e^{-20t})u(t)$ A.

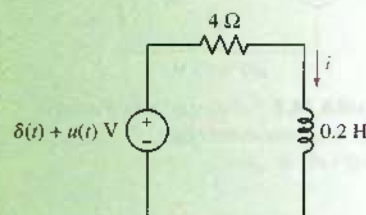


FIGURA 14.4

Teorema de integración en el tiempo

Se lleva a cabo el mismo tipo de simplificación cuando se debe resolver la operación de integración con respecto al tiempo en las ecuaciones de circuito. Se determinará la transformada de Laplace de la función de tiempo descrita por $\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx$,

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\left[\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right] dt$$

Al integrar por partes, se establece

$$u = \int_{0^-}^{t} v(x)\,dx \qquad dv = e^{-st}\,dt$$

$$du = v(t)\,dt \qquad v = -\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-st}$$

Entonces,

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right\} = \left\{\left[\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right]\left[-\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-\mathbf{s}t}\right]\right\}_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} -\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-\mathbf{s}t}v(t)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-\mathbf{s}t}\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right]_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{V}(\mathbf{s})$$

Pero, dado que $e^{-\mathbf{s}t} \to 0$ a medida que $t \to \infty$, el primer término a la derecha se anula en el límite superior, y conforme $t \to 0^-$, la integral en este término se anula de manera similar. Lo anterior deja sólo el término $\mathbf{V}(\mathbf{s})/\mathbf{s}$, por lo que

$$\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx \Leftrightarrow \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}} \qquad [26]$$

y de esa manera la *integración en el dominio del tiempo corresponde a la división entre* **s** *en el dominio de la frecuencia.* Una vez más, una operación de cálculo relativamente complicada en el dominio del tiempo se simplifica a una operación algebraica en el dominio de la frecuencia.

EJEMPLO 14.8

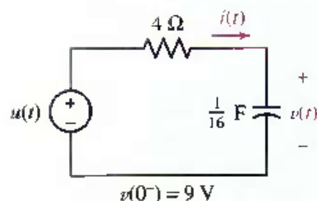


FIGURA 14.5 Circuito que ilustra el uso del par de transformadas de Laplace $\int_{0^-}^{t} i(t')\,dt' \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{I}(\mathbf{s})$.

Determinar *i(t)* para *t* > 0 en el circuito *RC* en serie que se presenta en la figura 14.5.

Se escribe primero la ecuación de un lazo

$$u(t) = 4i(t) + 16\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt'$$

Para aplicar el teorema de integración en el tiempo, se debe efectuar un arreglo de manera que el límite inferior de integración sea 0^-. De tal modo, se fija

$$16\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt' = 16\int_{-\infty}^{0^-} i(t')\,dt' + 16\int_{0^-}^{t} i(t')\,dt'$$

$$= v(0^-) + 16\int_{0^-}^{t} i(t')\,dt'$$

Por lo tanto,

$$u(t) = 4i(t) + v(0^-) + 16\int_{0^-}^{t} i(t')\,dt'$$

A continuación se calcula la transformada de Laplace en ambos lados de esta ecuación. Puesto que se está utilizando la transformada unilateral, $\mathcal{L}\{v(0^-)\}$ es simplemente $\mathcal{L}\{v(0^-)u(t)\}$, y por ello

$$\frac{1}{\mathbf{s}} = 4\mathbf{I}(\mathbf{s}) + \frac{9}{\mathbf{s}} + \frac{16}{\mathbf{s}}\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

al despejar $\mathbf{I}(\mathbf{s})$,

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{-2}{\mathbf{s}+4}$$

el resultado deseado se obtiene de inmediato

$$i(t) = -2e^{-4t}u(t) \qquad \text{A}$$

EJEMPLO 14.9

Determinar $v(t)$ para el mismo circuito, repetido en la figura 14.6, por conveniencia.

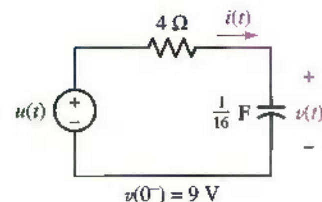


FIGURA 14.6 Circuito de la figura 14.5 repetido, en el que se busca la tensión $v(t)$.

Esta vez simplemente se escribe la ecuación nodal

$$\frac{v(t) - u(t)}{4} + \frac{1}{16}\frac{dv}{dt} = 0$$

Tomando la transformada de Laplace, se obtiene:

$$\frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{4} - \frac{1}{4\mathbf{s}} + \frac{1}{16}\mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s}) - \frac{v(0^-)}{16} = 0$$

o

$$\mathbf{V}(\mathbf{s})\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{4}\right) = \frac{1}{\mathbf{s}} + \frac{9}{4}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathbf{s}) &= \frac{4}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+4)} + \frac{9}{\mathbf{s}+4}\\ &= \frac{1}{\mathbf{s}} - \frac{1}{\mathbf{s}+4} + \frac{9}{\mathbf{s}+4}\\ &= \frac{1}{\mathbf{s}} + \frac{8}{\mathbf{s}+4}\end{aligned}$$

y tomando la transformada inversa,

$$v(t) = (1 + 8e^{-4t})u(t)$$

de inmediato se obtiene la tensión deseada en el capacitor sin recurrir a la solución usual de la ecuación diferencial.

Para confirmar este resultado, observar que $(\frac{1}{16})dv/dt$ producirá la expresión anterior de $i(t)$. Para $t > 0$,

$$\frac{1}{16}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{16}(-32)e^{-4t} = -2e^{-4t}$$

lo cual concuerda con lo que se encontró en el ejemplo 14.8.

PRÁCTICA

14.12 Determinar $v(t)$ en $t = 800$ ms para el circuito de la figura 14.7.

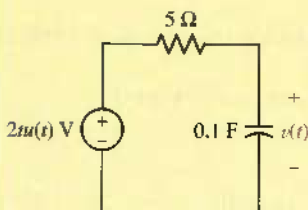


FIGURA 14.7

Respuesta: 802 mV.

Transformadas de Laplace de senoides

A fin de ilustrar el uso del teorema de linealidad y del teorema de diferenciación en el tiempo, sin mencionar la adición de un par más importante a la tabla de transformadas de Laplace que se presentará un poco más adelante, se establecerá la transformada de Laplace de sen $\omega t\, u(t)$. Se podría usar la expresión integral de definición con la integración por partes, pero esto es innecesariamente difícil. En su lugar, se utilizará la relación

$$\text{sen}\,\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

La transformada de la suma de estos dos términos es exactamente la suma de las transformadas, y cada término es una función exponencial para la cual ya se tiene la transformada. Se escribiría de inmediato

$$\mathcal{L}\{\text{sen}\,\omega t\, u(t)\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{\mathbf{s} - j\omega} - \frac{1}{\mathbf{s} + j\omega}\right) = \frac{\omega}{\mathbf{s}^2 + \omega^2}$$

$$\text{sen}\,\omega t\, u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{\mathbf{s}^2 + \omega^2} \qquad [27]$$

A continuación se emplea el teorema de diferenciación en el tiempo para determinar la transformada de $\cos\omega t\, u(t)$, que es proporcional a la derivada de sen ωt. Esto es,

Observar que se ha aprovechado el hecho de que sen $\omega t\big|_{t=0} = 0$.

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\; u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}[\,\text{sen}\,\omega t\, u(t)\,]\right\} = \frac{1}{\omega}\mathbf{s}\frac{\omega}{\mathbf{s}^2 + \omega^2}$$

$$\cos\omega t\; u(t) \Leftrightarrow \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + \omega^2} \qquad [28]$$

Teorema de desplazamiento en el tiempo

Como se observa en algunos de los problemas transitorios anteriores, no todas las funciones forzadas empiezan en $t = 0$. ¿Qué ocurre con la transformada en una función de tiempo si esa función simplemente se desplaza cierta cantidad en el tiempo? En particular, si la transformada de $f(t)u(t)$ es la función conocida $\mathbf{F}(\mathbf{s})$, entonces ¿cuál es la transformada de $f(t-a)u(t-a)$, la función de tiempo original retrasada por a segundos (y que no existe para $t < a$)? Si se trabaja directamente con la definición de la transformada de Laplace, se obtiene

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t-a)u(t-a)\,dt$$

$$= \int_{a^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t-a)\,dt$$

para $t \geq a^-$. Al elegir una nueva variable de integración, $\tau = t - a$, se obtiene

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}(\tau+a)} f(\tau)\,d\tau = e^{-a\mathbf{s}}\mathbf{F}(\mathbf{s})$$

Por lo tanto,

$$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-a\mathbf{s}}\mathbf{F}(\mathbf{s}) \qquad (a \geq 0) \qquad [29]$$

Este resultado, que se conoce como *teorema de desplazamiento en el tiempo*, establece simplemente que si una función de tiempo se retrasa por un tiempo a en el dominio del tiempo, el resultado en el dominio de la frecuencia es una multiplicación por $e^{-a\mathbf{s}}$.

EJEMPLO 14.10

Determinar la transformada del impulso rectangular $v(t) = u(t-2) - u(t-5)$.

Este impulso, cuya gráfica se muestra en la figura 14.8, tiene como valor unitario para el intervalo de tiempo $2 < t < 5$, y como valor nulo en cualquier otro lado. Se sabe que la transformada de $u(t)$ es exactamente $1/s$, y dado que $u(t-2)$ es $u(t)$ retrasada en 2 s, la transformada de esta función retrasada es e^{-2s}/s. De manera similar, la transformada de $u(t-5)$ es e^{-5s}/s. Se concluye entonces que la transformada deseada es

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s} = \frac{e^{-2s} - e^{-5s}}{s}$$

No fue necesario invertir la definición de la transformada de Laplace para determinar $\mathbf{V}(\mathbf{s})$.

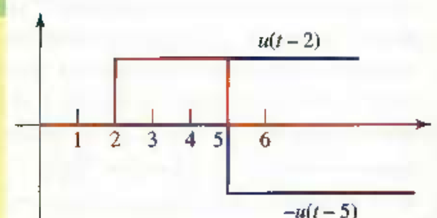


FIGURA 14.8 Gráfica de $u(t-2) - u(t-5)$.

PRÁCTICA

14.13 Obtener la transformada de Laplace de la función de tiempo que se muestra en la figura 14.9.

Respuesta: $(5/s)(2e^{-2s} - e^{-4s} - e^{-5s})$.

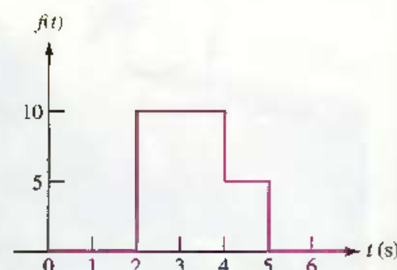


FIGURA 14.9

Hasta este momento se han obtenido varias entradas para el catálogo de pares de transformadas de Laplace que se acordó construir después. Están incluidas las transformadas de la *función impulso,* la *función escalón,* la *función exponencial,* la *función rampa,* las *funciones seno* y *coseno* y la suma de dos exponenciales. Además, se han observado las consecuencias en el dominio s de las operaciones de adición, multiplicación por una constante, diferenciación e integración en el dominio del tiempo. Todos estos resultados se recopilan en las tablas 14.1 y 14.2; se incluyen también varias funciones más que se deducen en el apéndice 7.

TABLA 14.1 Pares de transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{sen}\, \omega t\, u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\cos \omega t\, u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t),\ n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{sen}\,(\omega t + \theta)\, u(t)$	$\frac{s\, \text{sen}\,\theta + \omega \cos\theta}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\cos(\omega t + \theta)\, u(t)$	$\frac{s\cos\theta + \omega\, \text{sen}\,\theta}{s^2+\omega^2}$
$te^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$e^{-\alpha t}\, \text{sen}\, \omega t\, u(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t),\ n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$e^{-\alpha t} \cos \omega t\, u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

APLICACIÓN PRÁCTICA

Estabilidad de un sistema

Hace muchos años (o así parece), uno de los autores iba por una carretera a través del campo e intentaba utilizar el control electrónico de velocidad ("control de crucero") de su automóvil. Después de encender el sistema y fijar en forma manual la velocidad del vehículo al límite permitido,[3] el botón "fijar" se liberó y el pedal del acelerador se desactivó; a estas alturas se esperaba que el sistema mantuviera la velocidad fijada y se regulara el flujo de combustible a medida que fuera necesario.



© Donovan Reese/Getty Images

Desafortunadamente, sucedió algo diferente a lo que se esperaba. La velocidad del vehículo descendió 10% de forma inmediata, a lo que el equipo electrónico de control de la velocidad de crucero respondió con el aumento del flujo de combustible. Los dos eventos no coincidieron muy bien, por lo que algunos momentos después la velocidad del vehículo superó el valor que se había fijado y se produjo una disminución repentina (y significativa) del flujo de combustible, lo cual generó una reducción de la velocidad del vehículo. El ciclo continuó para consternación del conductor, quien de un momento a otro se dio por vencido y apagó el sistema.

Es evidente que la respuesta del sistema no estaba optimizada, es decir, el sistema era *inestable*. La estabilidad de sistemas es un aspecto muy importante en la ingeniería en una gran cantidad de problemas (controles de crucero, reguladores de temperatura y sistemas de rastreo, sólo por nombrar unos cuantos), y las técnicas desarrolladas en este capítulo son de un valor incalculable en el análisis de la estabilidad de un sistema en particular.

Uno de los aspectos más importantes al trabajar en el dominio **s** como lo permite la transformada de Laplace es que, en lugar de describir la respuesta de un sistema en particular a través de una ecuación integrodiferencial, se puede obtener una función de transferencia del sistema representada por el cociente de dos polinomios en el dominio **s**. El problema de la estabilidad se maneja fácilmente mediante el estudio del denominador de la función de transferencia: *ningún polo deberá tener una componente real positiva.*

Existen muchas técnicas que pueden aplicarse al problema de la determinación de la estabilidad de un sistema en particular. La ***prueba de Routh*** es una de las más sencillas que se conocen. Considérese la función del sistema en el dominio **s** (un concepto que se desarrollará más adelante en el capítulo 15)

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})}$$

El polinomio función de **s** representado por **D**(**s**) puede escribirse como $a_n\mathbf{s}^n + a_{n-1}\mathbf{s}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{s} + a_0$. No se puede determinar gran cosa de un vistazo sin factorizar el polinomio. Si todos los coeficientes $a_n \ldots a_0$ son positivos y diferentes de cero, el procedimiento de Routh lo arregla con el patrón siguiente:

$$\begin{array}{llll} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \end{array}$$

A continuación se genera una tercera fila multiplicando en forma de cruz las dos filas:

$$\frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

y una cuarta fila multiplicando en forma de cruz la segunda y tercera filas. Este proceso continúa hasta que se tengan $n+1$ filas de valores numéricos. Lo que queda es identificar los cambios de signo en la columna ubicada a la izquierda. El número de cambios de signo indica el número de polos que tiene una componente real positiva; cualquier cambio de signo indica que el sistema es inestable.

Por ejemplo, suponga que el sistema automático de control de crucero detrás del enojo del autor tiene una función de transferencia del sistema con un denominador

$$\mathbf{D}(\mathbf{s}) = 7\mathbf{s}^4 + 4\mathbf{s}^3 + \mathbf{s}^2 + 13\mathbf{s} + 2$$

Todos los coeficientes de este polinomio función de **s** de cuarto orden son positivos y diferentes de cero, por lo que se construye la tabla de Routh correspondiente:

7	1	2
4	13	0
−21.75	2	
13.37		
2		

a partir de la cual se pueden observar dos cambios de signo en la columna ubicada más a la izquierda. Por ende, el sistema es inestable (lo que explica la razón de la falla) ya que dos de sus polos tienen componentes reales positivas.

(3) Puesto que no había cámaras instaladas, nadie puede comprobar lo contrario.

TABLA 14.2 Operaciones de la transformada de Laplace

Operación	$f(t)$	$\mathbf{F(s)}$
Adición	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) \pm \mathbf{F}_2(\mathbf{s})$
Multiplicación escalar	$kf(t)$	$k\mathbf{F}(\mathbf{s})$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{df}{dt}$	$\mathbf{sF(s)} - f(0^-)$
	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$\mathbf{s}^2\mathbf{F(s)} - \mathbf{s}f(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3f}{dt^3}$	$\mathbf{s}^3\mathbf{F(s)} - \mathbf{s}^2f(0^-) - \mathbf{s}f'(0^-) - f''(0^-)$
Integración en el tiempo	$\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt$	$\frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{F(s)}$
	$\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt$	$\frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{F(s)} + \frac{1}{\mathbf{s}}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\,dt$
Convolución	$f_1(t) * f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(\mathbf{s})\mathbf{F}_2(\mathbf{s})$
Corrimiento en el tiempo	$f(t-a)u(t-a),\ a \geq 0$	$e^{-a\mathbf{s}}\mathbf{F(s)}$
Corrimiento en la frecuencia	$f(t)e^{-at}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s}+a)$
Diferenciación en la frecuencia	$-tf(t)$	$\frac{d\mathbf{F(s)}}{d\mathbf{s}}$
Integración en la frecuencia	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{F(s)}\,d\mathbf{s}$
Escalamiento	$f(at),\ a \geq 0$	$\frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{s}}{a}\right)$
Valor inicial	$f(0^+)$	$\lim_{\mathbf{s}\to\infty} \mathbf{sF(s)}$
Valor final	$f(\infty)$	$\lim_{\mathbf{s}\to 0} \mathbf{sF(s)}$, todos los polos de $\mathbf{sF(s)}$ en LHP
Periodicidad en el tiempo	$f(t) = f(t+nT)$,	$\frac{1}{1-e^{-T\mathbf{s}}}\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$,
	$n = 1, 2, \ldots$	donde $\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = \int_{0^-}^{T} f(t)e^{-\mathbf{s}t}\,dt$

14.7 TEOREMAS DEL VALOR INICIAL Y DEL VALOR FINAL

Los dos últimos teoremas fundamentales que se explicarán se conocen como teoremas del valor inicial y del valor final, los cuales permiten evaluar $f(0^+)$ y $f(\infty)$ examinando los valores límites de $\mathbf{sF(s)}$. Dicha característica puede ser de un valor incalculable; si solamente se necesitaran los valores inicial y final para una función de interés en particular, no habría necesidad de dedicar tiempo para llevar a cabo una operación de transformada inversa.

Teorema del valor inicial

Para deducir el teorema del valor inicial, se considera de nuevo la transformada de Laplace de la derivada

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \mathbf{sF(s)} - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\frac{df}{dt}\,dt$$

Se permite ahora que s tienda a infinito. Descomponiendo la integral en dos partes, se tiene

$$\lim_{s\to\infty} [\mathbf{sF(s)} - f(0^-)] = \lim_{s\to\infty} \left(\int_{0^-}^{0^+} e^0 \frac{df}{dt}\, dt + \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt \right)$$

Se observa que la segunda integral debe aproximarse a cero en el límite, puesto que el integrando mismo tiende a cero. Además, $f(0^-)$ no es una función de s, así que podría eliminarse del límite de la izquierda:

$$-f(0^-) + \lim_{s\to\infty} [\mathbf{sF(s)}] = \lim_{s\to\infty} \int_{0^-}^{0^+} df = \lim_{s\to\infty} [f(0^+) - f(0^-)]$$
$$= f(0^+) - f(0^-)$$

y por último,

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} [\mathbf{sF(s)}]$$

o

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} [\mathbf{sF(s)}] \qquad [30]$$

Este enunciado matemático del ***teorema del valor inicial*** establece que el valor inicial de la función de tiempo $f(t)$ se obtiene multiplicando primero su transformada de Laplace $\mathbf{F(s)}$ por s y luego dejando que s tienda a infinito. Observar que el valor inicial de $f(t)$ que se obtiene es el límite de la derecha.

El teorema del valor inicial, junto con el teorema del valor final, que se analizarán en un momento, es útil para verificar los resultados de una transformación o de una transformación inversa. Por ejemplo, cuando se calcula la transformada de $\cos(\omega_0 t)u(t)$, se obtuvo $\mathbf{s}/(\mathbf{s}^2 + \omega_0^2)$. Después de observar que $f(0^+) = 1$, se tiene la posibilidad de efectuar una revisión parcial de la validez de este resultado aplicando el teorema del valor inicial:

$$\lim_{s\to\infty} \left(\mathbf{s} \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + \omega_0^2} \right) = 1$$

y se completa la verificación.

Teorema del valor final

Este teorema no es tan útil como el del valor inicial, pues sólo se usa con cierta clase de transformadas. Para determinar si una transformada entra en esta clase, se requiere evaluar el denominador de $\mathbf{F(s)}$ a fin de determinar todos los valores de s para los cuales éste es cero; dichos valores son muy importantes y se conocen como ***polos*** de $\mathbf{F(s)}$. Sólo aquellas transformadas $\mathbf{F(s)}$ cuyos polos se encuentran por completo dentro de la mitad izquierda del plano s (es decir, $\sigma < 0$), salvo para el polo simple en $\mathbf{s} = 0$, son adecuadas para utilizarse con el teorema del valor final. Se considera de nuevo la transformada de Laplace para df/dt,

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt}\, dt = \mathbf{sF(s)} - f(0^-)$$

esta vez en el límite cuando s tiende a cero,

$$\lim_{s\to 0} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt}\, dt = \lim_{s\to 0} [\mathbf{sF(s)} - f(0^-)] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt}\, dt$$

Se supone que tanto $f(t)$ como su primera derivada son transformables. Ahora bien, el último término de esta ecuación se expresa sin dificultad como el límite

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt}dt = \lim_{t\to\infty} \int_{0^-}^{t} \frac{df}{dt}dt$$
$$= \lim_{t\to\infty} [f(t) - f(0^-)]$$

Al reconocer que $f(0^-)$ es una constante, una comparación de las últimas dos ecuaciones nos muestra que

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[s\mathbf{F}(s)] \qquad [31]$$

que es el ***teorema del valor final***. Al aplicar este último, se requiere saber que $f(\infty)$, el límite de $f(t)$ cuando t se vuelve infinito, existe o, lo que equivale a la misma cosa, que todos los polos de $\mathbf{F}(s)$ se encuentran *dentro* de la mitad izquierda del plano s, con excepción (posiblemente) de un polo simple en el origen. El producto $s\mathbf{F}(s)$ tiene todos sus polos *dentro* del semiplano izquierdo.

EJEMPLO 14.11

Utilizar el teorema del valor final para determinar $f(\infty)$ de la función $(1 - e^{-at})u(t)$, donde $a > 0$.

Sin utilizar siquiera el teorema del valor final, se observa de inmediato que $f(\infty) = 1$. La transformada de $f(t)$ es

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$
$$= \frac{a}{s(s+a)}$$

Los polos de $\mathbf{F}(s)$ son $s = 0$ y $s = -a$. Así, el polo de $\mathbf{F}(s)$ distinto de cero está en el plano izquierdo s, pues se puede asegurar que $a > 0$. Se ve que podría aplicarse en realidad el teorema del valor final a esta función. Al multiplicar por s y dejar que tienda a cero, se obtiene

$$\lim_{s\to 0}[s\mathbf{F}(s)] = \lim_{s\to 0} \frac{a}{s+a} = 1$$

lo cual concuerda con $f(\infty)$.

Sin embargo, si $f(t)$ es una senoide, de manera que $\mathbf{F}(s)$ tiene polos en el eje $j\omega$, entonces el uso irrestricto del teorema del valor final podría llevar a concluir que el valor final es cero. No obstante, se sabe que el valor final de sen $\omega_0 t$ de cos $\omega_0 t$ es indeterminado. Así, ¡cuidado con los polos del eje $j\omega$!



PRÁCTICA

14.14 Sin determinar primero $f(t)$, obtener $f(0^+)$ y $f(\infty)$ para cada una de las siguientes transformadas: (*a*) $4e^{-2s}(s + 50)/s$; (*b*) $(s^2 + 6)/(s^2 + 7)$; (*c*) $(5s^2 + 10)/[2s(s^2 + 3s + 5)]$.

Respuestas: 0, 200; ∞, indeterminado (los polos se ubican en el eje $j\omega$); 2.5, 1.

RESUMEN Y REPASO

- El concepto de frecuencia compleja permite considerar de manera simultánea las componentes amortiguada exponencialmente y oscilatoria de una función.
- La frecuencia compleja $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ es el caso general; las funciones cd ($\mathbf{s} = 0$), exponencial ($\omega = 0$) y senoidal ($\sigma = 0$) son casos especiales.
- El análisis de los circuitos en el dominio s da lugar a la conversión de las ecuaciones *integrodiferenciales* en el dominio del tiempo a ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia.
- En problemas de análisis de circuitos, se convierten las funciones en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia mediante la transformada unilateral de Laplace: $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\, dt$.
- La transformada inversa de Laplace convierte las expresiones en el dominio de la frecuencia al dominio del tiempo. Sin embargo, rara vez se necesita lo anterior, debido a la existencia de tablas que presentan los pares de transformadas de Laplace.
- La función de impulso unitario es una aproximación común a impulsos con amplitudes muy pequeñas, en comparación con las constantes de tiempo del circuito. Es distinta de cero sólo en un punto y tiene área unitaria.
- $\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$ (*propiedad aditiva*)
- $\mathcal{L}\{kf(t)\} = k\mathcal{L}\{f(t)\}$, $k =$ constante (*propiedad de homogeneidad*)
- Los teoremas de diferenciación e integración permiten convertir ecuaciones integrodiferenciales en el dominio del tiempo en simples ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia.
- Por lo general, las transformadas inversas se obtienen utilizando una combinación de técnicas de desarrollo en fracciones parciales y en diversas operaciones (tabla 14.2) para simplificar las cantidades en el dominio s, en expresiones que pueden buscarse en tablas de transformadas (como la tabla 14.1).
- Los teoremas del valor inicial y del valor final son útiles cuando sólo se desean los valores específicos $f(t = 0^+)$ o $f(t \to \infty)$.

LECTURAS ADICIONALES

Un desarrollo de fácil lectura acerca de la transformada de Laplace y algunas de sus propiedades clave se puede encontrar en el capítulo 2 de

A. Pinkus y S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms*, Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1997.

Un tratamiento mucho más detallado de las transformadas integrales y su aplicación a los problemas de ciencia e ingeniería puede encontrarse en

B. Davies, *Integral Transforms and Their Applications*, 3a. ed., Nueva York: Springer-Verlag, 2002.

La estabilidad y la prueba de Routh se estudian en el capítulo 5 de

K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4a. ed., Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2002.

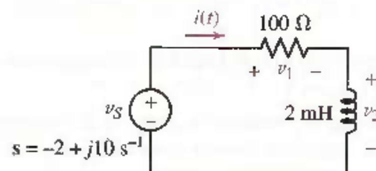
EJERCICIOS

14.1 Frecuencia compleja

1. Determinar la frecuencia compleja de cada término: (*a*) $v(t) = 5$ V; (*b*) $i(t) = 3\cos 9t\ \mu$A; (*c*) $i(t) = 2.5e^{-8t}$ mA; (*d*) $v(t) = 65e^{-1\,000t}\cos 1\,000t$ V; (*e*) $v(t) = 8 + 2\cos t$ mV.
2. Proporcionar la frecuencia compleja s de: (*a*) $v(t) = 33.3$ V; (*b*) $i(t) = 3\cos 77t$ A; (*c*) $q(t) = 7e^{-5t}$ C; (*d*) $q(t) = 7e^{-5t} - 19e^{-5t}\,\text{sen}(8t - 42°)$ C.
3. Obtener el complejo conjugado de cada término, expresando las respuestas en forma polar: (*a*) $8e^{-t}$; (*b*) 19; (*c*) $9 - j7$; (*d*) $e^{j\omega t}$; (*e*) $\cos 4t$; (*f*) sen $4t$; (*g*) $88\underline{/-9°}$.
4. Proporcionar el conjugado complejo de cada término: (*a*) $6 - j$; (*b*) 9; (*c*) $-j30$; (*d*) $5e^{-j6}$; (*e*) $24\underline{/-45°}$; (*f*) $\dfrac{4 - j18}{3.33 + j}$; (*g*) $\dfrac{5\underline{/0.1°}}{4 - j7}$; (*h*) $4 - 22\underline{/92.5°}$.
5. La carga emitida por un arreglo de emisión de campo en particular se representa por conveniencia como $\mathbf{Q} = 9\underline{/43°}\ \mu$C a una frecuencia compleja $\mathbf{s} = j20\pi\,\text{s}^{-1}$. (*a*) ¿Cuánta carga es emitida en $t = 1$ s? (*b*) ¿Cuál es la cantidad máxima de carga que será emitida por el arreglo en cualquier momento? (*c*) ¿El arreglo muestra algún signo de deterioro? ¿Cuál sería una indicación, con base en la frecuencia compleja **Q**?
6. Su nuevo asistente mide una señal que proviene de un equipo de prueba, la cual es $v(t) = \mathbf{V}_x e^{(-2+j60)t}$, donde $\mathbf{V}_x = 8 - j100$ V. (*a*) Falta un término. ¿Cuál es y por qué puede decirse que falta? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia compleja de la señal? (*c*) ¿Cuál es el significado del hecho de que $\text{Im}\{\mathbf{V}_x\} > \text{Re}\{\mathbf{V}_x\}$? (*d*) ¿Cuál es el significado del hecho de que $|\text{Re}\{\mathbf{s}\}| < |\text{Im}\{\mathbf{s}\}|$?
7. Sea $\mathbf{i}(t)$ la parte real de la corriente compleja variable en el tiempo $i(t)$. Encontrar (*a*) $i_x(t)$ si $\mathbf{i}_x(t) = (4 - j7)e^{(-3+j15)t}$; (*b*) $i_y(t)$ si $\mathbf{i}_y(t) = (4 + j7)e^{-3t}(\cos 15t - j\,\text{sen}\,15t)$; (*c*) $i_A(0.4)$ si $\mathbf{i}_A(t) = \mathbf{K}_A e^{\mathbf{s}_A t}$, donde $\mathbf{K}_A = 5 - j8$ y $\mathbf{s}_A = -1.5 + j12$; (*d*) $i_B(0.4)$ si $\mathbf{i}_B(t) = \mathbf{K}_B e^{\mathbf{s}_B t}$, donde $\mathbf{K}_B$ es el conjugado de $\mathbf{K}_A$ y $\mathbf{s}_B$ es el conjugado de $\mathbf{s}_A$.
8. Un radiotelescopio que apunta hacia la nebulosa de Orión detecta una corriente de señal periódica $i(t) = 2.33\cos(279 \times 10^6 t)$ fA. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia (en Hz) de la señal? (*b*) Si la señal se detecta midiendo la tensión que se produce cuando la corriente fluye por una resistencia de precisión de 1 TΩ, escribir la señal de tensión como una suma de dos exponenciales complejas.
9. Si una tensión compleja variable en el tiempo está dada por $\mathbf{v}_s(t) = (20 - j30)e^{(-2+j50)t}$ V, determinar: (*a*) $\mathbf{v}_s(0.1)$ en forma polar; (*b*) Re $[\mathbf{v}_s(t)]$; (*c*) Re $[\mathbf{v}_s(0.1)]$; (*d*) **s**; (*e*) $\mathbf{s}^*$.

14.2 Función forzada senoidal amortiguada

10. Si el circuito de la figura 14.10 es alimentado por una fuente de 10 V y un ángulo de fase de 3°, la frecuencia compleja $-2 + j10\ \text{s}^{-1}$. (*a*) Determine $i(t)$. (*b*) Determine $v_1(t)$ y $v_2(t)$.



■ **FIGURA 14.10**

11. (*a*) Extender el concepto de fasores que se presentó en el capítulo10 para deducir expresiones de impedancia para inductores, capacitores y resistencias bajo una

frecuencia compleja **s**. (*b*) ¿Cuál es la impedancia de la resistencia y del inductor, respectivamente, de la figura 14.10? (*c*) Cuando $\text{Re}\{\mathbf{s}\} = 0$, ¿las expresiones se reducen a las que se presentaron en el capítulo 10?

12. Un circuito *RL* en serie simple se conecta a una toma de corriente norteamericana que tiene una tensión $v(t) = 179\cos(120\pi t)$ V. Si $R = 100\ \Omega$ y $L = 500\ \mu$H, (*a*) determinar la frecuencia compleja de la tensión en el dominio de la frecuencia correspondiente $\mathbf{V}(\mathbf{s})$. (*b*) Trabajar en el dominio de la frecuencia para determinar la corriente $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ que fluye por el circuito. (*c*) Determinar $i(t)$.

13. (*a*) Sea $v_s = 10e^{-2t}\cos(10t + 30°)$ V en el circuito de la figura 14.11, trabajar en el dominio de la frecuencia para determinar $\mathbf{I}_x$. (*b*) Calcular $i_x(t)$.

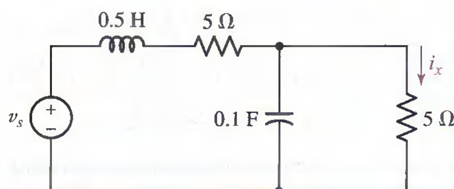


FIGURA 14.11

14. En Japón, un circuito *RC* en serie simple se conecta a una toma de corriente con $v(t) = 339\cos(100\pi t)$ V. Si $R = 2$ kΩ y $C = 100\ \mu$F, (*a*) proporcionar la frecuencia compleja de la tensión correspondiente $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ en el dominio de la frecuencia. (*b*) Trabajar en el dominio de la frecuencia para expresar la corriente $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ que fluye a través del circuito. (*c*) Determinar $i(t)$.

15. Sea $i_{s1} = 20e^{-3t}\cos 4t$ A e $i_{s2} = 30e^{-3t}$ sen $4t$ A en el circuito de la figura 14.12. (*a*) Trabajar en el dominio de la frecuencia para determinar $\mathbf{V}_x$. (*b*) Calcular $v_x(t)$.

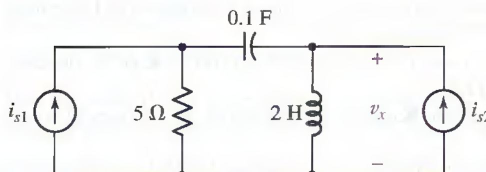


FIGURA 14.12

16. La resistencia de Thévenin de un gran componente de equipo electrónico industrial, según se observa desde las terminales de salida de su suministro de potencia de cd, es aproximadamente igual a 3 mΩ (es un poco mayor cuando el equipo no está en operación). Si el modelo del suministro de potencia es una fuente de tensión exponencial $v(t) = 240\sqrt{2}e^{-2t} \times \cos(120\pi t)$ V a partir del momento en el que se interrumpe el suministro de potencia de la toma de corriente: (*a*) determinar la corriente $i(t)$ que circula a través de la resistencia trabajando en el dominio de la frecuencia. (*b*) Verificar la respuesta del inciso (*a*) trabajando en el dominio del tiempo. (*c*) Resolver nuevamente el inciso (*a*) si se añade un capacitor de 1000 mF entre las terminales de salida del suministro de potencia (es decir, en paralelo con R_{TH}).

14.3 Definición de la transformada de Laplace

17. Obtener la transformada unilateral de Laplace de $Ku(t)$, donde K es una constante real desconocida.

18. Utilizar la ecuación [14] para expresar la transformada de Laplace de lo siguiente: (*a*) $3u(t)$; (*b*) $3u(t-3)$; (*c*) $3u(t-3) - 3$; (*d*) $3u(3-t)$.

19. Utilizar la ecuación [14] para determinar la transformada de Laplace de lo siguiente: (*a*) $2 + 3u(t)$; (*b*) $3e^{-8t}$; (*c*) $u(-t)$; (*d*) K, donde K es una constante real desconocida.

20. Una fuente de corriente proporciona una corriente de $4e^{-t}u(t)$ mA a través de una resistencia de 1 Ω. (*a*) Proporcionar la representación en el dominio de la frecuencia de la tensión en la resistencia. (*b*) Recordando que $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$, graficar la magnitud de la corriente en el dominio de la frecuencia como una función de σ si $\omega = 0$.

21. Una fuente de tensión $v(t) = 5u(t) - 5u(t-2)$ V se conecta a una resistencia de 1 Ω. (*a*) Determinar la representación en el dominio de la frecuencia de la tensión. (*b*) Expresar la representación en el dominio de la frecuencia de la corriente que circula a través de la resistencia.

14.4 Transformadas de Laplace de funciones de tiempo simples

22. Especificar el intervalo de σ sobre el cual existe la transformada de Laplace, si $f(t)$ es igual a: (*a*) $t+1$; (*b*) $(t+1)u(t)$; (*c*) $e^{50t}u(t)$; (*d*) $e^{50t}u(t-5)$; (*e*) $e^{-50t}u(t-5)$.

23. Para cada una de las siguientes funciones, determinar la transformada unilateral de Laplace: (*a*) $8e^{-2t}[u(t+3) - u(t-3)]$; (*b*) $8e^{2t}[u(t+3) - u(t-3)]$; (*c*) $8e^{-2|t|}[u(t+3) - u(t-3)]$.

24. Proporcionar la transformada de Laplace unilateral de lo siguiente: (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{s}^{-1}\}$; (*b*) $1 + u(t) + [u(t)]^2$; (*c*) $tu(t) - 3$; (*d*) $1 - \delta(t) + \delta(t-1) - \delta(t-2)$.

25. Sin recurrir a la ecuación [15], determinar la transformada inversa de lo siguiente: (*a*) $\dfrac{1}{\mathbf{s}+3}$; (*b*) 1; (*c*) $\mathbf{s}^{-2}$; (*d*) 275; y (*e*) $\dfrac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^3}$.

26. Demostrar que siempre y cuando existan las transformadas de Laplace individuales de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, $\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$.

27. Utilizar la definición de la transformada de Laplace para calcular el valor de $\mathbf{F}(1+j2)$ si $f(t)$ es igual a (*a*) $2u(t-2)$; (*b*) $2\delta(t-2)$; (*c*) $e^{-t}u(t-2)$.

28. Evaluar lo siguiente: (*a*) $\int_{-\infty}^{\infty} 8\,\text{sen}\,5t\,\delta(t-1)\,dt$; (*b*) $\int_{-\infty}^{\infty} (t-5)^2\,\delta(t-2)\,dt$; (*c*) $\int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-3000t}\delta(t - 3.333\times 10^{-4})\,dt$; (*d*) $\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t-2)\,dt$, donde K es una constante real.

29. Utilizar la definición de transformada de Laplace (unilateral) para encontrar $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ si $f(t)$ es igual a: (*a*) $[u(5-t)][u(t-2)]u(t)$; (*b*) $4u(t-2)$; (*c*) $4e^{-3t}u(t-2)$; (*d*) $4\delta(t-2)$; (*e*) $5\delta(t)\,\text{sen}(10t + 0.2\pi)$.

30. Evaluar lo siguiente: (*a*) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos 500t\;\delta(t)\,dt$; (*b*) $\int_{-\infty}^{\infty} t^5\delta(t-2)\,dt$; (*c*) $\int_{-\infty}^{\infty} 2.5e^{-0.001t}\delta(t-1000)\,dt$; (*d*) $\int_{-\infty}^{\infty} -K^2\delta(t-c)\,dt$, donde K y c son constantes reales.

31. Utilizando la transformada unilateral de Laplace, determinar $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ si $f(t)$ es igual (*a*) $[2u(t-1)][u(3-t)]u(t^3)$; (*b*) $2u(t-4)$; (*c*) $3e^{-2t}u(t-4)$; (*d*) $3\delta(t-5)$; (*e*) $4\delta(t-1)\,[\cos\pi t - \text{sen}\,\pi t]$.

14.5 Técnicas de la transformada inversa

32. Determinar $f(t)$ si $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ es (*a*) $3 + 1/\mathbf{s}$; (*b*) $3 + 1/\mathbf{s}^2$; (*c*) $\dfrac{1}{(\mathbf{s}+3)(\mathbf{s}+4)}$; (*d*) $\dfrac{1}{(\mathbf{s}+3)(\mathbf{s}+4)(\mathbf{s}+5)}$.

33. Determinar $g(t)$ si $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ es (*a*) $90 - 4.5/\mathbf{s}$; (*b*) $11 + 2\mathbf{s}/\mathbf{s}^2$; (*c*) $\dfrac{1}{(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+1)}$; (*d*) $\dfrac{1}{(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)(\mathbf{s}+3)}$.

34. Obtener la transformada inversa de lo siguiente, sin efectuar ninguna integración y sin recurrir a MATLAB: (*a*) $5\mathbf{s}^{-1} - 16 + (\mathbf{s}+4.4)^{-1}$; (*b*) $1 - \mathbf{s}^{-1} + \mathbf{s}^{-2}$; (*c*) $5(\mathbf{s}+7)^{-1} + 88\mathbf{s}^{-1} + \dfrac{17}{(\mathbf{s}+6)(\mathbf{s}+1)}$.

35. La tensión en el dominio de la frecuencia en una resistencia de 2 kΩ está dada por $\mathbf{V}(\mathbf{s}) = 5\mathbf{s}^{-1}$ V. ¿Cuál es la corriente que pasa a través de la resistencia en $t = 1$ ms?

36. La corriente en el dominio de la frecuencia que circula a través de una resistencia de 100 MΩ es $5(\mathbf{s}+10)^{-1}$ pA. (*a*) Graficar la tensión $v(t)$ en la resistencia como una función del tiempo. (*b*) ¿Cuál es la potencia que absorbe la resistencia en $t = 100$ ms? (*c*) ¿En qué tiempo disminuyó la tensión en la resistencia en 1% de su valor máximo?

37. Determinar $f(t)$ si $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ es igual a: (*a*) $[(\mathbf{s}+1)/\mathbf{s}] + [2/(\mathbf{s}+1)]$; (*b*) $(e^{-\mathbf{s}}+1)^2$; (*c*) $2e^{-(\mathbf{s}+1)}$; (*d*) $2e^{-3\mathbf{s}}\cosh 2\mathbf{s}$.

38. Si $\mathbf{N(s)} = 5\mathbf{s}$ determinar $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{N(s)}/\mathbf{D(s)}\}$ para $\mathbf{D(s)} =$ (*a*) $\mathbf{s}^2 - 9$; (*b*) $(\mathbf{s}+3)(\mathbf{s}^2+19\mathbf{s}+90)$; (*c*) $(4\mathbf{s}+12)(8\mathbf{s}^2+6\mathbf{s}+1)$. (*d*) Verificar las respuestas para (*a*)-(*c*) con MATLAB.

39. Dadas las siguientes expresiones de $\mathbf{F(s)}$, encontrar $f(t)$: (*a*) $5/(\mathbf{s}+1)$; (*b*) $5/(\mathbf{s}+1) - 2/(\mathbf{s}+4)$; (*c*) $18/[(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+4)]$; (*d*) $18\mathbf{s}/[(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+4)]$; (*e*) $18\mathbf{s}^2/[(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+4)]$.

40. Si $\mathbf{N(s)} = 2\mathbf{s}^2$ determinar $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{N(s)}/\mathbf{D(s)}\}$ para $\mathbf{D(s)} =$ (*a*) $\mathbf{s}^2 - 1$; (*b*) $(\mathbf{s}+3)\ (\mathbf{s}^2+19\mathbf{s}+90)$; (*c*) $(8\mathbf{s}+12)(16\mathbf{s}^2+12\mathbf{s}+2)$. (*d*) Verificar las respuestas con MATLAB.

41. Calcular $f(t)$ if $\mathbf{F(s)}$ es igual a:

$$(a)\ \frac{2}{\mathbf{s}} - \frac{3}{\mathbf{s}+1};\ (b)\ \frac{2\mathbf{s}+10}{\mathbf{s}+3};\ (c)\ 3e^{-0.8\mathbf{s}};\ (d)\ \frac{12}{(\mathbf{s}+2)(\mathbf{s}+6)};\ (e)\frac{12}{(\mathbf{s}+2)^2(\mathbf{s}+6)}.$$

42. Determinar $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F(s)}\}$ si $\mathbf{F(s)} = 2 - \mathbf{s}^{-1} + \dfrac{\pi}{(\mathbf{s}^3+4\mathbf{s}^2+5\mathbf{s}+2)}$.

43. Obtener los desarrollos en fracciones parciales de las siguientes funciones racionales y después determinar las funciones de tiempo correspondientes: (*a*) $\mathbf{F(s)} = [(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)]/\ [\mathbf{s}(\mathbf{s}+3)]$; (*b*) $\mathbf{F(s)} = (\mathbf{s}+2)/[\mathbf{s}^2(\mathbf{s}^2+4)]$.

44. Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{G(s)}\}$ si $\mathbf{G(s)}$ es: (*a*) $\dfrac{12\mathbf{s}^3}{(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)}$; (*b*) $\dfrac{12\mathbf{s}^3}{(\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)}$; (*c*) $3\mathbf{s} - \dfrac{12\mathbf{s}^3}{(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)(\mathbf{s}+3)}$.

45. Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{H(s)}\}$ si $\mathbf{H(s)}$ es: (*a*) $\dfrac{(\mathbf{s}+1)^2}{(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)}$; (*b*) $\dfrac{\mathbf{s}+3}{(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)}$; (*c*) $3\mathbf{s} - \dfrac{\mathbf{s}^4}{(\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+3)} + 1$.

14.6 Teoremas fundamentales de la transformada de Laplace

46. Efectuar la transformada de Laplace de las siguientes ecuaciones:

(*a*) $5\,di/dt - 7\,d^2i/dt^2 + 9i = 4$; (*b*) $m\dfrac{d^2p}{dt^2} + \mu_f\dfrac{dp}{dt} + kp(t) = 0$, la ecuación que describe la respuesta "sin fuerza" de un sistema absorbedor de choques simple; (*c*) $\dfrac{d\Delta n_p}{dt} = -\dfrac{\Delta n_p}{\tau} + G_L$, con τ = constante, la cual describe la tasa de recombinación de electrones en exceso (Δn_p) en silicio tipo p, bajo iluminación óptica (G_L es una constante proporcional a la intensidad de la luz).

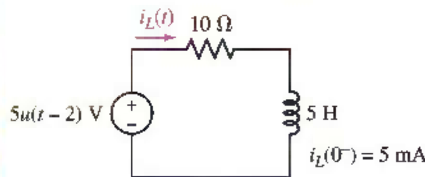


FIGURA 14.13

47. Sea $f(0^-) = -3$ y $15u(t) - 4\delta(t) = 8f(t) + 6f'(t)$. Determinar $f(t)$ calculando la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, despejando $\mathbf{F(s)}$ e invirtiendo para encontrar $f(t)$.

48. Observar el circuito *RL* de la figura 14.13 y: (*a*) escribir la ecuación diferencial de la corriente en el inductor $i_L(t)$. (*b*) Proporcionar $\mathbf{I}_L(\mathbf{s})$, la transformada de Laplace de $i_L(t)$. (*c*) Despejar $i_L(t)$ tomando la transformada inversa de Laplace de $\mathbf{I}_L(\mathbf{s})$.

49. (*a*) Determinar $v_C(0^-)$ y $v_C(0^+)$ en el circuito de la figura 14.14. (*b*) Obtener una ecuación para $v_C(t)$ que se cumpla para $t > 0$. (*c*) Utilizar las técnicas de la transformada de Laplace para despejar $\mathbf{V}_C(\mathbf{s})$ y calcular después $v_C(t)$.

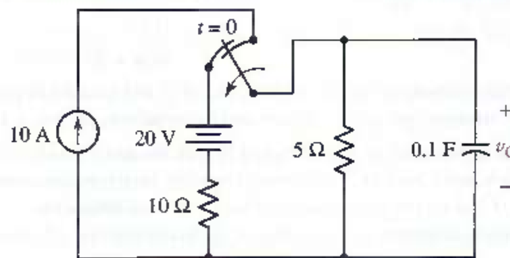


FIGURA 14.14

50. (*a*) Agregar la fuente de tensión $v_S(t) = -5u(t)$ V en serie con la fuente de $5u(t-2)$ V de la figura 14.13 y repetir el ejercicio 48. (*b*) Graficar la corriente en el inductor y compararla con una simulación de PSpice apropiada.

51. Dada la ecuación diferencial $12u(t) = 20f_2'(t) + 3f_2(t)$, donde $f_2(0^-) = 2$, tomar su transformada de Laplace, despejar $\mathbf{F}_2(\mathbf{s})$, y luego encontrar $f_2(t)$.

52. Determinar la transformada inversa de Laplace de: (*a*) $2/\mathbf{s} - 4$; (*b*) $\mathbf{s}/(\mathbf{s}^2 + 99)$; (*c*) $1/(\mathbf{s}^2 + 5\mathbf{s} + 6) - 5$; (*d*) $\mathbf{s}$; (*e*) $\mathbf{s}^2$.

53. Dadas las dos ecuaciones diferenciales $x' + y = 2u(t)$ y $y' - 2x + 3y = 8u(t)$, donde $x(0^-) = 5$ e $y(0^-) = 8$, encontrar $x(t)$ e $y(t)$.

54. Determinar $f(t)$ si $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ está dada por: (*a*) $8\mathbf{s} + 8 + 8\mathbf{s}^{-1}$, $f(0^-) = 0$; (*b*) $\mathbf{s}^2/(\mathbf{s}+2) - \mathbf{s} + 2$.

55. (*a*) Proporcionar $i_C(0^-)$ e $i_C(0^+)$ en el circuito de la figura 14.15. (*b*) Escribir una ecuación para $i_C(t)$ en el dominio del tiempo que sea válida para $t > 0$. (*c*) Utilizar métodos de la transformada de Laplace para despejar $\mathbf{I}_C(\mathbf{s})$ y luego obtener la transformada inversa.

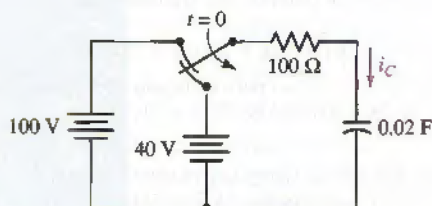


FIGURA 14.15

56. Encontrar $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ si $v(t) =$ (*a*) $4\cos(100t)$ V; (*b*) $2\,\text{sen}(10^3 t) - 3\cos(100t)$ V; (*c*) $14\cos(8t) - 2\text{sen}(8°)$ V; (*d*) $\delta(t) + \text{sen}(6t)u(6t)$; (*e*) $\cos(5t)\text{sen}(3t)$ V.

57. Una resistencia R, un capacitor C, un inductor L y una fuente de corriente ideal $i_s = 100e^{-5t}u(t)$ A están en paralelo. Considerar que la tensión v está entre los extremos de la fuente con la referencia positiva en la terminal en la que $i_s(t)$ sale de la fuente. Por lo tanto, $i_s = v' + 4v + 3\int_{0^-}^{t} v\,dx$. (*a*) Calcular R, L, y C. (*b*) Aplicar técnicas de la transformada de Laplace para determinar $v(t)$.

58. Determinar $\mathcal{L}\{v(t)\}$ si $v(t) =$ (*a*) $7 + (t-2)u(t-2)$ V; (*b*) $e^{-t+2}u(t-2)$ V; (*c*) $48\delta(t-1)u(t-1)$ V.

59. Obtener una ecuación integrodiferencial simple en términos de i_C en el circuito de la figura 14.16, efectuar la transformada de Laplace, despejar $\mathbf{I}_C(\mathbf{s})$ y encontrar después $i_C(t)$ mediante la transformada inversa.

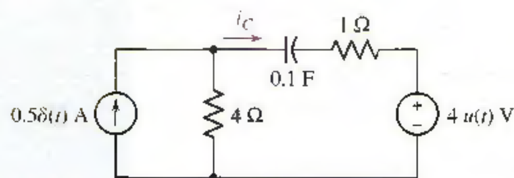


FIGURA 14.16

60. Dada la ecuación diferencial $v' + 6v + 9\int_{0^-}^{t} v(z)\,dz = 24(t-2)u(t-2)$, sea $v(0^-) = 0$ y proporcionar $v(t)$.

61. Aplicar la prueba de Routh a las funciones de sistema siguientes y establecer si el sistema es *estable* o *inestable:*

(*a*) $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \dfrac{\mathbf{s} - 500}{\mathbf{s}^3 + 13\mathbf{s}^2 + 47\mathbf{s} + 35}$; (*b*) $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \dfrac{\mathbf{s} - 500}{\mathbf{s}^3 + 13\mathbf{s}^2 + \mathbf{s} + 35}$.

62. Aplicar la prueba de Routh a las funciones de sistema siguientes y establecer si el sistema es *estable* o *inestable*, después factorizar cada denominador para identificar los polos de $\mathbf{H}(s)$ y verificar la exactitud de la prueba de Routh de estas funciones: $(a)\ \mathbf{H}(s) = \dfrac{4s}{s^2+3s+8}$; $(b)\ \mathbf{H}(s) = \dfrac{s-9}{s^2+2s+1}$.

63. Aplicar la prueba de Routh a las funciones de sistema siguientes y establecer si el sistema es *estable* o *inestable:* $(a)\ \mathbf{H}(s) = \dfrac{s^2}{s^4+3s^3+3s^2+3s+1}$; $(b)\ \mathbf{H}(s) = \dfrac{2}{s+3}$.

14.7 Teoremas del valor inicial y del valor final

64. Dada la función $v(t) = 7u(t) + 8e^{-3t}u(t)$ V, (a) aplicar el teorema del valor inicial a $\mathbf{V}(s)$. (b) Verificar la respuesta mediante la evaluación de $v(t)$ en $t = 0$.

65. Dada la función $v(t) = 7u(t) + 8e^{-3t}u(t)$ V, (a) aplicar el teorema del valor final a $\mathbf{V}(s)$. (b) Verificar la respuesta mediante la evaluación de $v(t)$ en $t = \infty$.

66. Determinar $f(0^+)$ y $f(\infty)$ para una función de tiempo cuya transformada de Laplace es: $(a)\ 5(s^2+1)/(s^3+1)$; $(b)\ 5(s^2+1)/(s^4+16)$; $(c)\ (s+1)(1+e^{-4s})/(s^2+2)$.

67. Sin determinar primero $f(t)$ calcular $f(0^+)$ y $f(\infty)$ para cada una de las transformadas siguientes: $(a)\ (2s^2+6)/[s(s^2+5s+2)]$; $(b)\ 2e^{-s}/(s+3)$; $(c)\ (s^2+1)/(s^2+5)$.

68. Proporcionar $f(\infty)$ y $f(0^+)$ para una función de tiempo cuya transformada de Laplace es: $(a)\ 5(s^2+1)/(s+1)^3$; $(b)\ 5(s^2+1)/[s(s+1)^3]$; $(c)\ (1-e^{-3s})/s^2$.

69. Sea $f(t) = (1/t)(e^{-at} - e^{-bt})u(t)$. (a) Encontrar $\mathbf{F}(s)$. (b) Evaluar ambos lados de la ecuación $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} [s\mathbf{F}(s)]$.

70. Encontrar los valores tanto inicial como final (o mostrar que éstos no existen) de las funciones de tiempo correspondientes a:
$(a)\ \dfrac{8s-2}{s^2+6s+10}$; $(b)\ \dfrac{2s^3-s^2-3s-5}{s^3+6s^2+10s}$; $(c)\ \dfrac{8s-2}{s^2-6s+10}$;
$(d)\ \dfrac{8s^2-2}{(s+2)^2(s+1)(s^2+6s+10)}$.

CAPÍTULO 15

Análisis de circuitos en el dominio s

CONCEPTOS CLAVE

- Extender el concepto de impedancia al dominio s.
- Modelado de condiciones iniciales con fuentes ideales.
- Aplicación del análisis nodal, de malla, de superposición y de transformación de fuente en el dominio s.
- Teoremas de Thévenin y Norton aplicados a circuitos en el dominio s.
- Manipulación de expresiones algebraicas en el dominio s con MATLAB.
- Identificación de polos y ceros en las funciones de transferencias de circuitos.
- Respuesta al impulso de un circuito.
- Uso de la convolución para determinar la respuesta de un sistema.
- Respuesta en función de σ y ω.
- Utilización de gráficas de polos-ceros para predecir la respuesta natural de un circuito.
- Síntesis de las funciones de transferencia de tensión específicas utilizando amp ops.

INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se formuló el concepto de frecuencia compleja y se mostró el empleo de las transformadas de Laplace como medio para resolver el tipo de ecuaciones diferenciales que se encuentran en el análisis de circuitos. Después de un poco de práctica, se pudo ir y venir entre el dominio del tiempo y el de la frecuencia según era necesario. Ahora todo está listo para aplicar estas formidables técnicas e integrarlas con el análisis de circuitos de una manera estructurada. El conjunto de habilidades resultante permitirá analizar de manera eficiente cualquier circuito lineal para obtener la respuesta completa —transitoria más estado permanente— sin considerar la naturaleza de las fuentes de excitación.

15.1 • Z(s) y Y(s)

El concepto clave que hace que los fasores resulten tan útiles en el análisis de circuitos de estado senoidal permanente es la transformación de resistencias, capacitores e inductores en *impedancias*. El análisis de circuitos continúa luego con el uso de técnicas básicas de análisis nodal o de malla, superposición y transformación de fuente, así como el equivalente de Thévenin o el de Norton. Como ya habrá sospechado, este concepto se extiende al dominio s, pues el estado senoidal permanente es sólo un caso especial (donde $\sigma = 0$).

Resistencias en el dominio de la frecuencia

Se empezará con la situación más simple: la de una resistencia conectada a una fuente de tensión $v(t)$. La ley de Ohm especifica que

$$v(t) = Ri(t)$$

Tomando la transformada de Laplace en ambos lados,

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = R\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

se encuentra que la relación (o razón) que representa a la tensión y la corriente en el dominio de la frecuencia es sencillamente la resistencia, R. De tal manera,

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{I}(\mathbf{s})} = R \quad [1]$$

Puesto que se está trabajando en el dominio de la frecuencia, es necesario referirse a esta cantidad como una *impedancia,* en bien de la claridad, aunque se le siguen asignando las unidades de ohm (Ω). Del mismo modo en que se explicó al trabajar con fasores en el estado senoidal permanente, la impedancia de una resistencia no depende de la frecuencia. La *admitancia* $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ de una resistencia, definida como la razón de $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ entre $\mathbf{V}(\mathbf{s})$, es simplemente $1/R$; la unidad de admitancia es el siemen (S).

Inductores en el dominio de la frecuencia

A continuación, se considera un inductor conectado a alguna fuente de tensión variable en el tiempo $v(t)$, como se indica en la figura 15.1*a*. Se sabe que

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de esta ecuación, se encuentra que

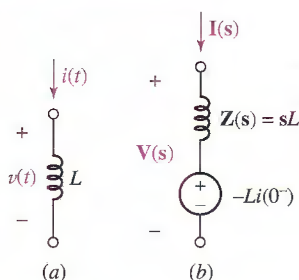
$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = L[\mathbf{s}\mathbf{I}(\mathbf{s}) - i(0^-)] \quad [2]$$

Ahora hay dos términos: $\mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$ y $Li(0^-)$. En situaciones en las que la energía inicial almacenada en el inductor es nula (es decir, $i(0^-) = 0$), entonces

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

por lo que

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{I}(\mathbf{s})} = \mathbf{s}L \quad [3]$$



■ **FIGURA 15.1** (*a*) Inductor en el dominio del tiempo. (*b*) Modelo completo de un inductor en el dominio de la frecuencia, compuesto por una impedancia $\mathbf{s}L$ y una fuente de tensión $-Li(0^-)$ que incorpora el efecto de condiciones iniciales distintas de cero en el elemento.

La ecuación [3] se simplifica aún más si sólo se está interesado en la respuesta senoidal de estado permanente. Se pueden ignorar las condiciones iniciales en tales casos, pues sólo afectan la naturaleza de la respuesta transitoria. De tal modo, se sustituye $\mathbf{s} = j\omega$ y se encuentra

$$\mathbf{Z}(j\omega) = j\omega L$$

como se obtuvo antes en el capítulo 10.

Modelos de inductores en el dominio s

Aunque uno se refiere a la cantidad de la ecuación [3] como la impedancia de un inductor, se debe recordar que se obtuvo bajo el supuesto de una corriente inicial cero. En la situación más general, donde la energía se almacena en el elemento en $t = 0^-$, tal cantidad no es suficiente para representar al inductor en el dominio de la frecuencia. Por fortuna, es posible incluir la condición inicial haciendo un modelo de un inductor como una impedancia en combinación con una fuente de tensión o con una de corriente. Para efectuar lo anterior, en primer lugar se debe reordenar nuevamente la ecuación [2] como

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s}) - Li(0^-) \quad [4]$$

El segundo término a la derecha será una constante: la inductancia L en henrys multiplicada por la corriente inicial $i(0^-)$ en amperes. El resultado es un término

que se resta del término dependiente de la frecuencia $\mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$. Un pequeño destello de intuición en este punto permite reconocer que se puede hacer un modelo de un inductor sencillo L como un elemento de dos componentes en el dominio de la frecuencia, como se indica en la figura 15.1*b*.

El modelo de inductor en el dominio de la frecuencia que se presenta en la figura 15.1*b* consiste en una impedancia $\mathbf{s}L$ y una fuente de voltaje $Li(0^-)$. La tensión en la impedancia $\mathbf{s}L$ está dada por la ley de Ohm como $\mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$. Puesto que la combinación de los dos elementos de la figura 15.1*b* es lineal, toda técnica de análisis de circuitos explorada antes se aplica también en el dominio s. Por ejemplo, se puede efectuar una transformación de fuente sobre el modelo para obtener una impedancia $\mathbf{s}L$ en paralelo con una fuente de corriente $[-Li(0^-)]/\mathbf{s}L = -i(0^-)/\mathbf{s}$. Lo anterior se verifica analizando la ecuación [4] y despejando $\mathbf{I}(\mathbf{s})$:

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s}) + Li(0^-)}{\mathbf{s}L} = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}L} + \frac{i(0^-)}{\mathbf{s}} \qquad [5]$$

También en este caso se queda uno con dos términos. El primero de la derecha es sólo una admitancia $1/\mathbf{s}L$ veces la tensión $\mathbf{V}(\mathbf{s})$. El segundo término de la derecha es la corriente, aunque tiene unidades de ampere≈segundos. De tal modo, se puede hacer el modelo de esta ecuación con dos componentes independientes: una admitancia $1/\mathbf{s}L$ en paralelo con una fuente de corriente $i(0^-)/\mathbf{s}$; el modelo resultante se presenta en la figura 15.2. La elección de usar el modelo de la figura 15.1*b* o el de la figura 15.2 suele depender de cuál proporcionará las ecuaciones más simples cuando se analice un circuito completo que contenga al inductor. Observar que aunque la figura 15.2 presenta el símbolo del inductor marcado con una admitancia $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = 1/\mathbf{s}L$, también se considera como una impedancia $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L$; asimismo, en este caso, la elección de cuál utilizar se basa a menudo en la preferencia personal y en la conveniencia.

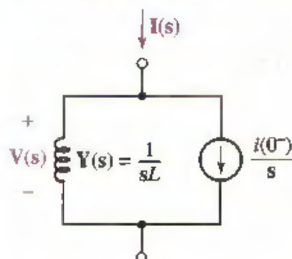
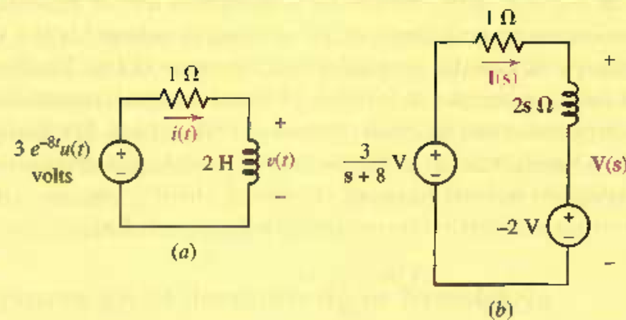


FIGURA 15.2 Modelo alternativo en el dominio de la frecuencia del inductor, con una admitancia $1/\mathbf{s}L$ y una fuente de corriente $i(0^-)/\mathbf{s}$.

Vale la pena un breve comentario acerca de las unidades. Cuando se calcula la transformada de Laplace de una corriente $i(t)$, se está integrando respecto del tiempo. Por lo tanto, las unidades de $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ técnicamente son amperes≈segundos; de modo similar, las unidades de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ son volts·segundos. No obstante, por convención se ha decidido eliminar los segundos y asignar a $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ las unidades de amperes y medir $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ en volts. Dicha convención no presenta ningún problema hasta que se revisa una ecuación como la [5] y aparece un término similar a $i(0^-)/\mathbf{s}$ que se encuentra en aparente conflicto con las unidades de $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ del lado izquierdo. Si bien se seguirán midiendo las cantidades fasoriales en "amperes" y "volts", al verificar las unidades de una ecuación para revisar el álgebra, ¡es necesario recordar los segundos!

EJEMPLO 15.1

Calcular la tensión $v(t)$ de la figura 15.3*a*, dada una corriente inicial $i(0^-) = 1$ A.



■ **FIGURA 15.3** (*a*) Circuito simple de resistencia -inductor para el que se desea la tensión $v(t)$ (*b*) El circuito equivalente en el dominio de la frecuencia, que incluye la corriente inicial en el inductor mediante el uso de una fuente de tensión en serie $-Li(0^-)$.

Para comenzar se debe convertir el circuito de la figura 15.3*a* en su equivalente en el dominio de la frecuencia, que se muestra en la figura 15.3*b*; el inductor se sustituyó por un modelo de dos componentes: una impedancia $s L = 2s\ \Omega$ y una fuente de tensión independiente $-Li(0^-) = -2$ V.

Se busca la cantidad marcada $\mathbf{V}(s)$, pues su transformada inversa dará como resultado $v(t)$. Observar que $\mathbf{V}(s)$ aparece entre los extremos del modelo del inductor completo, y no sólo del componente de la impedancia.

Optando por la ruta directa, se escribe

$$\mathbf{I}(s) = \frac{\left[\dfrac{3}{s+8} + 2\right]}{1 + 2s} = \frac{s + 9.5}{(s+8)(s+0.5)}$$

y

$$\mathbf{V}(s) = 2s\mathbf{I}(s) - 2$$

por lo que

$$\mathbf{V}(s) = \frac{2s(s+9.5)}{(s+8)(s+0.5)} - 2$$

Antes de aplicar la transformada inversa de Laplace de esta expresión, vale la pena dedicar tiempo y esfuerzo para simplificarla. Por lo tanto,

$$\mathbf{V}(s) = \frac{2s - 8}{(s+8)(s+0.5)}$$

Recurriendo a la técnica de la expansión en fracciones parciales (a mano o con el auxilio de MATLAB), se puede ver que

$$\mathbf{V}(s) = \frac{3.2}{s+8} - \frac{1.2}{s+0.5}$$

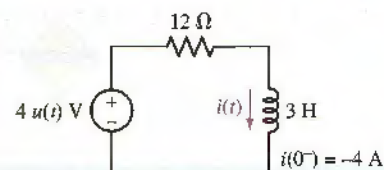
Mediante la consulta de la tabla 14.1, se sabe que la transformada inversa es

$$v(t) = [3.2e^{-8t} - 1.2e^{-0.5t}]u(t) \qquad \text{volts}$$

PRÁCTICA

15.1 Determinar la corriente $i(t)$ del circuito de la figura 15.4.

Respuesta: $\frac{1}{3}[1 - 13e^{-4t}]u(t)$ A.

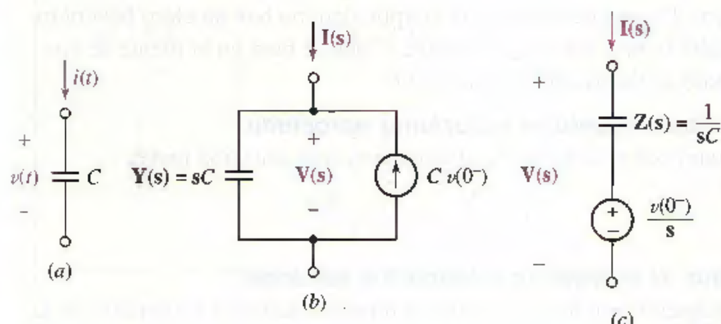


■ **FIGURA 15.4**

Modelo de capacitores en el dominio s

Los mismos conceptos se aplican también a los capacitores en el dominio s. De acuerdo con la convención de signos pasiva, como se ilustra en la figura 15.5*a*, la ecuación que gobierna al capacitor es

$$i = C\frac{dv}{dt}$$



■ **FIGURA 15.5** (*a*) Capacitor en el dominio del tiempo, en el que se indican $v(t)$ e $i(t)$. (*b*) Modelo en el dominio de la frecuencia de un capacitor con tensión inicial de $v(0^-)$. (*c*) Modelo equivalente obtenido a través de una transformación de fuente.

Al tomar la transformada de Laplace en ambos lados, se tiene

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = C[\mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s}) - v(0^-)]$$

o

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}C\mathbf{V}(\mathbf{s}) - Cv(0^-) \qquad [6]$$

cuyo modelo puede ser una admitancia sC en paralelo con una fuente de corriente $Cv(0^-)$, como en la figura 15.5*b*. Al efectuar una transformación de fuente en este circuito (con cuidado en seguir la convención de signos pasiva), se produce un modelo equivalente del capacitor compuesto por una impedancia $1/\mathbf{s}C$ en serie con una fuente de tensión $v(0^-)/\mathbf{s}$, como se muestra en la figura 15.5*c*.

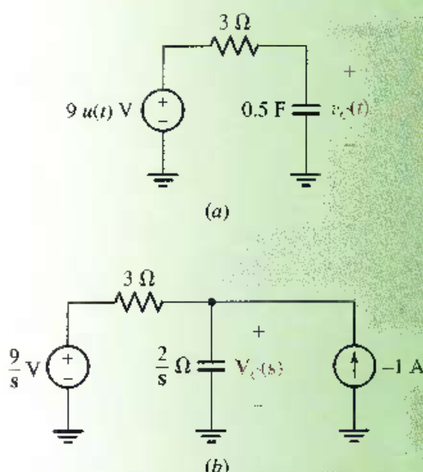
Al trabajar con estos equivalentes en el dominio *s* se debe cuidar de no confundirse con las fuentes independientes que se utilizan para incluir las condiciones iniciales. La condición inicial de un inductor está dada como $i(0^-)$; dicho término quizá aparezca como parte de una fuente de tensión o de una de corriente, según el modelo que se elija. La condición inicial de un capacitor está dada como $v(0^-)$, en cuyo caso el término puede aparecer como parte de una fuente de tensión o de una de corriente. Un error muy común de los estudiantes que tra-



bajan con el análisis en el dominio s por primera vez es usar siempre $v(0^-)$ para la componente de la fuente de tensión del modelo, aun cuando trabajen con un inductor.

EJEMPLO 15.2

Determinar $v_C(t)$ en el circuito de la figura 15.6a, bajo el supuesto de una tensión inicial $v_C(0^-) = -2$ V.



■ **FIGURA 15.6** (a) Circuito para el que se requiere la corriente. (b) Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia, en el que se emplea el modelo basado en la fuente de corriente para tomar en cuenta la condición inicial del capacitor.

Identificar el objetivo del problema.
Se necesita la expresión de la tensión en el capacitor, $v_C(t)$.

Recopilar la información conocida.
El problema especifica una tensión inicial en el capacitor de −2 V.

Elaborar un plan.
De nuevo, el primer paso consiste en dibujar el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia. Al hacerlo de esa manera, se debe decidir qué modelo de capacitor utilizar, pues se tiene presente una tensión inicial distinta de cero. En un circuito de esta simplicidad, no hay un claro beneficio de un modelo u otro, por lo que se elige el que se basa en la fuente de corriente, como se ilustra en la figura 15.6b.

Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.
Se continuará con el análisis escribiendo una sola ecuación nodal:

$$-1 = \frac{\mathbf{V}_C}{2/\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{V}_C - 9/\mathbf{s}}{3}$$

Determinar si se requiere información adicional.
Hay una ecuación con una incógnita: la representación en el dominio de la frecuencia de la tensión deseada en el capacitor.

Buscar la solución.
Resolviendo para $\mathbf{V}_C$, se observa que:

$$\mathbf{V}_C = \frac{18/\mathbf{s} - 6}{3\mathbf{s} + 2} = -2\frac{(\mathbf{s} - 3)}{\mathbf{s}(\mathbf{s} + 2/3)}$$

El desarrollo en fracciones parciales produce

$$\mathbf{V}_C = \frac{9}{\mathbf{s}} - \frac{11}{\mathbf{s} + 2/3}$$

Se obtiene $v_C(t)$ tomando la transformada inversa de Laplace de esta expresión, lo que origina

$$v_C(t) = 9u(t) - 11e^{-2t/3}u(t) \qquad \text{V}$$

o, en forma más compacta:

$$v_C(t) = [9 - 11e^{-2t/3}]u(t) \qquad \text{V}$$

Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?
Una verificación rápida de $t = 0$ da $v_C(t) = -2$V, pues se basa en el conocimiento de la condición inicial. Además, a medida que $t \to \infty$, $v_C(t) \to 9$ V, como se debería esperar a partir de la figura 15.6a una vez que se haya extinguido (o desaparecido) el transitorio.

PRÁCTICA

15.2 Repetir el ejemplo 15.2 utilizando el modelo de capacitor basado en la fuente de tensión.

Respuesta: $[9 - 11e^{-2t/3}]u(t)$ V.

Los resultados de esta sección se resumen en la tabla 15.1. Observar que en cada caso se supone la convención de signos pasiva.

TABLA 15.1 Resumen de representaciones de elementos en los dominios del tiempo y la frecuencia

Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia	
Resistencia: $v(t) = R\,i(t)$; $i(t)$, $+$ $v(t)$ $-$, R	$\mathbf{V}(s) = R\,\mathbf{I}(s)$; $\mathbf{I}(s)$, $+$ $\mathbf{V}(s)$ $-$, $\mathbf{Z}(s) = R$	$\mathbf{I}(s) = \frac{1}{R}\mathbf{V}(s)$; $\mathbf{I}(s)$, $+$ $\mathbf{V}(s)$ $-$, $\mathbf{Y}(s) = \frac{1}{R}$
Inductor: $v(t) = L\frac{di}{dt}$; $i(t)$, $+$ $v(t)$ $-$, L	$\mathbf{V}(s) = sL\mathbf{I}(s) - Li(0^-)$; $\mathbf{I}(s)$, $+$ $\mathbf{V}(s)$ $-$, $\mathbf{Z}(s) = sL$, $-Li(0^-)$	$\mathbf{I}(s) = \frac{\mathbf{V}(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$; $\mathbf{I}(s)$, $+$ $\mathbf{V}(s)$ $-$, $\mathbf{Y}(s) = \frac{1}{sL}$, $\frac{i(0^-)}{s}$
Capacitor: $i(t) = C\frac{dv}{dt}$; $i(t)$, $+$ $v(t)$ $-$, C	$\mathbf{V}(s) = \frac{\mathbf{I}(s)}{sC} + \frac{v(0^-)}{s}$; $\mathbf{I}(s)$, $+$ $\mathbf{V}(s)$ $-$, $\mathbf{Z}(s) = \frac{1}{sC}$, $\frac{v(0^-)}{s}$	$\mathbf{I}(s) = sC\mathbf{V}(s) - Cv(0^-)$; $\mathbf{I}(s)$, $+$ $\mathbf{V}(s)$ $-$, $\mathbf{Y}(s) = sC$, $Cv(0^-)$

15.2 ANÁLISIS NODAL Y DE MALLA EN EL DOMINIO s

En el capítulo 10 se estudió la manera de transformar los circuitos en el dominio del tiempo activados por fuentes senoidales, en sus equivalentes en el dominio de la frecuencia. Los beneficios de esta transformación resultaron evidentes de inmediato, pues ya no fue necesario resolver ecuaciones integrodiferenciales. El análisis nodal y de malla de tales circuitos (restringido a determinar sólo la respuesta en estado permanente) produjo expresiones algebraicas en términos de $j\omega$, siendo ω la frecuencia angular de las fuentes.

Se ha visto ahora que se puede extender el concepto de impedancia al caso más general de frecuencia compleja ($\mathbf{s} = \sigma + j\omega$). Una vez que se transforman los circuitos del dominio del tiempo al de la frecuencia, la realización del análisis nodal o de malla tendrá como resultado, también en este caso, expresiones puramente algebraicas, pero esta vez en términos de la frecuencia compleja **s**. La solución de las ecuaciones resultantes requiere el uso de la sustitución de variables, la regla de Cramer o un programa de cómputo capaz de manipular el álgebra simbólica (por ejemplo, MATLAB). En esta sección se presentan dos ejemplos de razonable complejidad, a fin de que se examinen estos temas con mayor detalle. Sin embargo, primero se hará una breve pausa para ver la forma en que puede utilizarse MATLAB para apoyar en esta tarea.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

En el capítulo anterior se vio que se utiliza MATLAB para determinar los residuos de funciones racionales en el dominio *s*, lo cual hace que el proceso inverso de la transformada de Laplace sea mucho más sencillo. Sin embargo, este programa de cómputo es en realidad mucho más poderoso, pues dispone de numerosas rutinas incorporadas para la manipulación de las expresiones algebraicas. De hecho, como se verá en este ejemplo, MATLAB incluso puede efectuar de manera directa las transformadas inversas de Laplace a través de las funciones racionales que se obtienen gracias al análisis de circuitos.

Se comienza viendo cómo puede utilizarse MATLAB para trabajar con expresiones algebraicas, las cuales se almacenan como secuencias de caracteres, donde se utiliza el apóstrofe (‘) en la expresión de definición. Por ejemplo, se representó antes el polinomio $\mathbf{p(s)} = \mathbf{s}^3 - 12\mathbf{s} + 6$ como un vector:

```
EDU» p = [1   0   −12   6].
```

Sin embargo, también se representa de manera simbólica:

```
EDU» p = ‘s^3 − 12*s + 6’.
```

Estas dos representaciones no son iguales en MATLAB, sino que son conceptos distintos. Cuando se desea manipular *simbólicamente* una expresión algebraica, se requiere la segunda representación. Esta capacidad resulta en especial útil al trabajar con las ecuaciones simultáneas.

Considerar el conjunto de ecuaciones

$$(3\mathbf{s} + 10)\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = \frac{4}{\mathbf{s}+2}$$

$$-10\mathbf{I}_1 + (4\mathbf{s} + 10)\mathbf{I}_2 = \frac{-2}{\mathbf{s}+1}$$

Utilizando la notación simbólica de MATLAB, se definen dos variables de secuencia:

EDU» eqn1 = '(3*s+10)*I1 − 10*I2 = 4/(s+2)';

EDU» eqn2 = '−10*I1 + (4*s+10)*I2 = −2/(s+1)';

Observar que la ecuación completa se incluyó en cada secuencia; la meta consiste en resolver las dos ecuaciones de las variables I1 e I2. MATLAB proporciona una rutina especial, *solve*(), que manipula tales ecuaciones. Se aplica listando las ecuaciones separadas (definidas como secuencias), seguidas por una lista de incógnitas (definidas también como secuencias):

EDU» solución = solve(eqn1, eqn2, 'I1', 'I2');

La respuesta se almacena en la variable *solución*, aunque en una disposición un poco inesperada. MATLAB da como respuesta, en una forma que se denomina estructura, una construcción que resulta familiar para los programadores de C. En esta etapa, sin embargo, todo lo que se necesita conocer es la forma de extraer la respuesta. Si se teclea

EDU» I1 = solución.I1

se obtiene la respuesta

I1 =

2*(4*s+9)/(s+1)/(6*s^2+47*s+70)

que indica que se asignó una expresión del polinomio s a la variable I1; se utiliza una operación similar para la variable I2.

Ahora se procede de manera directa para determinar la transformada inversa de Laplace utilizando la función *ilaplace*():

EDU» i1 = ilaplace(I1)

i1 =

10/29*exp(−t)−172/667*exp(−35/6*t)−2/23*exp(−2*t)

De esta manera, se obtiene con rapidez la solución de las ecuaciones simultáneas que resultan del análisis nodal o de malla, y se determinan también las transformadas inversas de Laplace. El comando *ezplot*(i1) permite ver la forma en que se observa la solución, si así se desea. Debe observarse que las expresiones complicadas a veces quizá confundan a MATLAB; en tales situaciones, *ilaplace*() quizá no dé una respuesta útil.

Vale la pena mencionar unas cuantas funciones relacionadas, pues también se utilizarán para revisar de inmediato las respuestas calculadas de manera manual. La función *numden*() convierte una función racional en dos variables independientes: una que contiene el numerador y la otra el denominador. Por ejemplo,

EDU» [N, D] = numden(I1)

da como resultado dos expresiones algebraicas almacenadas en N y D, respectivamente:

N =

8*s+18

D =

(s+1)*(6*s^2+47*s+70)

(Continúa en la siguiente página)

Para aplicar la experiencia anterior a la función *residue*(), es necesario convertir cada expresión simbólica (secuencia) en un vector que contenga los coeficientes del polinomio. Lo anterior se logra con el comando *sym2poly*():

```
EDU» n = sym2poly(N);
```

y

```
EDU» d = sym2poly(D)
d =
6   53   117   70
```

después de lo cual se determinan los residuos

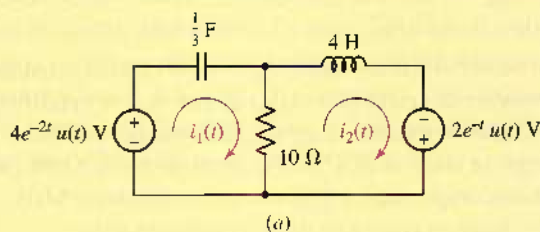
```
EDU» [r p y] = residue(n,d)
r =          p =          y =
-0.2579      -5.8333      [ ]
-0.0870      -2.0000
 0.3448      -1.0000
```

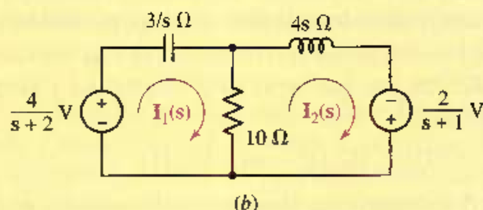
lo cual concuerda con lo que se obtuvo mediante el empleo de *ilaplace*().

Con estas nuevas capacidades de MATLAB (o un deseo arraigado de intentar un método alternativo, como el de Cramer o la sustitución directa), se está listo para proceder a analizar unos cuantos circuitos.

EJEMPLO 15.3

Determinar las dos corrientes de malla i_1 e i_2 del circuito de la figura 15.7*a*. Al inicio, no hay energía almacenada en el circuito.





■ **FIGURA 15.7** (*a*) Circuito de dos mallas para el que se desean corrientes de malla individuales. (*b*) Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia.

Como siempre, el primer paso consiste en dibujar el circuito equivalente apropiado en el dominio de la frecuencia. Puesto que no se tiene energía

almacenada en el circuito en $t = 0^-$, se sustituye el capacitor de $\frac{1}{3}$ F por una impedancia de $3/\mathbf{s}\ \Omega$ y el inductor de 4 (H) por una impedancia de $4\mathbf{s}\ \Omega$ como en la figura 15.7*b*.

A continuación, se escriben dos ecuaciones de malla justo como se hizo antes:

$$-\frac{4}{\mathbf{s}+2} + \frac{3}{\mathbf{s}}\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = 0$$

o

$$\left(\frac{3}{\mathbf{s}} + 10\right)\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = \frac{4}{\mathbf{s}+2} \qquad \text{(malla 1)}$$

y

$$-\frac{2}{\mathbf{s}+1} + 10\mathbf{I}_2 - 10\mathbf{I}_1 + 4\mathbf{s}\mathbf{I}_2 = 0$$

o

$$-10\mathbf{I}_1 + (4\mathbf{s} + 10)\mathbf{I}_2 = \frac{2}{\mathbf{s}+1} \qquad \text{(malla 2)}$$

Despejando $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, se encuentra que

$$\mathbf{I}_1 = \frac{2\mathbf{s}(4\mathbf{s}^2 + 19\mathbf{s} + 20)}{(20\mathbf{s}^4 + 66\mathbf{s}^3 + 73\mathbf{s}^2 + 57\mathbf{s} + 30)} \quad \text{A}$$

y

$$\mathbf{I}_2 = \frac{30\mathbf{s}^2 + 43\mathbf{s} + 6}{(\mathbf{s}+2)(20\mathbf{s}^3 + 26\mathbf{s}^2 + 21\mathbf{s} + 15)} \quad \text{A}$$

Todo lo que resta es obtener la transformada inversa de Laplace de cada función, luego de lo cual se tiene

$$i_1(t) = -96.39e^{-2t} - 344.8e^{-t} + 841.2e^{-0.15t}\cos 0.8529t + 197.7e^{-0.15t}\operatorname{sen} 0.8529t \quad \text{mA}$$

e

$$i_2(t) = -481.9e^{-2t} - 241.4e^{-t} + 723.3e^{-0.15t}\cos 0.8529t + 472.8e^{-0.15t}\operatorname{sen} 0.8529t \quad \text{mA}$$

Se indicó (de manera indirecta) que no fluye corriente a través del inductor en $t = 0^-$. Por lo tanto, $i_2(0^-) = 0$ y, en consecuencia, $i_2(0^+)$ debe ser también igual a 0. ¿Este resultado es válido para su respuesta?

PRÁCTICA

15.3 Determinar las corrientes de malla i_1 e i_2 en el circuito de la figura 15.8. Se podría suponer que no hay energía almacenada en el circuito en $t = 0^-$.

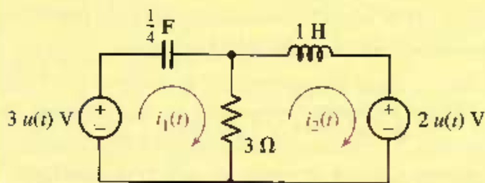
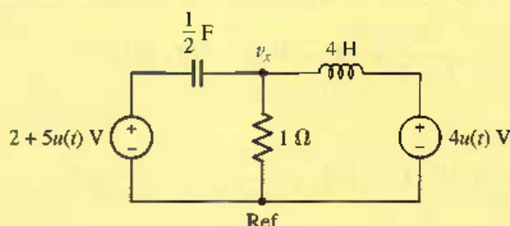


FIGURA 15.8

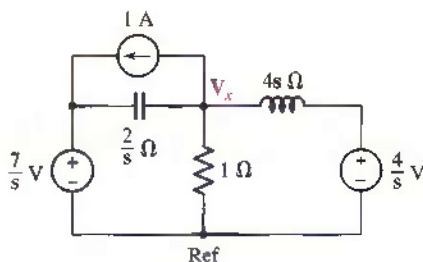
Respuesta: $i_1 = e^{-2t/3}\cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + \left(\sqrt{2}/8\right)e^{-2t/3}\operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$ A;
$i_2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-2t/3}\cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + \left(13\sqrt{2}/24\right)e^{-2t/3}\operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$ A.

EJEMPLO 15.4

Calcular la tensión v_x en el circuito de la figura 15.9 utilizando las técnicas del análisis nodal.



■ **FIGURA 15.9** Circuito simple de cuatro nodos que contiene dos elementos de almacenamiento de energía.



■ **FIGURA 15.10** Circuito equivalente en el dominio s de la figura 15.9.

El primer paso consiste en dibujar el circuito correspondiente en el dominio s. Se puede observar que el capacitor $\frac{1}{2}$ F tiene una tensión inicial de 2 V en sus terminales en el tiempo $t = 0^-$, lo cual requiere que se emplee uno de los dos modelos de la figura 15.5. Puesto que se utilizará el análisis nodal, quizás sea mejor usar el modelo de la figura 15.5*b*. El circuito resultante se muestra en la figura 15.10.

Una vez especificadas las dos o tres tensiones nodales, solamente queda una ecuación nodal por escribir:

$$-1 = \frac{\mathbf{V}_x - \dfrac{7}{\mathbf{s}}}{\dfrac{2}{\mathbf{s}}} + \mathbf{V}_x + \frac{\mathbf{V}_x - \dfrac{4}{\mathbf{s}}}{4\mathbf{s}}$$

por lo que

$$\mathbf{V}_x = \frac{10\mathbf{s}^2 + 4}{\mathbf{s}(2\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 1)} = \frac{5\mathbf{s}^2 + 2}{\mathbf{s}\left(\mathbf{s} + 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\mathbf{s} + 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

La tensión nodal v_x se encuentra llevando a cabo la transformada inversa de Laplace, por medio de la cual se puede ver que

$$v_x = [4 + 6.864e^{-1.707t} - 5.864e^{-0.2929t}]u(t)$$

o

$$v_x = \left[4 - e^{-t}\left(9\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,\frac{\sqrt{2}}{2}t - \cosh\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right]u(t)$$

¿Es correcta la respuesta? Una forma de verificarla es evaluar la tensión en el capacitor en $t = 0$, ya que se sabe que será de 2 V. Por ende,

$$\mathbf{V}_C = \frac{7}{\mathbf{s}} - \mathbf{V}_x = \frac{4\mathbf{s}^2 + 28\mathbf{s} + 3}{\mathbf{s}(2\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 1)}$$

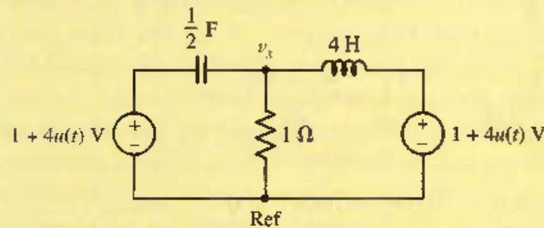
Multiplicando $\mathbf{V}_C$ por s y calculando el límite de $\mathbf{s} \to \infty$, se encuentra que

$$v_c(0^+) = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}\left[\frac{4\mathbf{s}^2 + 28\mathbf{s} + 3}{2\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 1}\right] = 2\text{ V}$$

como se esperaba.

PRÁCTICA

15.4 Aplicar el análisis nodal para calcular $v_x(t)$ en el circuito de la figura 15.11.

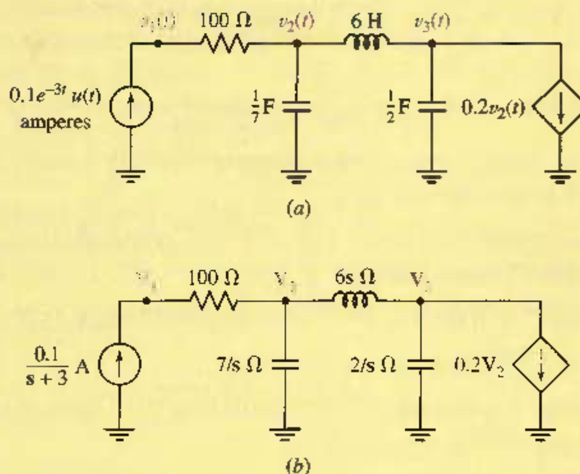


■ **FIGURA 15.11** Para el problema de práctica 15.4.

Respuesta: $[5 + 5.657(e^{-1.707t} - e^{-0.2929t})]u(t)$.

EJEMPLO 15.5

Aplicar el análisis nodal para determinar los voltajes v_1, v_2 y v_3 en el circuito de la figura 15.12*a*. No hay energía almacenada en el circuito en $t = 0^-$.



■ **FIGURA 15.12** (*a*) Circuito de cuatro nodos que contiene dos capacitores y un inductor, ninguno de los cuales almacena energía en $t = 0^-$. (*b*) Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia.

Dicho circuito consta de tres elementos de almacenamiento de energía separados, ninguno de los cuales almacena energía en $t = 0^-$. Por ello, cada uno se podría sustituir por su impedancia correspondiente, como se muestra en la figura 15.12*b*. Se observa también la presencia de una fuente de corriente dependiente controlada por la tensión nodal $v_2(t)$.

Empezando en el nodo 1, se escribe la siguiente ecuación:

$$\frac{0.1}{s+3} = \frac{V_1 - V_2}{100}$$

(Continúa en la siguiente página)

o

$$\frac{10}{s+3} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 \qquad \text{(nodo 1)}$$

y en el nodo 2:

$$0 = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{100} + \frac{\mathbf{V}_2}{7/s} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3}{6s}$$

o

$$-42s\mathbf{V}_1 + (600s^2 + 42s + 700)\mathbf{V}_2 - 700\mathbf{V}_3 = 0 \qquad \text{(nodo 2)}$$

y, por último, en el nodo 3

$$-0.2\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2}{6s} + \frac{\mathbf{V}_3}{2/s}$$

o

$$(1.2s - 1)\mathbf{V}_2 + (3s^2 + 1)\mathbf{V}_3 = 0$$

Al resolver este conjunto de ecuaciones respecto de las tensiones nodales, se obtiene

$$\mathbf{V}_1 = 3\frac{100s^3 + 7s^2 + 150s + 49}{(s+3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

$$\mathbf{V}_2 = 7\frac{3s^2 + 1}{(s+3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

$$\mathbf{V}_3 = -1.4\frac{6s - 5}{(s+3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

El único paso que queda es tomar la transformada inversa de Laplace de cada tensión, por lo que, para $t > 0$,

$$v_1(t) = 9.789e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t} + 0.1488e^{0.1471t}\cos(1.251t) + 0.05172e^{0.1471t}\operatorname{sen}(1.251t) \text{ V}$$

$$v_2(t) = -0.2105e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t} + 0.1488e^{0.1471t}\cos(1.251t) + 0.05172e^{0.1471t}\operatorname{sen}(1.251t) \text{ V}$$

$$v_3(t) = -0.03459e^{-3t} + 0.06631e^{-0.2941t} - 0.03172e^{0.1471t}\cos(1.251t) - 0.06362e^{0.1471t}\operatorname{sen}(1.251t) \text{ V}$$

Observar que la respuesta crece en forma exponencial como resultado de la acción de la fuente de corriente dependiente. En esencia, el circuito se está disparando, lo que indica que en algún punto un componente se está fundiendo, explotando o falla de alguna manera similar. ¡Si bien resulta evidente que el análisis de los circuitos de este tipo implica una gran cantidad de trabajo, las ventajas relativas a las técnicas en el dominio s son claras una vez que se considera que llevan a cabo el análisis en el dominio del tiempo!

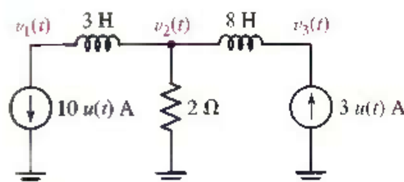


FIGURA 15.13

PRÁCTICA

15.5 Emplear el análisis nodal para determinar las tensiones v_1, v_2 y v_3 en el circuito de la figura 15.13. Suponer que no hay energía almacenada en los inductores en $t = 0^-$.

Respuesta: $v_1(t) = -30\delta(t) - 14u(t)$ V; $v_2(t) = -14u(t)$ V; $v_3(t) = 24\delta(t) - 14u(t)$ V.

15.3 TÉCNICAS ADICIONALES DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS

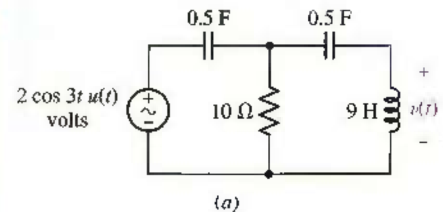
Según sea la meta específica al analizar un circuito en particular, se encuentra a menudo que se simplifica nuestra tarea si se elige con cuidado la técnica de análisis. Por ejemplo, rara vez se desea aplicar la superposición a un circuito que contiene 215 fuentes independientes, pues un método de este tipo requiere el análisis de ¡215 circuitos independientes! Sin embargo, al pensar que los elementos pasivos, como los capacitores y los inductores, fueran impedancias, se tiene la libertad de aplicar cualquiera de las técnicas de análisis de circuito que se estudiaron en los capítulos 3, 4 y 5 para los circuitos que se han transformado en sus equivalentes en el dominio s.

De esta forma, tanto la superposición, las transformaciones de fuente como los teoremas de Thévenin y de Norton se aplican todos en el dominio s.

EJEMPLO 15.6

Simplificar el circuito de la figura 15.14*a* mediante las transformaciones de fuente y determinar la expresión de la tensión *v*(*t*).

Sin corrientes o tensiones iniciales especificadas y una $u(t)$ que multiplica a la fuente de tensión, se concluye que, al inicio, no hay energía almacenada en el circuito. Por lo tanto, se dibuja el circuito en el dominio de la frecuencia como se muestra en la figura 15.14*b*.



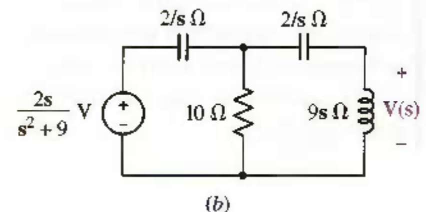


FIGURA 15.14 (*a*) Circuito que se va a simplificar mediante transformaciones de puente. (*b*) Representación en el dominio de la frecuencia.

La estrategia consiste en efectuar varias transformaciones de fuente sucesivas para combinar las dos impedancias de $2/\mathbf{s}$ Ω y la resistencia de 10 Ω; se debe dejar sola la impedancia de 9s Ω cuando la cantidad deseada $\mathbf{V(s)}$ aparezca en sus terminales. Se podría transformar ahora la fuente de tensión y la impedancia más a la izquierda de $2/\mathbf{s}$ Ω en una fuente de corriente

$$\mathbf{I(s)} = \left(\frac{2\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+9}\right)\left(\frac{\mathbf{s}}{2}\right) = \frac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^2+9} \qquad \text{A}$$

en paralelo con una impedancia de $2/\mathbf{s}$ Ω.

Como se muestra en la figura 15.15*a*, después de dicha transformación se tiene $\mathbf{Z}_1 \equiv (2/\mathbf{s})\|10 = 20/(10\mathbf{s}+2)$ Ω, que enfrenta a la fuente de corriente. Al efectuar otra transformación de fuente, se tiene una fuente de tensión $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ tal que

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{s}) = \left(\frac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^2+9}\right)\left(\frac{20}{10\mathbf{s}+2}\right)$$

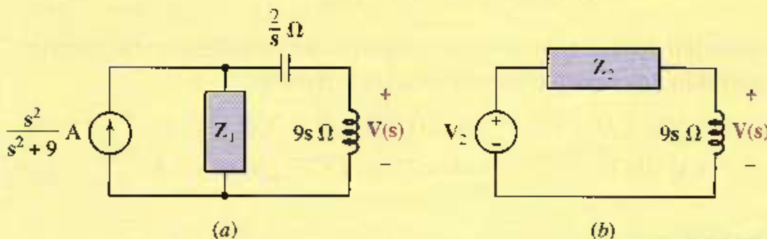


FIGURA 15.15 (*a*) Circuito después de la primera transformación de fuente. (*b*) Circuito final en el que se analizará.

La fuente de tensión está en serie con $\mathbf{Z}_1$ y también con la impedancia que queda $2/\mathbf{s}$; la combinación de $\mathbf{Z}_1$ y $2/\mathbf{s}$ en una nueva impedancia $\mathbf{Z}_2$ produce

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{20}{10\mathbf{s}+2} + \frac{2}{\mathbf{s}} = \frac{40\mathbf{s}+4}{\mathbf{s}(10\mathbf{s}+2)} \qquad \Omega$$

(Continúa en la siguiente página)

El circuito que resulta se muestra en la figura 15.15*b*. En esta etapa se está preparado para obtener la expresión de la tensión **V**(s) utilizando la división de tensión simple:

$$\mathbf{V}(s) = \left(\frac{s^2}{s^2+9}\right)\left(\frac{20}{10s+2}\right)\frac{9s}{9s+\left[\dfrac{40s+4}{s(10s+2)}\right]}$$
$$= \frac{180s^4}{(s^2+9)(90s^3+18s^2+40s+4)}$$

Ambos términos del denominador poseen raíces complejas. Al emplear MATLAB para factorizar el denominador y luego determinar los residuos,

```
EDU» d1 = 's^2 + 9';
EDU» d2 = '90*s^3 + 18*s^2 + 40*s + 4';
EDU» d = symmul(d1, d2);
EDU» denominador = expand(d);
EDU» den = sim2poli(denominador);
EDU» num = [180 0 0 0 0];
EDU» [r p y] = residuo(num, den);
```

se encuentra que

$$\mathbf{V}(s) = \frac{1.047+j0.0716}{s-j3} + \frac{1.047-j0.0716}{s+j3} - \frac{0.0471+j0.0191}{s+0.04885-j0.6573}$$
$$- \frac{0.0471-j0.0191}{s+0.04885+j0.6573} + \frac{5.590\times10^{-5}}{s+0.1023}$$

Observar que cada término que tiene un polo complejo cuenta con un término acompañante que es su conjugado complejo. En cualquier sistema físico, los polos complejos siempre aparecerán en pares conjugados.

Tomando la transformada inversa de cada término y escribiendo $1.047 + j0.0716$ como $1.049e^{j3.912^\circ}$ y $0.0471 + j0.0191$ como $0.05083e^{j157.9^\circ}$ se tiene

$$v(t) = 1.049e^{j3.912^\circ}e^{j3t}u(t) + 1.049e^{-j3.912^\circ}e^{-j3t}u(t)$$
$$+ 0.05083e^{-j157.9^\circ}e^{-0.04885t}e^{-j0.6573t}u(t)$$
$$+ 0.05083e^{+j157.9^\circ}e^{-0.04885t}e^{+j0.6573t}u(t)$$
$$+ 5.590\times10^{-5}e^{-0.1023t}u(t)$$

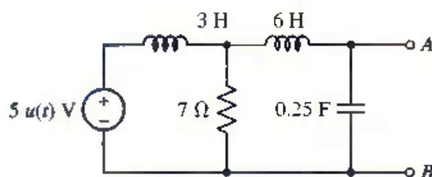
La conversión de las exponenciales complejas en senoides permite escribir una expresión ligeramente simplificada de la tensión:

$$v(t) = [5.590\times10^{-5}e^{-0.1023t} + 2.098\cos(3t+3.912^\circ)$$
$$+ 0.1017e^{-0.04885t}\cos(0.6573t+157.9^\circ)]u(t) \quad \text{V}$$

PRÁCTICA

15.6 Utilizando el método de la transformación de fuente, reducir el circuito de la figura 15.16 a una fuente de corriente simple en el dominio s en paralelo con una sola impedancia.

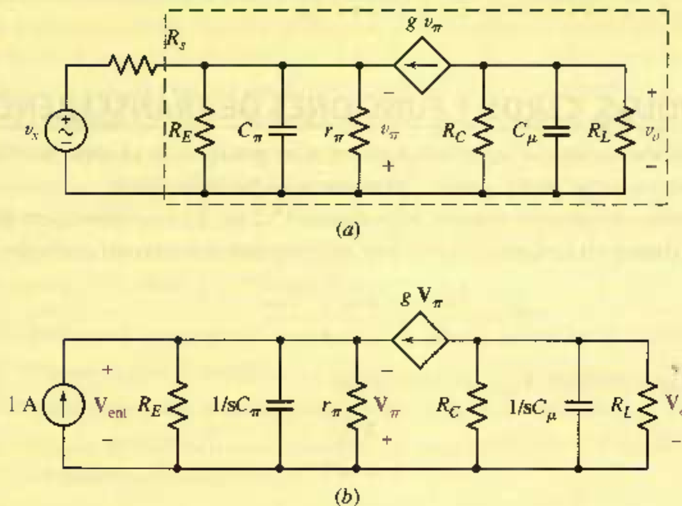
Respuesta: $\mathbf{I}_s = \dfrac{35}{s^2(18s+63)}$ A, $\mathbf{Z}_s = \dfrac{72s^2+252s}{18s^3+63s^2+12s+28}$ Ω.



■ **FIGURA 15.16**

EJEMPLO 15.7

Encontrar el equivalente de Thévenin en el dominio de la frecuencia de la red encerrada en un rectángulo de la figura 15.17*a*.



■ **FIGURA 15.17** (*a*) Circuito equivalente del amplificador transistorizado de "base común". (*b*) Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia con una fuente de prueba de 1 A, sustituida por la fuente de entrada representada por v_S y R_S.

Este circuito en particular se conoce como modelo "híbrido π" de un tipo especial de circuito de un transistor simple conocido como amplificador de base común. Los dos capacitores C_π y C_μ, representan capacitancias internas del transistor y por lo común son del orden de unos cuantos pF. La resistencia R_L del circuito representa la resistencia equivalente de Thévenin del dispositivo de salida, que podría ser un altavoz o incluso un láser semiconductor. La fuente de tensión v_S y la resistencia R_S representan, en conjunto, el equivalente de Thévenin del dispositivo de entrada, que podría ser un micrófono, una resistencia sensible a la luz o tal vez una antena de radio.

Así, se pide determinar el equivalente de Thévenin del circuito conectado al dispositivo de entrada; esta cantidad se conoce a menudo como ***impedancia de entrada*** del circuito amplificador. Después de convertir el circuito en su equivalente en el dominio de la frecuencia, se sustituye el dispositivo de entrada (v_s y R_s) por una fuente "de prueba" de 1 A, como se ilustra en la figura 15.17*b*. La impedancia de entrada $\mathbf{Z}_{ent}$ equivale entonces a:

$$\mathbf{Z}_{ent} = \frac{\mathbf{V}_{ent}}{1}$$

o sencillamente $\mathbf{V}_{ent}$. Se debe determinar una expresión de esta cantidad en términos de la fuente de 1 A, de las resistencias y de los capacitores y/o el parámetro de fuente dependiente g.

Al escribir una sola ecuación nodal en la entrada, se puede ver que

$$1 + g\mathbf{V}_\pi = \frac{\mathbf{V}_{ent}}{\mathbf{Z}_{eq}}$$

donde

$$\mathbf{Z}_{eq} = R_E \left\| \frac{1}{sC_\pi} \right\| r_\pi = \frac{R_E r_\pi}{r_\pi + R_E + sR_E r_\pi C_\pi}$$

Dado que $\mathbf{V}_\pi = -\mathbf{V}_{ent}$, se observa que

$$\mathbf{Z}_{ent} = \mathbf{V}_{ent} = \frac{R_E r_\pi}{r_\pi + R_E + sR_E r_\pi C_\pi + gR_E r_\pi} \quad \Omega$$

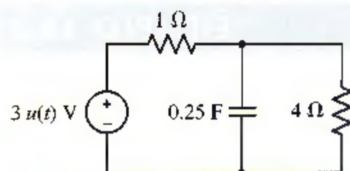


FIGURA 15.18

PRÁCTICA

15.7 Trabajando en el dominio s determinar el equivalente de Norton, visto desde la resistencia de 1 Ω para el circuito de la figura 15.18.

Respuestas: $\mathbf{I}_{sc} = 3(s+1)/4s$ A; $\mathbf{Z}_{th} = 4/(s+1)$ Ω.

15.4 POLOS, CEROS Y FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

En esta sección se repasa la terminología que se presentó en el capítulo 14 por primera vez, es decir, ***polos***, ***ceros*** y ***funciones de transferencia***.

Considerar el circuito simple de la figura 15.19*a*. El equivalente en el dominio s se ilustra en la figura 15.19*b* y el análisis nodal da como resultado:

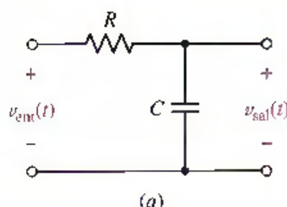
$$0 = \frac{\mathbf{V}_{sal}}{1/sC} + \frac{\mathbf{V}_{sal} - \mathbf{V}_{ent}}{R}$$

Al reordenar y despejar $\mathbf{V}_{sal}$, se observa que

$$\mathbf{V}_{sal} = \frac{\mathbf{V}_{ent}}{1 + sRC}$$

o

$$\mathbf{H}(s) \equiv \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = \frac{1}{1 + sRC} \qquad [7]$$



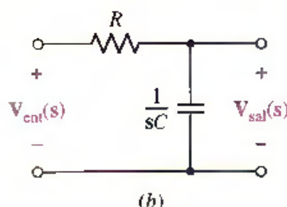


FIGURA 15.19 (*a*) Circuito simple de una resistencia y un capacitor, con una tensión de entrada y una tensión de salida especificada. (*b*) Circuito equivalente en el dominio.

donde **H**(s) es la ***función de transferencia*** del circuito, definida como la proporción (o razón) entre la salida y la entrada. Se podría especificar sin ningún problema una corriente particular como la cantidad de entrada o de salida, lo que implicaría una función de transferencia diferente del mismo circuito. Por lo general, los esquemas de circuito se leen de izquierda a derecha, debido a lo cual los diseñadores muchas veces ponen la entrada de un circuito a la izquierda del mismo esquema y las terminales de salida a su derecha, por lo menos en la medida de lo posible.

El concepto de función de transferencia es muy importante, tanto para el análisis de circuito como para otras áreas de la ingeniería. Son dos las razones. Primera, una vez que se conoce la función de transferencia de un circuito particular, se encuentra con facilidad la salida que resulta de *cualquier* entrada; todo lo que se necesita es multiplicar **H**(s) por la cantidad de entrada y tomar la transformada inversa de la expresión que se produce. Segunda, la forma de la función de transferencia contiene una gran cantidad de información acerca del comportamiento que se podría esperar de un circuito (o sistema) en particular.

Como se observó en la aplicación práctica del capítulo 14, para evaluar la estabilidad de un sistema se requiere determinar los polos y ceros de la función de transferencia **H**(s); se analizará este punto con detalle más adelante. La ecuación [7] se escribiría como

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \qquad [8]$$

Cuando se calcula la magnitud, se suele considerar a $+\infty$ y $-\infty$ como si fueran el mismo punto. Sin embargo, el ángulo de fase de la respuesta en valores muy grandes positivos y negativos de ω no necesita ser el mismo.

La magnitud de esta función tiende a cero cuando $s \to \infty$. De tal modo, se puede afirmar que **H**(s) tiene un ***cero*** en $s = \infty$. La función tiende a infinito en $s = -1/RC$; por lo tanto, se afirma que **H**(s) tiene un ***polo*** en $s = -1/RC$. Estas frecuencias se conocen como ***frecuencias críticas*** y su identificación temprana simplifica la construcción de las curvas de respuesta que se desarrollarán en la sección 15.7.

15.5 CONVOLUCIÓN

Las técnicas en el dominio s que se han desarrollado hasta el momento son muy útiles para determinar la respuesta de tensión y de corriente de un circuito particular. Sin embargo, en la práctica a menudo se deben enfrentar circuitos a los que se les pueden conectar fuentes arbitrarias y que requieren una forma eficiente de determinar la nueva salida cada vez. Esta tarea se hace fácilmente si se puede caracterizar el circuito básico mediante una función de transferencia llamada ***función del sistema***. Como está a punto de verse, resulta que tal función del sistema es la transformada de Laplace de la respuesta de impulso unitario del circuito.

El análisis puede continuar tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, aunque en general es de mayor utilidad trabajar en el dominio de la frecuencia. En tales situaciones, se cuenta con el proceso de cuatro pasos sencillos que se menciona a continuación:

1. Determinar la función de sistema del circuito (si es que no se conoce todavía).
2. Obtener la transformada de Laplace de la función forzada que se aplicará.
3. Multipliplicar esta transformada y la función del sistema entre sí, y finalmente
4. Obtener la transformada inversa de Laplace del producto a fin de encontrar la respuesta de salida.

Por estos medios algunas expresiones integrales más o menos complejas se reducirán a funciones simples de s, por lo que las operaciones matemáticas de integración y de diferenciación se sustituirán por las operaciones más simples de multiplicación y división algebraicas. Con estos señalamientos en mente, se procede ahora a examinar la respuesta de impulso unitario de un circuito y establecer su relación con la función del sistema. Después se considerarán algunos problemas de análisis concretos.

Respuesta al impulso

Sea una red eléctrica lineal N, sin energía inicial almacenada, a la que se aplica la función forzada $x(t)$. En algún punto de este circuito está presente una función de respuesta $y(t)$. Se muestra lo anterior en forma de diagrama de bloques en la figura 15.20*a* junto con los dibujos de funciones de tiempo genéricas. Se demuestra que la función forzada existe únicamente en el intervalo $a < t < b$. Por lo tanto, $y(t)$ sólo existe para $t > a$.

La pregunta que se desea responder ahora es: *"Si se conoce la forma de $x(t)$, ¿cómo se describe $y(t)$?"* Para responderla es necesario conocer algo sobre N. Supóngase que el conocimiento de N radica en el conocimiento de su repuesta cuando la función forzada es un impulso unitario $\delta(t)$. Esto es, se supone que se conoce $h(t)$, la función de respuesta que resulta cuando un impulso unitario se suministra como la función forzada en $t = 0$, como se muestra en la figura 15.20*b*. La función $h(t)$ suele recibir el nombre de función de respuesta al impulso unitario o ***respuesta al impulso***, y es una propiedad descriptiva muy importante de un circuito eléctrico.

Con base en el conocimiento de las transformadas de Laplace, se considera a ésta desde una perspectiva un poco diferente. Al transformar $x(t)$ en $\mathbf{X}(\mathbf{s})$ e $y(t)$ en $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$, se define la función de transferencia del sistema $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ como

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}{\mathbf{X}(\mathbf{s})}$$

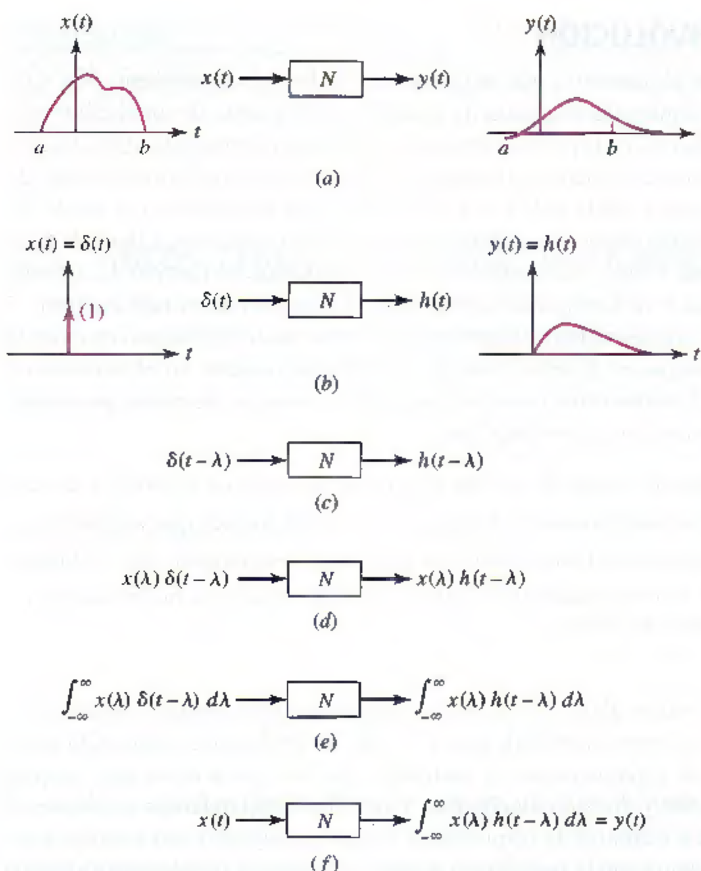


FIGURA 15.20 Desarrollo conceptual de la integral de convolución.

Si $x(t) = \delta(t)$, entonces, de acuerdo con la tabla 14.1, $\mathbf{X}(s) = 1$. Por lo tanto, $\mathbf{H}(s) = \mathbf{Y}(s)$, teniendo así, *en este caso*, $h(t) = y(t)$.

En vez de aplicar el impulso unitario en el tiempo $t = 0$, ahora suponer que se aplica en el tiempo $t = \lambda$ (lambda). Se puede observar que el único cambio en la salida es el retardo de tiempo. Por lo tanto, la salida se vuelve $h(t - \lambda)$ cuando la entrada es $\delta(t - \lambda)$, como se ve en la figura 15.20*c*. A continuación, suponer que el impulso de entrada tiene una intensidad diferente de la unitaria. De manera específica, dejar que la intensidad del impulso sea numéricamente igual al valor de $x(t)$ cuando $t = \lambda$. El valor $x(\lambda)$ es una constante; se sabe que multiplicar una función forzada en un circuito *lineal* por una constante ocasiona simplemente que la respuesta cambie de manera proporcional. Así, si la entrada cambia en $x(\lambda)\delta(t - \lambda)$, entonces la respuesta se vuelve $x(\lambda)h(t - \lambda)$, de acuerdo con la figura 15.20*d*.

Sumar ahora esta última entrada sobre todos los valores posibles de λ y utilizar el resultado como una función forzada de *N*. La linealidad establece que la salida debe ser igual a la suma de las respuestas que resultan del uso de todos los valores posibles de λ. En general, la integral de la entrada da como resultado la integral de la salida, lo cual se indica en la figura 15.20*e*. Sin embargo, ¿cuál es ahora la entrada? Dada la propiedad de filtrado[1] del impulso unitario, se observa que la entrada es sencillamente $x(t)$, la entrada original. Por lo tanto, la figura 15.20*e* puede representarse bajo la figura 15.20*f*.

(1) La propiedad de filtrado de la función impulso, descrita en la sección 14.5, establece que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$.

Integral de convolución

Si la entrada del sistema N es la función forzada $x(t)$, se sabe que la salida deberá ser la función $y(t)$, como se muestra en la figura15.20*a*. Por ende, a partir de la figura 15.20*f* se concluye que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda \qquad [9]$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso de N. Esta importante relación se conoce en todos lados como ***integral de convolución***. En otras palabras, esta última ecuación establece que *la salida es igual a la entrada convolucionada con la respuesta al impulso.* A menudo se abrevia por medio de

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

donde el asterisco se lee "convoluciona con".

¡Tener cuidado en no confundir esta nueva notación con la multiplicación!

La ecuación [9] algunas veces aparece de una forma un poco diferente, pero equivalente. Si $z = t - \lambda$, entonces $d\lambda = -dz$, y la expresión para $y(t)$ se convierte en

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} -x(t-z)h(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz$$

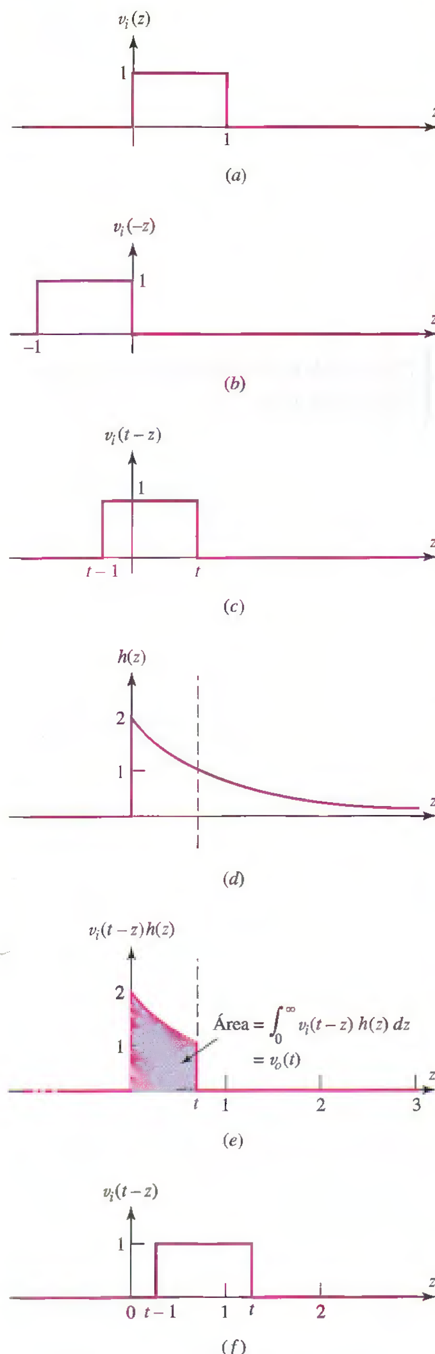
y puesto que el símbolo que se está utilizando para la variable de integración no tiene importancia, se puede modificar la ecuación [9] para escribirse bajo la siguiente forma

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(z)h(t-z)\,dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz \end{aligned} \qquad [10]$$

Convolución y sistemas realizables

El resultado que se obtiene a partir de la ecuación [10] es muy general; se aplica a cualquier sistema lineal. Sin embargo, se suele estar interesado en sistemas ***físicamente realizables***, *es decir,* aquellos que *existen* o *podrían existir,* pero esos sistemas tienen una propiedad que modifica ligeramente la integral de convolución. Esto es, *la respuesta del sistema no puede empezar antes de que se aplique la función forzada.* En particular, $h(t)$ es la respuesta del sistema que resulta de la aplicación de un impulso unitario en $t = 0$. Por lo tanto, $h(t)$ no puede existir para $t < 0$. Se desprende que, en la segunda integral de la ecuación [10], el integrando es cero cuando $z < 0$; en la primera integral, el integrando es cero cuando $(t - z)$ es negativo o cuando $z > t$. Por lo tanto, para sistemas *realizables* los límites de integración cambian en las integrales de convolución:

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{t} x(z)h(t-z)\,dz \\ &= \int_{0}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz \end{aligned}} \qquad [11]$$



■ **FIGURA 15.21** Conceptos gráficos para evaluar una integral de convolución.

Tanto la ecuación [10] como la [11] son válidas, aunque la última es más específica cuando se habla de sistemas lineales *realizables*, por lo que vale la pena memorizarla.

Método gráfico de convolución

Antes de ahondar más en la importancia de la respuesta de impulso de un circuito, se considerará un ejemplo numérico que proporcionará cierto conocimiento en cuanto a la forma en que se evalúa la integral de convolución. Si bien la expresión misma es muy simple, la evaluación a veces resulta problemática, sobre todo con respecto a los valores utilizados como límites de integración.

Suponer que la entrada es un impulso de tensión rectangular que empieza en $t = 0$, tiene una duración de 1 segundo y es de 1 V de amplitud:

$$x(t) = v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

Suponer también que este impulso de tensión se aplica a un circuito cuya respuesta al impulso se sabe que es una función exponencial de la forma

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

Se desea evaluar la tensión de salida $v_o(t)$. Se puede escribir la respuesta, de inmediato, en forma integral

$$y(t) = v_o(t) = v_i(t) * h(t) = \int_0^\infty v_i(t-z)h(z)\,dz$$

$$= \int_0^\infty [u(t-z) - u(t-z-1)][2e^{-z}u(z)]\,dz$$

Obtener esta expresión de $v_o(t)$ es muy simple, aunque la presencia de la gran cantidad de funciones de escalón unitario tiende a hacer confusa su evaluación e incluso quizás sea un poco molesta. Debe prestarse mucha atención a la determinación de las partes del intervalo de integración en el cual el integrando es cero.

Se recurrirá a cierto auxilio gráfico que ayude a comprender lo que afirma la integral de convolución. Se comienza dibujando varios ejes z alineados uno arriba del otro, como se muestra en la figura 15.21. Se sabe que $v_i(t)$ se ve de esa manera y por ello también se sabe que $v_i(z)$ se ve también de forma similar y se grafica en la figura 15.21*a*. La función $v_i(-z)$ es simplemente $v_i(z)$, que corre en dirección contraria con respecto a z, o está girando alrededor del eje de ordenadas, como se ilustra en la figura 15.21*b*. Después se desea representar $v_i(t-z)$, la cual es $v_i(-z)$ luego de que se ha corrido hacia la derecha por una cantidad $z = t$ como en la figura 15.21*c*. En el siguiente eje z, figura 15.21*d*, se grafica la respuesta de impulso $h(z) = 2e^{-z}\,v(z)$.

El paso siguiente es multiplicar las dos funciones $v_i(t-z)$ y $h(z)$; el resultado para un valor arbitrario de $t < 1$ se muestra en la figura 15.21*e*. Se busca un valor de la salida $v_o(t)$, el cual está dado por el *área* bajo la curva, resultado del producto de las dos funciones (la que se muestra sombreada en la figura).

Considerar en primera instancia $t < 0$. En este caso, no existe traslape entre $v_i(t-z)$ y $h(z)$, por lo que $v_o = 0$. A medida que t aumenta, se desplaza el impulso que se muestra en la figura 15.21*c* a la derecha, lo que produce un traslape con $h(z)$ una vez que $t > 0$. El área bajo la curva correspondiente de la figura Fig. 15.21*e* continúa aumentando a medida que aumenta el valor de t hasta que se alcanza un valor de $t = 1$. A medida que t aumenta más allá de este valor, se abre una banda entre $z = 0$ y el filo delantero del impulso, como se muestra en la figura 15.21*f*. Como resultado, el traslape con $h(z)$ disminuye.

En otras palabras, para valores de t que se encuentran entre cero y la unidad, se debe integrar desde $z = 0$ hasta $z = t$; para valores que excedan la unidad, el rango de integración es $t - 1 < z < t$. Por ende, se puede escribir

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t 2e^{-z}\,dz = 2(1 - e^{-t}) & 0 \le t \le 1 \\ \displaystyle\int_{t-1}^t 2e^{-z}\,dz = 2(e - 1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

Esta función se presenta graficada en función de la variable de tiempo t en la figura 15.22, teniendo así la solución completada.

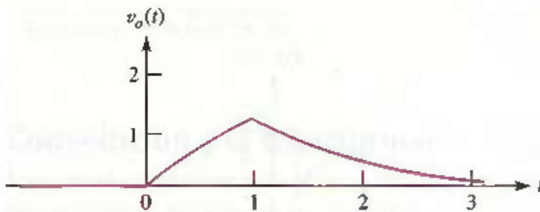


FIGURA 15.22 Función de salida v_o que se obtiene por medio de la convolución gráfica.

EJEMPLO 15.8

Aplicar una función de escalón unitario, $x(t) = u(t)$, como la entrada a un sistema cuya respuesta al impulso es $h(t) = u(t) - 2u(t - 1) + u(t - 2)$ y determinar la salida correspondiente $y(t) = x(t) * h(t)$.

El primer paso es graficar $x(t)$ y $h(t)$, según se indica en la figura 15.23.

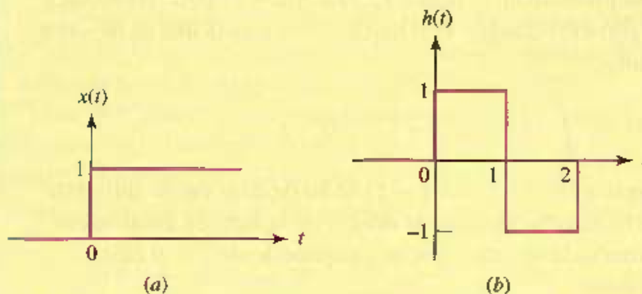


FIGURA 15.23 Dibujos de (a) la señal de entrada $x(t) = u(t)$ y (b) la respuesta al impulso unitario $h(t) = u(t) - 2u(t - 1) + u(t - 2)$, de un sistema lineal.

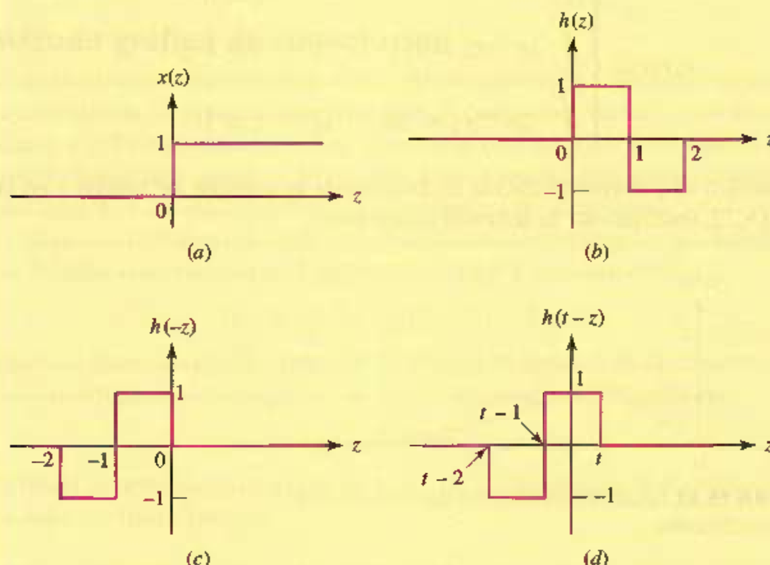
Se elige de manera arbitraria evaluar la primera integral de la ecuación [11]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(z)h(t - z)\,dz$$

y se elabora una secuencia de dibujos que ayude a seleccionar los límites de integración correctos. La figura 15.24 presenta estas funciones en orden: la entrada $x(z)$ como una función de z; la respuesta al impulso $h(z)$; la curva

(Continúa en la siguiente página)

de la cual es exactamente $h(-z)$, girada alrededor del eje vertical; y $h(t-z)$, que se obtiene corriendo $h(z)$, hacia la derecha t unidades. En este dibujo se ha elegido t en el intervalo $0 < t < 1$.



■ **FIGURA 15.24** (*a*) La señal de entrada y (*b*) la respuesta al impulso se grafican como funciones de z. (*c*) $h(-z)$ la función $h(z)$ se obtiene al girar $h(z)$ en torno al eje vertical, y (*d*) $h(t-z)$ se produce cuando $h(-z)$ se desplaza t unidades hacia la derecha.

En estas condiciones, es fácil visualizar el producto de la primera gráfica $x(z)$ y de la última, $h(t-z)$, para los diversos rangos de t. Cuando t es menor que cero, no hay traslape y

$$y(t) = 0 \qquad t < 0$$

Para el caso que se presenta en la figura 15.24*d*, $h(t-z)$ tiene un traslape diferente de cero con $x(z)$ desde $z = 0$ hasta $z = t$, y cada una es de valor unitario. Por lo tanto,

$$y(t) = \int_0^t (1 \times 1)\, dz = t \qquad 0 < t < 1$$

Cuando t se encuentra entre 1 y 2, $h(t-z)$ se ha desplazado lo suficientemente lejos hacia la derecha para llevar debajo de la función escalón esa parte de la onda cuadrada negativa que se extiende desde $z = 0$ hasta $z = t - 1$. Por lo tanto,

$$y(t) = \int_0^{t-1} [1 \times (-1)]\, dz + \int_{t-1}^{t} (1 \times 1)\, dz = -z\Big|_{z=0}^{z=t-1} + z\Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

En consecuencia,

$$y(t) = -(t-1) + t - (t-1) = 2 - t, \qquad 1 < t < 2$$

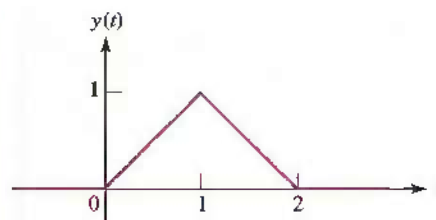
Por último, cuando t es mayor que 2, $h(t-z)$ se ha desplazado lo suficientemente lejos hacia la derecha, de modo que se encuentra por completo a la derecha de $z = 0$. La intersección con el escalón unitario es total y

$$y(t) = \int_{t-2}^{t-1} [1 \times (-1)]\, dz + \int_{t-1}^{t} (1 \times 1)\, dz = -z\Big|_{z=t-2}^{z=t-1} + z\Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

o

$$y(t) = -(t-1) + (t-2) + t - (t-1) = 0, \qquad t > 2$$

Estos cuatro segmentos de $y(t)$ se reúnen como una curva continua en la figura 15.25.



■ **FIGURA 15.25** Resultado de la convolución de $x(t)$ y $h(t)$ que se muestra en la figura 15.23.

PRÁCTICA

15.8 Repetir el ejemplo 15.8 utilizando la *segunda* integral de la ecuación [11].

15.9 La respuesta al impulso de una red está dada por $h(t) = 5u(t-1)$. Si se aplica una señal de entrada $x(t) = 2[u(t) - u(t-3)]$, determinar la salida $y(t)$ en t t igual a: (*a*) −0.5; (*b*) 0.5; (*c*) 2.5; (*d*) 3.5.

Respuestas: 15.9: 0, 0, 15, 25.

Convolución y la transformada de Laplace

La convolución tiene aplicaciones en una amplia gama de disciplinas más allá del análisis de circuitos, entre los que se incluyen el procesamiento de imágenes, las comunicaciones y la teoría del transporte con semiconductores. Por ende, es a menudo de utilidad contar con una intuición gráfica del proceso básico, aun si las expresiones integrales de las ecuaciones [10] y [11] no son siempre la mejor ruta de solución. Una alternativa aproximada, muy poderosa, utiliza las propiedades de la transformada de Laplace, de donde surge la introducción a la convolución en este capítulo.

Sean $\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$ y $\mathbf{F}_2(\mathbf{s})$ las transformadas de Laplace de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente, y considerar la transformada de Laplace de $f_1(t) * f_2(t)$,

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\, d\lambda\right\}$$

Por lo general, una de estas funciones de tiempo será la función forzada que se aplica en las terminales de entrada de un circuito lineal, y la otra corresponderá a la respuesta al impulso unitario del circuito.

Dado que ahora se está trabajando con funciones de tiempo que no existen antes de $t = 0^-$ (la definición de la transformada de Laplace obliga a suponer lo anterior), el límite inferior de integración se cambia en 0^-. En ese caso, utilizando la definición de la transformada de Laplace, se obtiene

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\left[\int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\, d\lambda\right] dt$$

Puesto que e^{-st} no depende de λ, este factor se puede mover hacia el interior de la integral. Si se efectúa este paso y se invierte también el orden de integración, el resultado es

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\, dt\right] d\lambda$$

Utilizando este truco, se observa que $f_1(\lambda)$ no depende de t y por ello se saca de la integral:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_2(t-\lambda)\, dt\right] d\lambda$$

Después se efectúa la sustitución de $x = t - \lambda$ en la integral entre corchetes (donde se podría tratar a λ como una constante):

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_{-\lambda}^{\infty} e^{-\mathbf{s}(x+\lambda)} f_2(x)\,dx\right] d\lambda$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)e^{-\mathbf{s}\lambda}\left[\int_{-\lambda}^{\infty} e^{-\mathbf{s}x} f_2(x)\,dx\right] d\lambda$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)e^{-\mathbf{s}\lambda}[\mathbf{F}_2(\mathbf{s})]\,d\lambda$$

$$= \mathbf{F}_2(\mathbf{s}) \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)e^{-\mathbf{s}\lambda} d\lambda$$

Puesto que la integral que queda es simplemente $\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$, se ve que

$$\boxed{\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathbf{F}_1(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{s})} \qquad [12]$$

Enunciado de manera un poco diferente, se podría concluir que la transformada inversa del producto de dos transformadas es la convolución de las transformadas inversas individuales; tal resultado en ocasiones es útil al obtener transformadas inversas.

EJEMPLO 15.9

Aplicar el teorema de convolución para determinar $v(t)$ si $\mathbf{V}(\mathbf{s}) = 1/[(\mathbf{s}+\alpha)\,(\mathbf{s}+\beta)]$.

Se obtuvo la transformada inversa de esta función particular en la sección 14.5 mediante un desarrollo en funciones parciales. Ahora se identifica a $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ como el producto de dos transformadas:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) = \frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)}$$

y

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{(\mathbf{s}+\beta)}$$

donde

$$v_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

y

$$v_2(t) = e^{-\beta t}u(t)$$

La $v(t)$ que se desea se expresa de inmediato como

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s})\mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} = v_1(t) * v_2(t) = \int_{0^-}^{\infty} v_1(\lambda)v_2(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha\lambda}u(\lambda)e^{-\beta(t-\lambda)}u(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{0^-}^{t} e^{-\alpha\lambda}e^{-\beta t}e^{\beta\lambda}\,d\lambda$$

$$= e^{-\beta t}\int_{0^-}^{t} e^{(\beta-\alpha)\lambda}\,d\lambda = e^{-\beta t}\frac{e^{(\beta-\alpha)t}-1}{\beta-\alpha}u(t)$$

o, en forma más compacta,

$$v(t) = \frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$$

que es el mismo resultado que se obtuvo antes, mediante el desarrollo en fracciones parciales. Observar que se requiere insertar el escalón unitario $u(t)$ en el resultado, debido a que todas las transformadas de Laplace (unilaterales) son válidas sólo para un tiempo no negativo.

¿El resultado se obtuvo con mayor facilidad mediante este método? ¡No, a menos que uno esté enamorado de las integrales de convolución! El método de desarrollo en fracciones parciales suele ser más simple, suponiendo que el propio desarrollo no sea demasiado problemático. Sin embargo, la operación de convolución es más sencilla de efectuar en el dominio s, pues sólo requiere multiplicación.

PRÁCTICA

15.10 Repetir el ejemplo 15.8, efectuando la convolución en el dominio s.

Comentarios adicionales sobre las funciones de transferencia

Como se ha señalado varias veces, la salida $v_o(t)$ en algún punto de un circuito lineal se logra convolucionando la entrada $v_i(t)$ con la respuesta al impulso unitario $h(t)$. Sin embargo, se debe recordar que la respuesta al impulso surge de la aplicación de un impulso unitario en $t = 0$ *con todas las condiciones iniciales iguales a cero*. En estas condiciones, la transformada de Laplace de $v_o(t)$ es

$$\mathcal{L}\{v_o(t)\} = \mathbf{V}_o(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{v_i(t) * h(t)\} = \mathbf{V}_i(\mathbf{s})[\mathcal{L}\{h(t)\}]$$

Por lo tanto, la proporción (o razón) $\mathbf{V}_o(\mathbf{s})/\mathbf{V}_i(\mathbf{s})$ es igual a la transformada de la respuesta al impulso, que se denotará mediante $\mathbf{H}(\mathbf{s})$,

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_o(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_i(\mathbf{s})} \qquad [13]$$

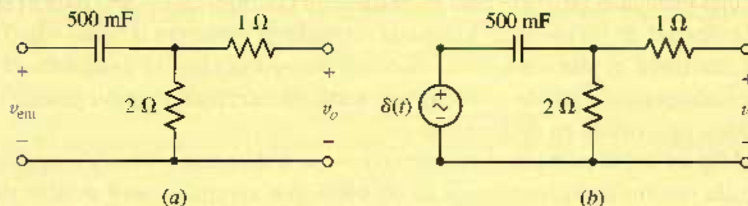
En la ecuación [13] se puede observar que la respuesta al impulso y la función de transferencia forman un par de transformadas de Laplace:

$$h(t) \Leftrightarrow \mathbf{H}(\mathbf{s})$$

Lo anterior es un hecho importante que se estudiará después en la sección 15.7, una vez que el lector se familiarice con el concepto de las gráficas polo-cero y el plano de frecuencia compleja. Sin embargo, a estas alturas, se puede aprovechar este nuevo concepto de convolución en el análisis de circuitos.

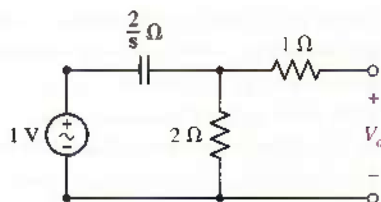
EJEMPLO 15.10

Determinar la respuesta al impulso del circuito de la figura 15.26*a* y utilizar ésta para calcular la respuesta forzada $v_o(t)$ si la entrada $v_{ent}(t) = 6e^{-t}u(t)$ V.



■ **FIGURA 15.26** (*a*) Circuito simple al que se aplica una entrada exponencial en $t = 0$. (*b*) Circuito utilizado para determinar $h(t)$.

(Continúa en la siguiente página)



■ **FIGURA 15.27** Circuito utilizado para encontrar H(s).

En primera instancia se alimenta bajo un pulso de tensión $\delta(t)$ V al circuito como se muestra en la figura 15.26*b*. A pesar de que es posible trabajar tanto en el dominio del tiempo con $h(t)$ como en el de s con $\mathbf{H}(\mathbf{s})$, se selecciona este último, por lo que se considera a continuación la representación en el dominio s de la figura 15.26*b* como se muestra en la figura 15.27.

La respuesta al impulso $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ está dada por

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_o}{1}$$

por lo que el objetivo inmediato es encontrar $\mathbf{V}_o$ —tarea que se lleva a cabo fácilmente por medio de la división de tensión

$$\mathbf{V}_o\Big|_{v_{\text{ent}}=\delta(t)} = \frac{2}{\frac{2}{\mathbf{s}}+2} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}+1} = \mathbf{H}(\mathbf{s})$$

Ahora se puede buscar $v_o(t)$ cuando $v_{\text{ent}} = 6e^{-t}u(t)$ utilizando la convolución, como

$$v_{\text{ent}} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_{\text{ent}}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{s})\}$$

Puesto que $\mathbf{V}_{\text{ent}}(\mathbf{s}) = 6/(\mathbf{s}+1)$,

$$\mathbf{V}_o = \frac{6\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+1)^2} = \frac{6}{\mathbf{s}+1} - \frac{6}{(\mathbf{s}+1)^2}$$

Calculando la transformada inversa de Laplace, se encuentra que

$$v_o(t) = 6e^{-t}(1-t)u(t)\ \text{V}.$$

PRÁCTICA

15.11 Con relación al circuito de la figura 15.26*a*, utilizar la convolución para obtener $v_o(t)$ si $v_{\text{ent}} = tu(t)$ V.

Respuesta: $v_o(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ V.

15.6 PLANO DE FRECUENCIA COMPLEJA

Se planea ahora formular una presentación gráfica más general al graficar cantidades como funciones de s; esto es, se desea mostrar la respuesta de manera simultánea como funciones tanto de σ como de ω. Dicha representación gráfica de la respuesta forzada como una función de la frecuencia compleja s resulta útil, pues es una técnica aclaratoria para el análisis de circuitos, así como para el diseño o la síntesis de los mismos. Luego de formular el concepto de plano de frecuencia compleja, o plano **s** se verá cómo se tiene una idea de inmediato respecto del comportamiento de un circuito a partir de la representación gráfica de sus frecuencias críticas en dicho plano.

También es útil el procedimiento inverso: si se indica una curva de respuesta deseada (la respuesta en frecuencia de un filtro, por ejemplo), será posible decidir respecto de la ubicación necesaria de sus polos y ceros en el plano s y luego sintetizar el filtro. El plano s resulta también una herramienta básica con la que se investiga la posible presencia de oscilaciones indeseables en amplificadores de retroalimentación y de sistemas de control automático.

Respuestas como una función de σ

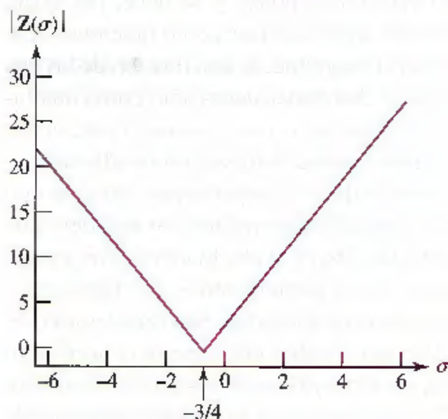
A continuación se desarrollará un método para obtener la respuesta del circuito como una función de s teniendo en cuenta primero la respuesta como una función ya sea de σ o de ω. Considerar , por ejemplo, la impedancia de entrada o del "punto de accionamiento" de una red compuesta por una resistencia de 3 Ω en serie con un inductor de 4 H. En función de s, se tiene:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = 3 + 4\mathbf{s}\ \Omega$$

Si se deseara obtener una interpretación gráfica de la variación de la impedancia con σ, se permite que $\mathbf{s} = \sigma + j0$:

$$\mathbf{Z}(\sigma) = 3 + 4\sigma\ \Omega$$

y se reconoce un cero en $\sigma = -\frac{3}{4}$ y un polo en infinito. Estas frecuencias críticas se marcan sobre un eje σ y después de identificar el valor de $\mathbf{Z}(\sigma)$ en alguna frecuencia no crítica conveniente [quizá $\mathbf{Z}(0) = 3$], resulta fácil dibujar $|\mathbf{Z}(\sigma)|$ en función de σ como en la figura 15.28. Esto proporciona información respecto de la impedancia cuando se conecta a una función forzada exponencial simple $e^{\sigma t}$. En particular, observar que el caso de cd ($\sigma = \omega = 0$) implica una impedancia de 3 Ω, como se esperaría.



■ **FIGURA 15.28** Gráfica de la función $|\mathbf{Z}(\sigma)|$ como una función de la frecuencia σ.

Respuesta como una función de ω

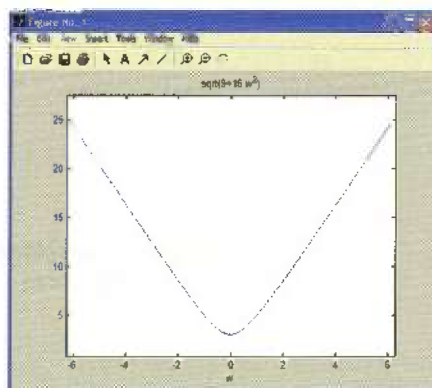
Para graficar la respuesta como una función de la frecuencia en radianes ω, sea $\mathbf{s} = 0 + j\omega$:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = 3 + j4\omega$$

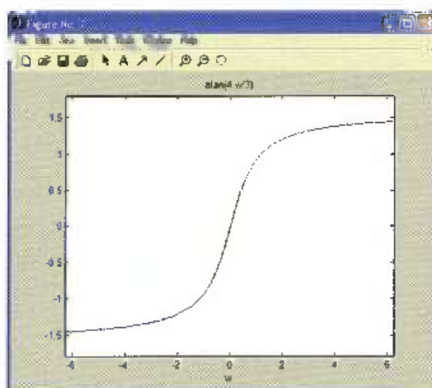
y se obtienen entonces la magnitud y el ángulo de fase de $\mathbf{Z}(j\omega)$ como funciones de ω:

$$|\mathbf{Z}(j\omega)| = \sqrt{9 + 16\omega^2} \qquad [14]$$

$$\text{ang}\ \mathbf{Z}(j\omega) = \tan^{-1}\frac{4\omega}{3} \qquad [15]$$



(*a*)



(*b*)

FIGURA 15.29 (*a*) Gráfica de $|\mathbf{Z}(j\omega)|$ como una función de la frecuencia; ésta se generó mediante la línea de comando de MATLAB EDU >> ezplot('sqrt(9 + 16*w^2)') (*b*) Gráfica del ángulo de $\mathbf{Z}(j\omega)$ como una función de la frecuencia.

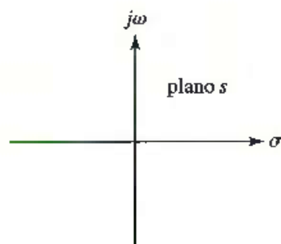


FIGURA 15.30 Plano de la frecuencia compleja o plano s.

La función magnitud muestra un solo polo en el infinito y un mínimo en $\omega = 0$; puede dibujarse con facilidad como una curva de $|\mathbf{Z}(j\omega)|$ en función de ω. A medida que aumenta la frecuencia, también crece la magnitud de la impedancia, que es precisamente el comportamiento que se espera desde el inductor. El ángulo de fase es una función de tangente inversa, cero en $\omega = 0$ y $\pm 90°$ en $\omega = \pm\infty$; también se presenta sin ninguna dificultad como una gráfica de ang $\mathbf{Z}(j\omega)$ en función de ω. Las ecuaciones [14] y [15] se grafican en la figura 15.29.

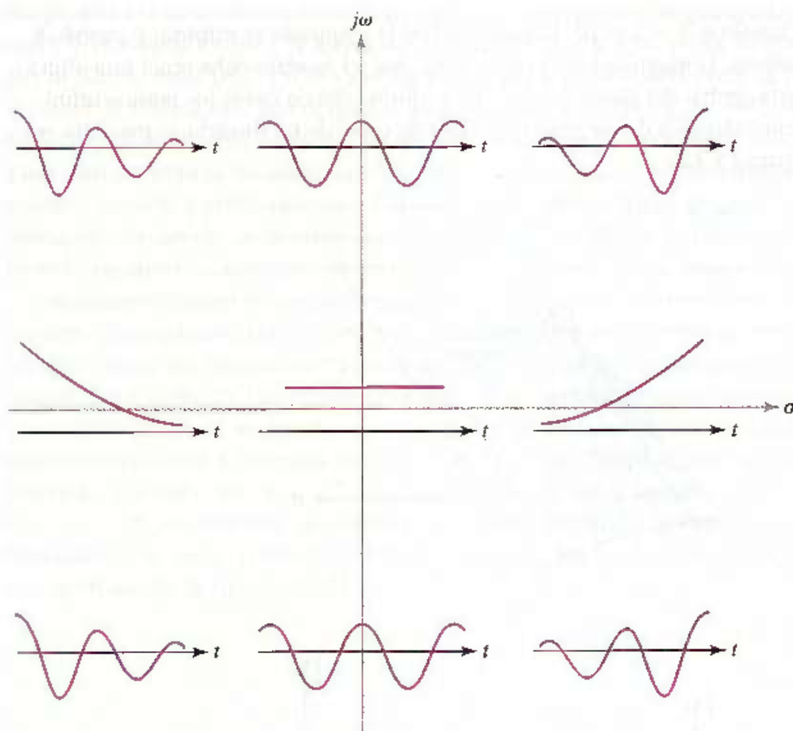
Al graficar la respuesta $\mathbf{Z}(j\omega)$ como una función de ω, se requieren dos gráficas bidimensionales: la magnitud y el ángulo de fase como funciones de ω. Cuando se supone una excitación exponencial se presenta toda la información en una gráfica bidimensional simple, al permitir los valores tanto positivo como negativo de $\mathbf{Z}(\sigma)$ en función de σ. Sin embargo, se elige graficar la *magnitud* de $\mathbf{Z}(\sigma)$ con el objeto de comparar de manera más precisa los dibujos con los que se describe la magnitud de $\mathbf{Z}(j\omega)$. El ángulo de fase (0°, $\pm 180°$ únicamente) de $\mathbf{Z}(\sigma)$ se ignoró casi del todo. El punto importante que debe observarse es que sólo hay una variable independiente σ en el caso de excitación exponencial y ω en el caso senoidal. Pensar ahora en las alternativas disponibles, si se desea graficar una respuesta como una función de **s**.

Gráficas en el plano de la frecuencia compleja

La frecuencia compleja **s** requiere dos parámetros, σ y ω, para su especificación completa. La respuesta es también una función compleja y se debe, por ende, hacer el dibujo tanto de la magnitud como del ángulo de fase como funciones de **s**. Cualquiera de estas cantidades, por ejemplo la magnitud, es una función de los dos parámetros σ y ω, de modo que se grafica en dos dimensiones sólo como una familia de curvas, tal como la magnitud en función de ω, con σ como el parámetro.

Un mejor método para representar gráficamente la magnitud de alguna respuesta compleja implica el uso de un modelo de *tres* dimensiones. Aunque uno así resulta difícil de dibujar en una hoja de papel bidimensional, se descubre que no es difícil de visualizar. La mayor parte del dibujo se efectuará en forma mental, puesto que con la cabeza se necesitan pocos implementos y la elaboración, corrección y modificaciones se llevan a cabo con facilidad. Se considerarán los ejes σ y $j\omega$, perpendiculares entre sí, dispuestos sobre una superficie horizontal semejante al piso. Lo anterior representa ahora un *plano de frecuencia compleja,* o plano **s** como el de la figura 15.30. Para cada punto en este plano corresponde exactamente un valor de **s**, y con cada valor de **s** se asociaría un solo punto en este plano complejo.

Dado que ya se está bastante familiarizado con este tipo de función en el dominio del tiempo asociada con un valor particular de la frecuencia compleja **s**, en estas condiciones se puede asociar la forma funcional de una función forzada, o de una respuesta forzada, con una región específica del plano **s**. El origen, por ejemplo, representa una cantidad de cd. Los puntos que se ubican sobre el eje σ representan funciones exponenciales, que decaen para $\sigma < 0$ y que crecen para $\sigma > 0$. Las senoides puras se asocian con puntos sobre el eje $j\omega$ positivo o negativo. La mitad derecha del plano **s**, a menudo conocida como MDP, contiene puntos que describen frecuencias con partes reales positivas, y por ello le corresponden cantidades en el dominio del tiempo que son senoides exponencialmente *crecientes,* salvo sobre el eje σ. De manera correspondiente, los puntos en la mitad izquierda del plano **s** (MIP) describen las frecuencias de senoides exponencialmente *decrecientes,* de nuevo con la excepción del eje σ. La figura 15.31 resume la relación entre el dominio del tiempo y las diversas regiones del plano **s**.



■ **FIGURA 15.31** La naturaleza de la función en el dominio del tiempo se dibuja en la región del plano de frecuencia compleja al que corresponde.

Reconsidérese la investigación sobre un método apropiado acerca de representar en forma gráfica una respuesta como una función de la frecuencia compleja s. Se podría representar la magnitud de la respuesta construyendo un modelo cuya altura sobre el piso corresponda en cada punto a la respuesta en ese valor de s. En otras palabras, se añade un tercer eje perpendicular tanto al eje σ como al eje $j\omega$ que pasa por el origen; estos ejes se simbolizan mediante $|\mathbf{Z}|$, $|\mathbf{Y}|$, $|\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1|$, o con otras representaciones apropiadas. La magnitud de la respuesta se determina para todo valor de s y la gráfica resultante es una superficie que se ubica sobre el plano s (o que apenas lo toque).

EJEMPLO **15.11**

Dibujar la admitancia de una combinación en serie de un inductor de 1 H con una resistencia de 3 Ω como una función de ambos parámetros $j\omega$ **y** σ.

La admitancia de estos dos elementos en serie está dada por

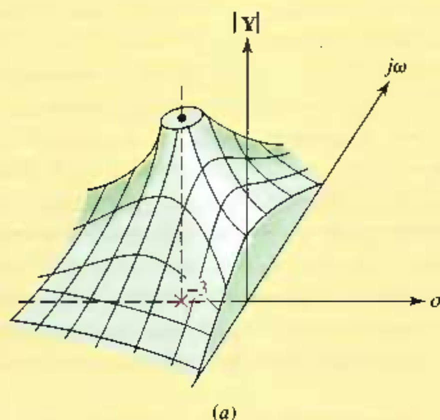
$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}+3}$$

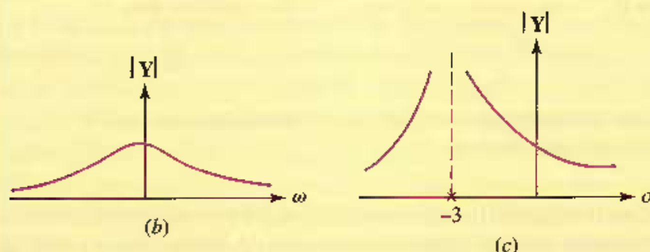
Al sustituir $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$, se encuentra que la magnitud de la función es

$$|\mathbf{Y}(\mathbf{s})| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma+3)^2+\omega^2}}$$

(Continúa en la siguiente página)

Cuando $s = -3 + j0$, la magnitud de la respuesta es infinita; y cuando s es infinita, la magnitud de $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ es cero. Así, el modelo debe tener una altura infinita arriba del punto $(-3 + j0)$ y altura cero en todos los puntos infinitamente alejados del origen. Una vista de corte de tal modelo se presenta en la figura 15.32*a*.





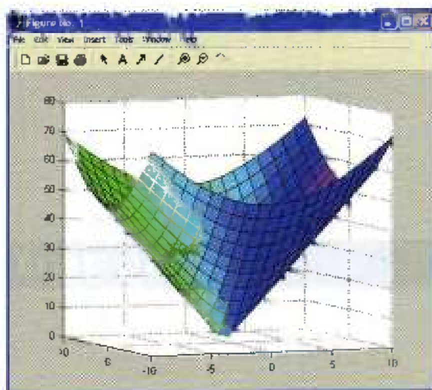
■ **FIGURA 15.32** (*a*) Lista de corte de un modelo de barro cuya superficie superior representa $|\mathbf{Y}(\mathbf{s})|$ de la combinación en serie de un inductor de 1 H y de una resistencia de 3 Ω. (*b*) $|\mathbf{Y}(\mathbf{s})|$ como una función de ω. (*c*) $|\mathbf{Y}(\mathbf{s})|$ como una función de σ.

Una vez construido el modelo, resulta simple visualizar la variación de $|\mathbf{Y}|$ como una función de ω (con $\sigma = 0$) al intersecar el modelo con un plano perpendicular que contenga al eje $j\omega$. El modelo de la figura 15.32*a* se corta a lo largo de este plano y puede observarse la gráfica deseada de $|\mathbf{Y}|$ en función de ω; la curva se dibuja también en la figura 15.32*b*. De manera similar, un plano vertical que contenga al eje σ permite obtener $|\mathbf{Y}|$ en función de σ (con $\omega = 0$), como se observa en la figura 15.32*c*.

PRÁCTICA

15.12 Dibujar la magnitud de la impedancia $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = 2 + 5\mathbf{s}$ como una función de σ y $j\omega$.

Respuesta: vea la figura 15.33.



■ **FIGURA 15.33** Solución del problema de práctica 15.12 generada con el siguiente código:

```
EDU» sigma = linspace(−10, 10, 21);
EDU» omega = linspace(−10, 10, 21);
EDU» [X, Y] = meshgrid(sigma, omega);
EDU» Z = abs(2 + 5*X + j*5*Y);
EDU» colormap(hsv);
EDU» s = [−5 3 8];
EDU» surfl(X, Y, Z, s);
EDU» view (−20, 5)
```

Constelaciones de polos ceros

Este método resulta adecuado para funciones relativamente simples, aunque en general se requiere un método más práctico. Considerar el plano s de nuevo como el piso y después imaginar una gran lámina elástica dispuesta sobre él. Se

dirige ahora la atención hacia todos los polos y los ceros de la respuesta. En cada cero, la respuesta es cero, la altura de la lámina debe ser cero y, por lo tanto, se fija la lámina en el piso. En el valor de s correspondiente a cada polo, se podría sostener la lámina con una delgada barra vertical. Los ceros y los polos en infinito deben analizarse mediante un anillo de sujeción de gran radio o una elevada cerca circular, respectivamente. Si se utiliza una lámina infinitamente grande, sin peso y perfectamente elástica, clavada con tachuelas pequeñísimas y sostenida con barras de diámetro cero e infinitamente largas, la lámina elástica tendrá una altura exactamente proporcional a la magnitud de la respuesta.

Se podrían ilustrar estos comentarios considerando la configuración de polos y ceros, que algunas veces se conoce como ***constelación de polos y ceros***, que localiza todas las frecuencias críticas de una cantidad en el dominio de la frecuencia; por ejemplo, una impedancia $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$. Una constelación de polos y ceros para una impedancia se muestra en la figura 15.34. En ese diagrama, los polos se denotan con cruces y los ceros con círculos. Si se imagina un modelo de lámina elástica, clavada en $\mathbf{s} = -2 + j0$ y sostenida en $\mathbf{s} = -1 + j5$ y en $\mathbf{s} = -1 - j5$, se debe ver un terreno cuyas características distintivas son dos montañas y un cráter cónico o depresión. La parte del modelo de la MIP superior se ilustra en la figura 15.34*b*.

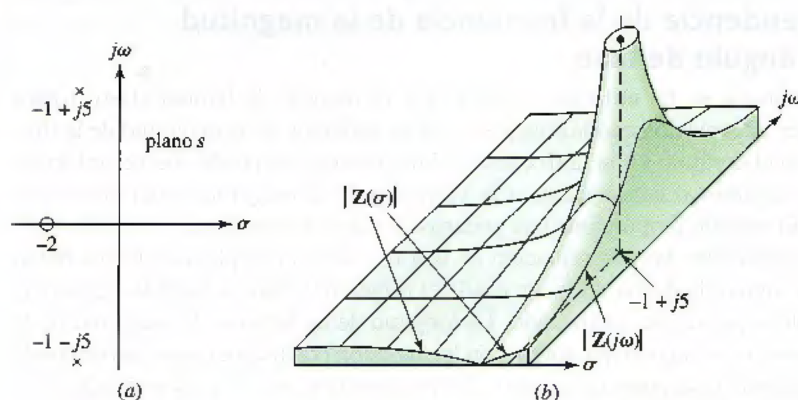


FIGURA 15.34 (*a*) Constelación de polos y ceros de alguna impedancia Z(s). (*b*) Porción del modelo de la lámina elástica de la magnitud de Z(s).

Construir ahora la expresión de $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ que conduce a esta configuración de polos y ceros. El cero requiere un factor de $(\mathbf{s} + 2)$ en el numerador y los dos polos necesitan los factores $(\mathbf{s} + 1 - j5)$ y $(\mathbf{s} + 1 + j5)$ en el denominador. Excepto por una constante de multiplicación k, se conoce la forma de $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = k\frac{\mathbf{s}+2}{(\mathbf{s}+1-j5)(\mathbf{s}+1+j5)}$$

o

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = k\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+26} \qquad [16]$$

Con la finalidad de determinar k, se requiere un valor de $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ en algunas s diferentes a la frecuencia crítica. Para esta función, suponer que $\mathbf{Z}(0) = 1$. Por

sustitución directa en la ecuación [16], se encuentra que k es 13 y, por lo tanto,

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = 13\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+26} \qquad [17]$$

Las gráficas de $|\mathbf{Z}(\sigma)|$ en función de σ y de $|\mathbf{Z}(j\omega)|$ en función de ω se obtienen de la ecuación [17], aunque la forma general de la función es patente a partir de la configuración de polos y ceros y de la analogía de la lámina elástica. Las porciones de estas dos curvas que aparecen a los lados del modelo se muestran en la figura 15.34*b*.

PRÁCTICA

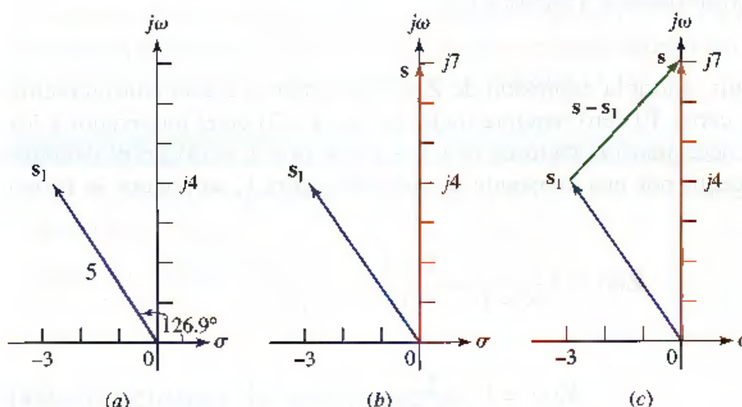
15.13 La combinación en paralelo de 0.25 mH y 5 Ω está en serie con la combinación en paralelo de 40 μF y 5 Ω. (*a*) Determinar $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$, la impedancia de entrada de la combinación en serie. (*b*) Especificar todos los ceros de $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$. (*c*) Determinar todos los polos de $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$. (*d*) Dibujar la configuración de polos y ceros.

Respuestas: $5(\mathbf{s}^2 + 10\,000\mathbf{s} + 10^8)/(\mathbf{s}^2 + 25\,000\mathbf{s} + 10^8)$ Ω; $-5 \pm j8.66$ krad/s; $-5, -20$ krad/s.

Dependencia de la frecuencia de la magnitud y el ángulo de fase

Hasta ahora, se ha utilizado el plano **s** y el modelo de lámina elástica para obtener información *cualitativa* acerca de la variación de la magnitud de la función en el dominio **s** con la frecuencia. Sin embargo, se puede obtener información *cuantitativa* concerniente a la variación de la *magnitud* y del *ángulo de fase*. El método proporciona una poderosa y nueva herramienta.

Considérese la representación de una frecuencia compleja en forma polar, como sugiere la flecha dibujada desde el origen del plano **s** hasta la frecuencia compleja que se está analizando. La longitud de la flecha es la magnitud de la frecuencia y el ángulo que forma con la dirección positiva del eje σ corresponde al ángulo de la frecuencia compleja. La frecuencia $\mathbf{s}_1 = -3 + j4 = 5\underline{/126.9^\circ}$ se indica en la figura 15.35*a*.



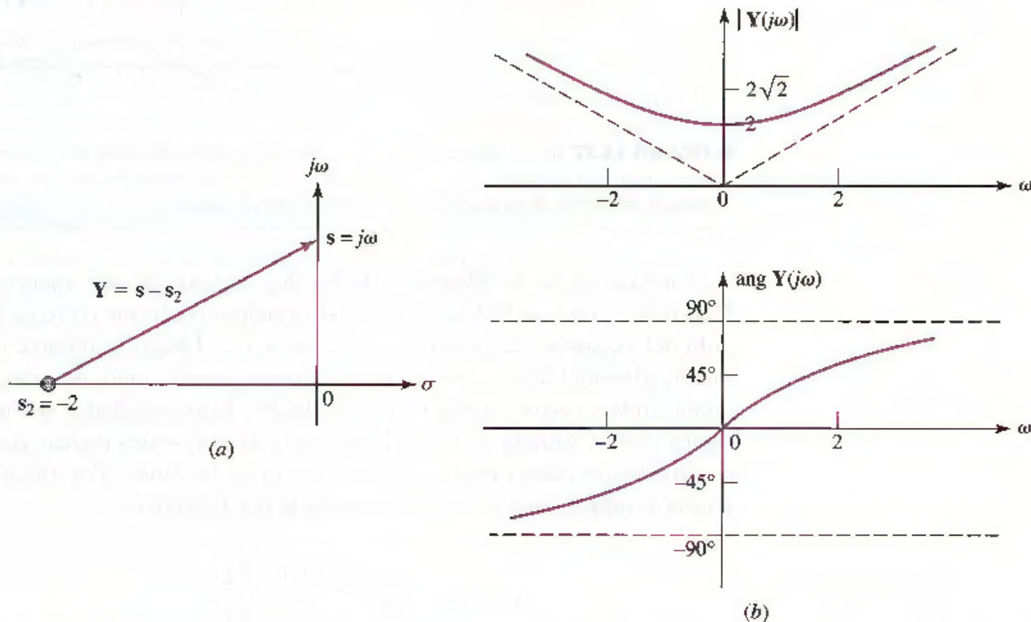
■ **FIGURA 15.35** (*a*) La frecuencia compleja $\mathbf{s}_1 = -3 + j4$ se indica dibujando una flecha desde el origen hasta $\mathbf{s}_1$. (*b*) La frecuencia $\mathbf{s} = j7$ también se expresa de manera vectorial. (*c*) La diferencia $\mathbf{s} - \mathbf{s}_1$ se representa mediante el vector dibujado desde $\mathbf{s}_1$ hasta **s**.

También es necesario representar la diferencia entre dos valores de s como una flecha o vector sobre el plano complejo. Selecciónese un valor de s que corresponda a una senoide $\mathbf{s} = j7$ y que lo indique también como un vector, como en la figura 15.35*b*. La *diferencia* $\mathbf{s} - \mathbf{s}_1$ se observa como el vector dibujado desde el último punto nombrado $\mathbf{s}_1$ hasta el que primero se nombró s; el vector $\mathbf{s} - \mathbf{s}_1$ se dibuja en la figura 15.35*c*. Obsérvese que $\mathbf{s}_1 + (\mathbf{s} - \mathbf{s}_1) = \mathbf{s}$. Numéricamente, $\mathbf{s} - \mathbf{s}_1 = j7 - (-3 + j4) = 3 + j3 = 4.24\underline{/45^\circ}$, y dicho valor concuerda con la diferencia gráfica.

Vea cómo la interpretación gráfica de la diferencia $(\mathbf{s} - \mathbf{s}_1)$ permite determinar la respuesta en frecuencia. Considérese la admitancia

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + 2$$

Esta expresión tiene un cero en $\mathbf{s}_2 = -2 + j0$. El factor $\mathbf{s} + 2$, que puede escribirse como $\mathbf{s} - \mathbf{s}_2$, se representa mediante el vector dibujado desde la localización cero $\mathbf{s}_2$ hasta la frecuencia s, a la cual se desea la respuesta. Si se desea la respuesta senoidal, s debe ubicarse sobre el eje $j\omega$ como en la figura 15.36*a*. La magnitud de $\mathbf{s} + 2$ se podría ver ahora a medida que ω varía desde cero hasta infinito. Cuando s es cero, el vector tiene una magnitud de 2 y un ángulo de 0°. De tal modo, $\mathbf{Y}(0) = 2$. Conforme ω aumenta, crece la magnitud, lentamente al principio y luego casi de manera lineal con ω; el ángulo de fase se incrementa casi en forma lineal al principio y luego se acerca de manera gradual a 90°, a medida que ω se vuelve infinita. La magnitud y la fase de $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ se dibujan como funciones de ω en la figura 15.36*b*.

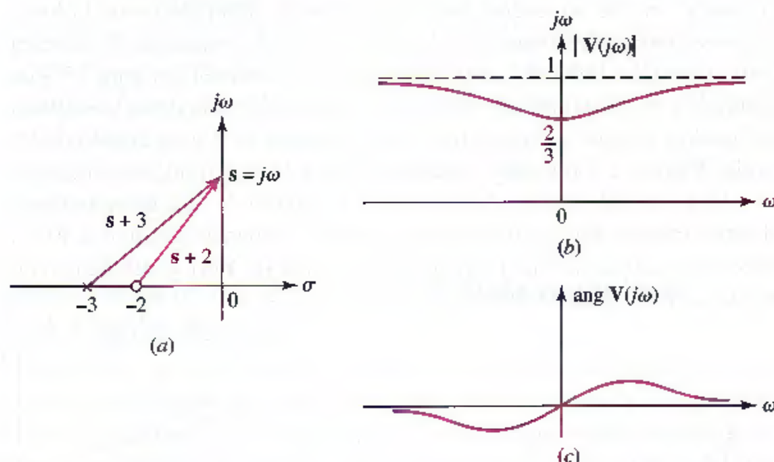


■ **FIGURA 15.36** (*a*) El vector que representa la admitancia $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + 2$ se muestra para $\mathbf{s} = j\omega$. (*b*) Dibujos de $|\mathbf{Y}(j\omega)|$ y ang $\mathbf{Y}(j\omega)$, tal como podrían obtenerse a partir del desempeño del vector, cuando s se mueve hacia arriba y hacia abajo del eje $j\omega$ desde el origen.

Se construirá ahora un ejemplo más real considerando una función en el dominio de la frecuencia dada por el cociente de dos factores,

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s} + 2}{\mathbf{s} + 3}$$

En este caso, nuevamente se selecciona un valor de s que corresponda a la excitación senoidal y se dibujan los vectores $\mathbf{s}+2$ y $\mathbf{s}+3$, el primero desde el cero hasta el punto elegido sobre el eje $j\omega$ y el segundo desde el polo hasta ese mismo punto elegido. Los dos vectores se dibujan en la figura 15.37*a*. *El cociente de ambos vectores tiene una magnitud igual al cociente de las magnitudes y un ángulo de fase igual a la diferencia de los ángulos de fase del numerador y del denominador.* Se efectúa una investigación de la variación de $|\mathbf{V}(\mathbf{s})|$ en función de ω al permitir que s se mueva desde el origen y ascienda por el eje $j\omega$. Además, se debe considerar la relación (o razón) entre la distancia desde el cero hasta $\mathbf{s} = j\omega$ y la distancia desde el polo hasta el mismo punto sobre el eje $j\omega$. La relación (o razón) es $\frac{2}{3}$ en $\omega = 0$ y se acerca a la unidad a medida que ω se vuelve infinita, como se muestra en la figura 15.37*b*.



■ **FIGURA 15.37** (*a*) Los vectores se dibujan a partir de dos frecuencias críticas de la respuesta en tensión $\mathbf{V}(\mathbf{s}) = (\mathbf{s}+2)/(\mathbf{s}+3)$. (*b*, *c*) Dibujos de la magnitud y del ángulo de fase $\mathbf{V}(j\omega)$ según se obtienen del cociente de los dos vectores que se muestran en el inciso *a*.

Un examen de la diferencia de los dos ángulos de fase muestra que ang $\mathbf{V}(j\omega)$ es 0° en $\omega = 0$. Ésta aumenta al principio conforme crece ω, pues el ángulo del vector $\mathbf{s}+2$ es mayor que el de $\mathbf{s}+3$. Luego disminuye con un aumento adicional de ω, y por último se aproxima a 0º a una frecuencia infinita, donde ambos vectores poseen ángulos de 90°. Estos resultados se ilustran en la figura 15.37*c*. Aunque en estos dibujos no están presentes marcas cuantitativas, es importante observar que se obtendrían con facilidad. Por ejemplo, la respuesta compleja en $\mathbf{s} = j4$ debe estar dada por la relación:

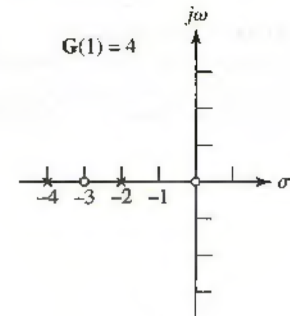
$$\begin{aligned}\mathbf{V}(j4) &= \frac{\sqrt{4+16}\,\underline{/\tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right)}}{\sqrt{9+16}\,\underline{/\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)}} \\ &= \sqrt{\tfrac{20}{25}}\,\underline{/\left(\tan^{-1}2 - \tan^{-1}\left(\tfrac{4}{3}\right)\right)} \\ &= 0.894\underline{/10.3^\circ}\end{aligned}$$

Cuando se diseñan circuitos para producir cierta respuesta deseada, resulta de gran ayuda el comportamiento de los vectores dibujados a partir de las respectivas frecuencias críticas hasta un punto general sobre el eje $j\omega$. Por ejemplo, si se necesitara aumentar la joroba (o curvatura) de la respuesta de fase de la

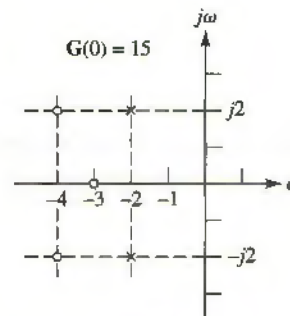
figura 15.37*c*, tendría que proporcionarse una gran diferencia en los ángulos de los dos vectores, lo cual se conseguiría en la figura 15.37*a* acercando el cero al origen o ubicando el polo más lejos del origen, o mediante ambos procedimientos.

Las ideas que se han analizado para ayudar a determinar de forma gráfica la variación de la magnitud angular y de alguna función en el dominio de la frecuencia a menudo serán necesarias en el siguiente capítulo cuando se investigue el desempeño en frecuencia de filtros muy selectivos o circuitos resonantes. Estos conceptos resultan fundamentales para comprender de manera rápida y clara el comportamiento de redes eléctricas y otros sistemas de ingeniería. El procedimiento se resume de manera breve como sigue:

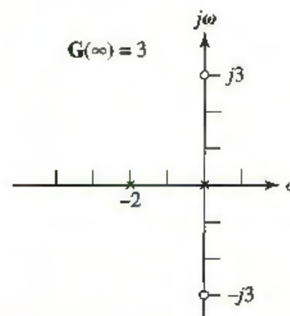
1. Dibujar la constelación de polos y ceros de la función en el dominio de la frecuencia y localizar un punto de prueba que corresponda a la frecuencia a la que se evaluará la función.
2. Dibujar una flecha a partir de cada polo y de cada cero hasta el punto de prueba.
3. Determinar la longitud de cada flecha de polo y el valor de cada ángulo de la flecha de polo y de cada ángulo de la flecha de cero.
4. Dividir el producto de las longitudes de la flecha de cero entre el producto de las longitudes de la flecha de polo. Este cociente es la magnitud de la función en el dominio de la frecuencia correspondiente a la frecuencia supuesta del punto de prueba (*dentro de una constante como factor de multiplicación, pues* **F**(**s**) *y k***F**(**s**) *tienen las mismas constelaciones de polos y ceros*).
5. Restar la suma de los ángulos de la flecha de polo de la suma de los ángulos de la flecha de ceros. La diferencia resultante es el ángulo de la función en el dominio de la frecuencia, evaluado a la frecuencia del punto de prueba. El ángulo no depende del valor de la constante de multiplicación real k.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

FIGURA 15.38

PRÁCTICA

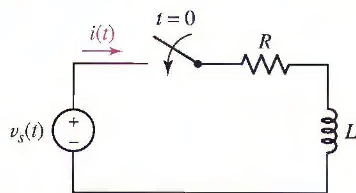
15.14 En la figura 15.38 se presentan tres constelaciones de polos y ceros. Cada una se aplica a la ganancia de tensión **G**. Obtener la expresión de cada ganancia que sea una razón de polinomios en **s**.

15.15 La configuración de polos y ceros para una admitancia **Y**(**s**) tiene un polo en $\mathbf{s} = -10 + j0\ s^{-1}$ y un cero en $\mathbf{s} = z_1 + j0$, donde $z_1 < 0$. Sea $\mathbf{Y}(0) = 0.1$ S. Determinar el valor de si: (*a*) ang $\mathbf{Y}(j5) = 20°$; (*b*) $|\mathbf{Y}(j5)| = 0.2$ S.

Respuestas: 15.14 $(15s^2 + 45s)/(s^2 + 6s + 8)$; $(2s^3 + 22s^2 + 88s + 120)/(s^2 + 4s + 8)$; $(3s^2 + 27)/(s^2 + 2s)$. 15.15: −4.73 Np/s; −2.50 Np/s.

15.7 RESPUESTA NATURAL Y EL PLANO *s*

Al comienzo de este capítulo se estudió de qué forma el hecho de trabajar en el dominio de la frecuencia mediante la transformada de Laplace permite considerar una amplia gama de circuitos variantes en el tiempo, pues elimina la necesidad de trabajar con ecuaciones integrodiferenciales en razón de que sólo se procede de forma algebraica. Sin embargo, este método tan poderoso tiene la desventaja de no ser un proceso muy visual. En contraste con lo anterior, existe



■ **FIGURA 15.39** Ejemplo que ilustra la determinación de la respuesta completa a través del conocimiento de las frecuencias críticas de la impedancia que enfrenta la fuente.

una cantidad *enorme* de información contenida en la gráfica polo-cero de una respuesta forzada. En esta sección se considera la forma en que pueden utilizarse dichas gráficas para obtener la respuesta *completa* de un circuito —natural más forzada— siempre y cuando se conozcan las condiciones iniciales. La ventaja de dicho método es que establece una relación *intuitiva* entre la ubicación de las frecuencias críticas, fácilmente visualizable a través de la gráfica de polos-ceros y la respuesta deseada.

Se presenta el método con base en el ejemplo más simple, un circuito RL en serie como el de la figura 15.39. Una fuente de tensión general $v_s(t)$ provoca que la corriente $i(t)$ fluya después del cierre del interruptor a $t = 0$. La respuesta completa $i(t)$ para $t > 0$ se compone de una respuesta natural y de una forzada:

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t)$$

Se podría determinar la respuesta forzada trabajando en el dominio de la frecuencia, bajo el supuesto, desde luego, de que $v_s(t)$ tiene una forma funcional que transforma el dominio de la frecuencia; si $v_s(t) = 1/(1 + t^2)$, por ejemplo, se debe proceder lo mejor que sea posible a partir de la ecuación diferencial básica del circuito. En el caso del circuito de la figura 15.39, se tiene

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_s}{R + \mathbf{s}L}$$

o

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \frac{1}{L}\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{s} + R/L} \qquad [18]$$

A continuación se considerará la respuesta natural. De la experiencia anterior, se sabe que la forma será una exponencial que decae con la constante de tiempo L/R, aunque se suponga que se está determinando por primera vez. La *forma* de la respuesta natural (sin fuente) es, por definición, independiente de la función forzada, la cual contribuye sólo a la *magnitud* de la respuesta natural. Para determinar la forma apropiada se deben suprimir todas las fuentes independientes; aquí, $v_s(t)$ se sustituye por un cortocircuito. A continuación, se intentará obtener la respuesta natural como un caso límite de la respuesta forzada. De regreso a la expresión en el dominio de la frecuencia de la ecuación [18], de manera fiel se establece $\mathbf{V}_s = 0$. Sobre la superficie, resulta claro que $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ debe ser cero, pero no es necesariamente cierto si se está trabajando con una frecuencia compleja que es un polo simple de $\mathbf{I}(\mathbf{s})$. Esto es, el denominador y el numerador pueden ser *ambos* cero, por lo que no se requiere que $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ sea cero.

¿Qué significa "operar" a una frecuencia compleja? ¿Cómo se podría llevar a cabo tal actividad en un laboratorio real? En este caso, para empezar resulta importante recordar cómo se inventó la frecuencia compleja: constituye un medio para describir una función senoidal de frecuencia ω multiplicada por una función exponencial $e^{\sigma t}$. Este tipo de señales es muy fácil de generar con un equipo de laboratorio real (es decir, no imaginario). Por lo tanto, sólo se necesitará fijar el valor de σ y el de ω para "operar" en $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$.

Inspeccionar esta nueva idea a partir de una situación de ventaja un poco diferente. Se fijará la atención en la relación entre la respuesta forzada deseada y la función forzada. Se designará como $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ y se definirá como la función de transferencia del circuito. Entonces:

$$\frac{\mathbf{I}_f(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{1}{L(\mathbf{s} + R/L)}$$

En este ejemplo, la función de transferencia es la admitancia de entrada a la que se enfrenta $\mathbf{V}_s$. Se busca la respuesta natural (sin fuente) si $\mathbf{V}_s = 0$. Sin embargo, $\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_s\mathbf{H}(\mathbf{s})$, y si $\mathbf{V}_s = 0$, un valor distinto de cero para la corriente se obtiene sólo al operar en un polo de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$. Por lo tanto, los polos de la función de transferencia adquieren un significado especial.

En este ejemplo en particular, se puede apreciar que el polo de la función de transferencia ocurre en $\mathbf{s} = -R/L + j0$, como se muestra en la figura 15.40. Si se elige operar en esta frecuencia compleja particular, la única corriente *finita* que podría resultar debe ser una constante en el dominio **s** (es decir, independiente de la frecuencia). De este modo se obtiene la respuesta natural

$$\mathbf{I}\left(\mathbf{s} = -\frac{R}{L} + j0\right) = A$$



donde A es una constante desconocida. A continuación se desea transformar esa respuesta natural al dominio del tiempo. La reacción irreflexiva podría consistir en aplicar las técnicas de la transformada inversa de Laplace en esta situación. No obstante, ya se especificó el valor de **s**, por lo que un procedimiento de este tipo no es válido. Mejor se enfoca la atención en la parte real de la función general e^{st}, tal que:

$$i_n(t) = \text{Re}\{Ae^{st}\} = \text{Re}\{Ae^{-Rt/L}\}$$

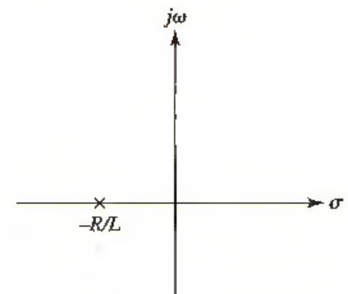
En este caso, se tiene que

$$i_n(t) = Ae^{-Rt/L}$$

por lo que la respuesta natural es

$$i(t) = Ae^{-Rt/L} + i_f(t)$$

y A puede determinarse luego de que se especifican las condiciones iniciales de este circuito. La respuesta forzada $i_f(t)$ se obtiene cuando se encuentra la transformada inversa de Laplace de $\mathbf{I}_f(\mathbf{s})$.



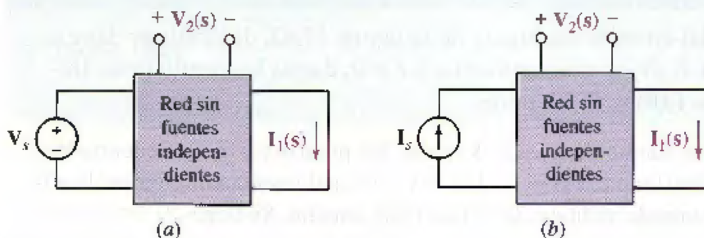
■ **FIGURA 15.40** Constelación polo-cero de la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ que muestra el único polo en $\mathbf{s} = -R/L$.

Una perspectiva más general

Las figuras 15.41*a* y 15.41*b* ilustran fuentes individuales conectadas a redes que no contienen fuentes independientes. La respuesta deseada, que podría ser alguna corriente $\mathbf{I}_1(\mathbf{s})$ o alguna tensión $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$, se expresaría mediante una función de transferencia que exhiba todas las frecuencias críticas. Para ser específicos, se elige la respuesta $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ de la figura 15.41*a*:

$$\frac{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = k\frac{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_3)\cdots}{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_2)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_4)\cdots} \quad [19]$$

Los polos de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ ocurren en $\mathbf{s} = \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_4, \ldots,$ y por ello una tensión finita $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ en cada una de estas frecuencias debe ser una forma funcional posible de la respuesta natural. Así, se considera una fuente de cero volts (que es precisamente



■ **FIGURA 15.41** Los polos de la respuesta, $\mathbf{I}_1(\mathbf{s})$ o $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$, producida por: (*a*) una fuente de tensión $\mathbf{V}_s$ o (*b*) una fuente de corriente $\mathbf{I}_s$. Los polos determinan la forma de la respuesta natural, $i_{1n}(t)$ o $v_{2n}(t)$, que ocurre cuando $\mathbf{V}_s$ se sustituye por un cortocircuito, o $\mathbf{I}_s$ por un circuito abierto, y está disponible alguna energía inicial.

un cortocircuito) aplicada a las terminales de entrada; la respuesta natural que aparece cuando las terminales de entrada están en cortocircuito debe, en consecuencia, tener la forma

$$v_{2n}(t) = \mathbf{A}_2 e^{s_2 t} + \mathbf{A}_4 e^{s_4 t} + \cdots$$

donde cada **A** debe evaluarse en términos de las condiciones iniciales (lo que incluye el valor inicial de cualquier fuente de tensión aplicada en las terminales de entrada).

Para determinar la forma de la respuesta natural $i_{1n}(t)$ en la figura 15.41*a*, se deben especificar los polos de la función de transferencia, $\mathbf{H(s)} = \mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{V}_s$. Las funciones de transferencia que se aplican en las situaciones descritas en la figura 15.41*b* serían $\mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s$ y $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s$, y sus polos determinan entonces las respuestas naturales $i_{1n}(t)$ y $v_{2n}(t)$, respectivamente.

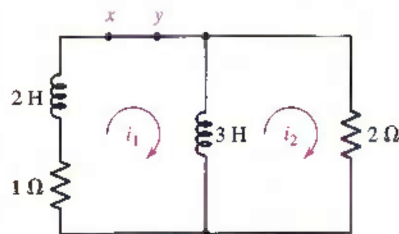
Si la respuesta natural se desea para una red que no contiene ninguna fuente independiente, entonces se podría insertar una fuente $\mathbf{V}_s$ o $\mathbf{I}_s$ en cualquier punto conveniente, restringido sólo por la condición de que la red original se obtenga cuando se suprima la fuente. Por lo tanto, la función de transferencia correspondiente se determina y sus polos especifican las frecuencias naturales. Obsérvese que las mismas frecuencias deben obtenerse para cualquiera de las muchas localizaciones de fuente posible. Si la red ya contiene una fuente, esa misma debe igualarse a cero e insertarse otra fuente en un punto más conveniente.

Un caso especial

Antes de que se ilustre este método con varios ejemplos, la integridad de la presentación requiere que se reconozca un caso especial que podría presentarse. Esto ocurre cuando la red de la figura 15.41*a* o 15.41*b* contiene dos o más partes que están aisladas entre sí. Por ejemplo, se podría tener la combinación en paralelo de tres redes: R_1 en serie con C, R_2 en serie con L y un cortocircuito. Claramente, una fuente de tensión en serie con R_1 y C no puede producir ninguna corriente en R_2 y L; esa función de transferencia sería cero. Para encontrar la forma de la respuesta natural de la tensión en el inductor, por ejemplo, se requiere instalar la fuente de tensión en la red R_2L. Un caso de este tipo a menudo se reconoce inspeccionando la red antes de que se instale una fuente; pero si no es así, entonces se obtendrá una función de transferencia igual a cero. Cuando $\mathbf{H(s)} = 0$, no se obtiene información acerca de las frecuencias que caracterizan la respuesta natural y debe emplearse una localización de la fuente más adecuada.

EJEMPLO 15.12

En el caso del circuito sin fuente de la figura 15.42, determinar las expresiones de i_1 e i_2 correspondientes a $t > 0$, dadas las condiciones iniciales $i_1(0) = i_2(0) = 11$ amperes.



■ **FIGURA 15.42** Circuito para el que se desean las respuestas naturales i_1 e i_2.

Instalando una fuente de tensión $\mathbf{V}_s$ entre los puntos x y y se encuentra la función de transferencia $\mathbf{H(s)} = \mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{V}_s$, lo cual resulta también ser la admitancia de entrada vista desde la fuente de tensión. Se tiene

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_s}{2\mathbf{s} + 1 + 6\mathbf{s}/(3\mathbf{s} + 2)} = \frac{(3\mathbf{s} + 2)\mathbf{V}_s}{6\mathbf{s}^2 + 13\mathbf{s} + 2}$$

o

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{I}_1(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = \frac{\frac{1}{2}\left(\mathbf{s} + \frac{2}{3}\right)}{(\mathbf{s}+2)\left(\mathbf{s}+\frac{1}{6}\right)}$$

De acuerdo con la experiencia reciente, se sabe por inspección que i_1 debe tener la forma

$$i_1(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t/6}$$

La solución se completa utilizando las condiciones iniciales para establecer los valores de A y de B. Puesto que $i_1(0)$ se indica como 11 amperes:

$$11 = A + B$$

La ecuación adicional necesaria se obtiene escribiendo la ecuación de la LKT alrededor del perímetro del circuito:

$$1i_1 + 2\frac{di_1}{dt} + 2i_2 = 0$$

y resolver respecto de la derivada

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{1}{2}[2i_2(0) + 1i_1(0)] = -\frac{22+11}{2} = -2A - \frac{1}{6}B$$

De tal manera, $A = 8$ y $B = 3$, y por ello la solución que se desea es

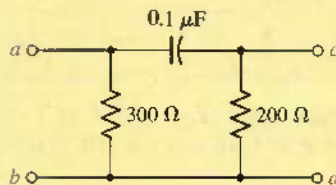
$$i_1(t) = 8e^{-2t} + 3e^{-t/6} \qquad \text{amperes}$$

Las frecuencias naturales que constituyen i_2 son las mismas que las de i_1; asimismo, un procedimiento similar utilizado para evaluar las constantes arbitrarias conduce a

$$i_2(t) = 12e^{-2t} - e^{-t/6} \qquad \text{amperes}$$

PRÁCTICA

15.16 Si una fuente de corriente $i_1(t) = u(t)$ A se presenta en a-b en la figura 15.43 con la flecha que entra en a, determinar $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V}_{cd}/\mathbf{I}_1$ y especificar las frecuencias naturales presentes en $v_{cd}(t)$.



■ **FIGURA 15.43**

Respuesta: $120\mathbf{s}/(\mathbf{s}+20\,000)\ \Omega$, $-20\,000\ \mathrm{s}^{-1}$.

El proceso que se debe seguir para evaluar los coeficientes de la amplitud de la respuesta natural es detallado, excepto en aquellos casos en los que son obvios los valores iniciales de la respuesta deseada y sus derivadas. Sin embargo, no se puede perder de vista la facilidad y rapidez con la cual se obtiene la *forma* de la respuesta natural.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Diseño de circuitos de osciladores

En varios puntos a lo largo de este libro se ha investigado el comportamiento de varios circuitos que responden a una excitación senoidal. Sin embargo, la creación de la forma de ondas senoidales necesaria es un tema interesante en sí mismo. Por ejemplo, la generación de grandes tensiones y grandes corrientes senoidales es directa al utilizar imanes y bobinas de alambre rotatorias, aunque un método así no se reduce proporcionalmente con facilidad hasta formas de onda de magnitud más pequeña. En las aplicaciones de baja corriente, un mejor método consiste en explotar el concepto de ***retroalimentación positiva*** mediante un circuito conocido como ***oscilador***. Los circuitos osciladores son una parte integral de muchos productos de consumo, tales como los receptores de posicionamiento global por satélite (GPS) de la figura 15.44.



FIGURA 15.44 Muchos productos electrónicos de consumo, como este receptor GPS, dependen de circuitos osciladores para proporcionar una frecuencia de referencia.
(© Royalty-Free/CORBIS)

Un circuito oscilador sencillo, pero muy útil, que se conoce con el nombre de ***oscilador Wien***, se muestra en la figura 15.45.

El circuito se asemeja a un circuito de amp op no inversor, con una resistencia R_1 conectado entre la pata (pin) de entrada inversora y la conexión a tierra, y una resistencia R_f conectada entre la salida y la pata (o pin)

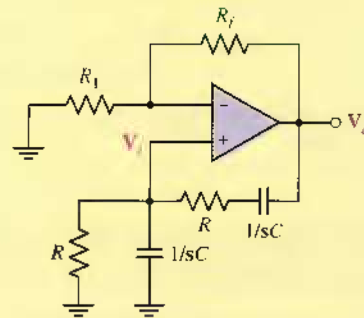


FIGURA 15.45 Circuito oscilador de puente de Wien.

de entrada inversora. La resistencia R_f proporciona lo que se conoce como ***trayectoria de retroalimentación negativa***, puesto que conecta la salida de un amplificador a la entrada inversora. Cualquier aumento $\Delta\mathbf{V}_o$ en la salida causa una reducción de la entrada, la que a su vez da lugar a una salida más pequeña; este proceso incrementa la estabilidad de la tensión de salida $\mathbf{V}_o$. La ***ganancia*** del amp op, definida como la razón entre $\mathbf{V}_o$ y $\mathbf{V}_i$, se determina por los tamaños relativos de R_1 y R_f.

El lazo de retroalimentación *positiva* consiste en dos combinaciones independiente de resistencia $\mathbf{Z}_s = R + 1/sC$ y $\mathbf{Z}_p = R \parallel (1/sC)$. Los valores que se eligen para R y C permiten diseñar un oscilador que tiene una frecuencia específica (*las capacitancias internas del amp op en sí mismas limitarán la frecuencia máxima que se obtiene*). Para determinar la relación entre R, C y la frecuencia de oscilación, se busca la expresión de la ganancia del amplificador, $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$.

Si se recuerdan las dos reglas del amp op ideal que se explicaron en el capítulo 6 y se examina con cuidado el circuito de la figura 15.45, se reconoce que $\mathbf{Z}_p$ y $\mathbf{Z}_s$ forman un divisor de tensión tal que

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_o \frac{\mathbf{Z}_p}{\mathbf{Z}_p + \mathbf{Z}_s} \qquad [20]$$

Simplificando la expresión para $\mathbf{Z}_p = R \| (1/sC) = R/(1 + sRC)$ y $\mathbf{Z}_s = R + 1/sC = (1 + sRC)/sC$,

15.8 TÉCNICA PARA SINTETIZAR LA RAZÓN DE TENSIÓN $H(s) = V_{sal}/V_{ent}$

Gran parte del análisis de este capítulo se ha relacionado con los polos y los ceros de una función de transferencia. Se ubican en el plano de la frecuencia compleja, se utilizan para expresar funciones de transferencia como razones de factores o polinomios en **s**, se calculan respuestas forzadas a partir de ellos y en la

se puede observar que

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o} = \frac{\dfrac{R}{1+sRC}}{\dfrac{1+sRC}{sC} + \dfrac{R}{1+sRC}}$$

$$= \frac{sRC}{1+3sRC+s^2R^2C^2} \qquad [21]$$

Puesto que el interés se centra en la operación en estado senoidal permanente del amplificador, se sustituye s por $j\omega$, por lo que

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o} = \frac{j\omega RC}{1+3j\omega RC+(j\omega)^2R^2C^2}$$

$$= \frac{j\omega RC}{1-\omega^2R^2C^2+3j\omega RC} \qquad [22]$$

Esta expresión de la ganancia es real sólo cuando $\omega = 1/RC$. Así, se puede diseñar un amplificador que opere a una frecuencia particular $f = \omega/2\pi = 1/2\pi RC$ eligiendo valores para R y para C.

Como ejemplo, se diseñará un oscilador de puente de Wien para generar una señal senoidal a una frecuencia de 20 Hz, la más baja frecuencia comúnmente aceptada dentro del intervalo de audio. Se requiere una frecuencia $\omega = 2\pi f = (6.28)(20) = 125.6$ rad/s. Una vez que se especifica un valor para R, se conoce el valor necesario para C (y viceversa). Suponiendo que se tiene un capacitor de 1 μF a la mano, se calcula entonces una resistencia requerida de $R = 7\,962\ \Omega$. Puesto que no es un valor de resistencia estándar, probablemente será necesario usar varias resistencias combinadas en serie y/o en paralelo para obtener el valor necesario. Sin embargo, si se observa de nuevo la figura 15.45 como preparación para simular el circuito mediante PSpice, se puede ver que no se ha especificado ningún valor para R_f o R_1.

Si bien la ecuación [20] precisa de manera correcta la relación entre $\mathbf{V}_o$ y $\mathbf{V}_i$, también se podría escribir otra ecuación que relacione tales cantidades:

$$0 = \frac{\mathbf{V}_i}{R_1} + \frac{\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_o}{R_f}$$

lo cual se reordena para obtener

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = 1 + \frac{R_f}{R_1} \qquad [23]$$

Si $\omega = 1/RC$ en la ecuación [22], se obtiene

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, es necesario elegir valores de R_1 y R_f tales que $R_f/R_1 = 2$. Desafortunadamente, si se procede a efectuar un análisis transitorio con PSpice en el circuito eligiendo $R_f = 2\ \text{k}\Omega$ y $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$, por ejemplo, es probable que desagrade el resultado. Para garantizar que el circuito sea en realidad inestable (*una condición necesaria a fin de que se inicien las oscilaciones*), se necesita tener R_f/R_1 un poco mayor que 2. La salida simulada de nuestro diseño final ($R = 7\,962\ \Omega$, $C = 1\ \mu$F, $R_f = 2.01\ \text{k}\Omega$ y $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$) se muestra en la figura 15.46. Observar que, en la gráfica, la magnitud de las oscilaciones crece; en la práctica, se requiere que los elementos de circuitos no lineales estabilicen la magnitud de la tensión del circuito oscilador.

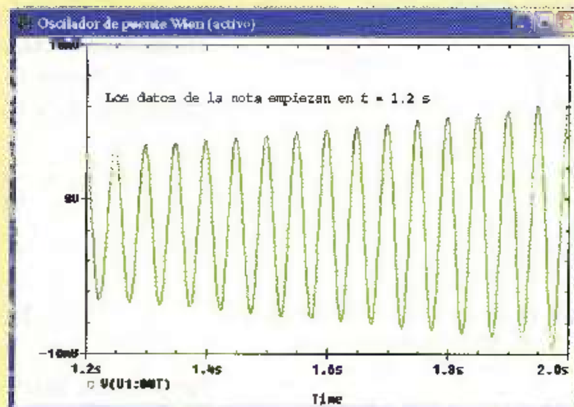


FIGURA 15.46 Salida simulada del oscilador de puente Wien diseñado para operar a 20 Hz.

sección precedente se usaron sus polos para establecer la forma de la respuesta natural.

Se verá ahora la forma en que se podría determinar una red que puede proporcionar una función de transferencia deseada. Sólo se considerará una parte pequeña del problema general, trabajando con la función de transferencia de la forma $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}(\mathbf{s})/\mathbf{V}_{ent}(\mathbf{s})$, como se indica en la figura 15.47. Por simplicidad, se restringe $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ a las frecuencias críticas sobre el eje σ negativo

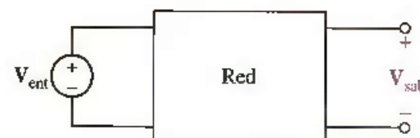


FIGURA 15.47 Dada $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$, se busca una red que tenga una $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ específica.

(incluyendo el origen). Así, se considerarán funciones de transferencia tales que:

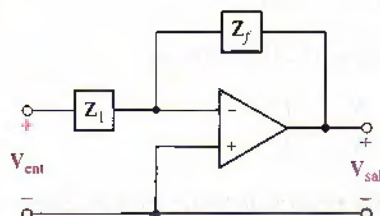
$$\mathbf{H}_1(\mathbf{s}) = \frac{10(\mathbf{s}+2)}{\mathbf{s}+5}$$

o

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{s}) = \frac{-5\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+8)^2}$$

o

$$\mathbf{H}_3(\mathbf{s}) = 0.1\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)$$



■ **FIGURA 15.48** En un amp op ideal, $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent} = -\mathbf{Z}_f/\mathbf{Z}_1$.

Se comenzará determinando la ganancia de tensión de la red de la figura 15.48, que contiene un amp op ideal. La tensión entre las dos terminales de entrada del amp op es, en esencia, cero, y la impedancia de entrada del amp op es, en la práctica, infinita. Por lo tanto, se puede igualar a cero la suma de las corrientes que entran a la terminal de entrada inversora:

$$\frac{\mathbf{V}_{ent}}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{Z}_f} = 0$$

o

$$\frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = -\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1}$$

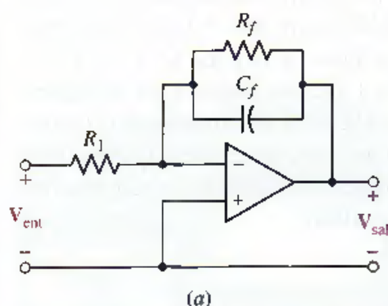
Si $\mathbf{Z}_f$ y $\mathbf{Z}_1$ son resistencias, el circuito actúa como un amplificador inversor o quizás como un ***atenuador*** (si la razón es menor que la unidad). Sin embargo, el interés en este momento radica en los casos en los que una de estas impedancias es una resistencia, mientras que la otra es una red RC.

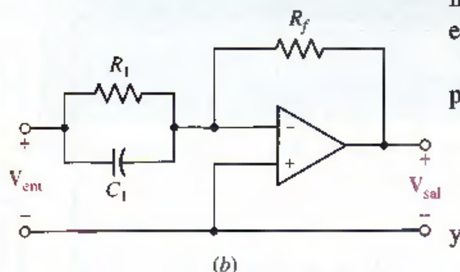
En la figura 15.49*a*, sea $\mathbf{Z}_1 = R_1$, mientras que $\mathbf{Z}_f$ es la combinación en paralelo de R_f y C_f. Por lo tanto,

$$\mathbf{Z}_f = \frac{R_f/\mathbf{s}C_f}{R_f + (1/\mathbf{s}C_f)} = \frac{R_f}{1+\mathbf{s}C_fR_f} = \frac{1/C_f}{\mathbf{s}+(1/R_fC_f)}$$

y

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = -\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1} = -\frac{1/R_1C_f}{\mathbf{s}+(1/R_fC_f)}$$





■ **FIGURA 15.49** (*a*) La función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ tiene un polo en $\mathbf{s} = -1/R_fC_f$. (*b*) Aquí hay un cero $\mathbf{s} = -1/R_1C_1$.

Se tiene una función de transferencia con una sola frecuencia crítica (finita), un polo en $\mathbf{s} = -1/R_fC_f$.

Al considerar ahora la figura 15.49*b*, se deja que en este caso $\mathbf{Z}_f$ sea resistiva, en tanto que $\mathbf{Z}_1$ será una combinación en paralelo RC:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{1/C_1}{\mathbf{s}+(1/R_1C_1)}$$

y

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = -\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1} = -R_fC_1\left(\mathbf{s}+\frac{1}{R_1C_1}\right)$$

La única frecuencia crítica finita es cero en $\mathbf{s} = -1/R_1C_1$.

Para los amp op ideales, la impedancia de salida o de Thévenin es cero y, por lo tanto, $\mathbf{V}_{sal}$ y $\mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ no son funciones de ninguna carga $\mathbf{Z}_L$ que pudiera ponerse a través de las terminales de salida. Esto también incluye la entrada a otro amp op y, por lo tanto, se conectarían circuitos que tengan polos y ceros en localizaciones específicas en ***cascada***, donde la salida de un amp op se conecta de manera directa a la entrada del siguiente, y de esa manera generar cualquier función de transferencia que se desee.

EJEMPLO 15.13

Sintetizar el circuito que producirá la función de transferencia $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent} = 10(s+2)/(s+5)$.

El polo en $s = -5$ se obtiene mediante una red con la forma de la figura 15.49*a*. Si se nombra *A* a esta red, se tiene $1/R_{fA}C_{fA} = 5$. De manera arbitraria se elige $R_{fA} = 100\text{ k}\Omega$; por lo tanto, $C_{fA} = 2\ \mu\text{F}$. Para esta parte del circuito completo,

$$\mathbf{H}_A(s) = -\frac{1/R_{1A}C_{fA}}{s + (1/R_{fA}C_{fA})} = -\frac{5\times 10^5/R_{1A}}{s+5}$$

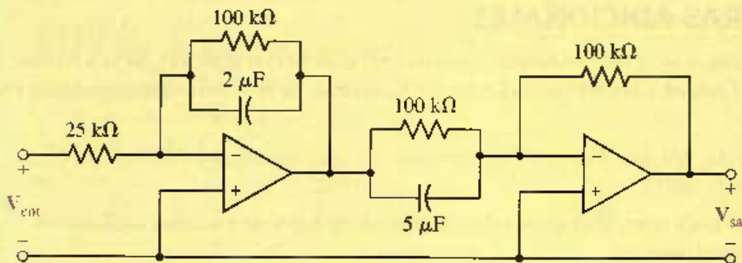
A continuación, se considera el cero en $s = -2$. De la figura 15.49*b*, $1/R_{1B}C_{1B} = 2$, y con $R_{1B} = 100\text{ k}\Omega$, se tiene que $C_{1B} = 5\ \mu\text{F}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{H}_B(s) = -R_{fB}C_{1B}\left(s + \frac{1}{R_{1B}C_{1B}}\right)$$
$$= -5\times 10^{-6}R_{fB}(s+2)$$

y

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_A(s)\mathbf{H}_B(s) = 2.5\frac{R_{fB}}{R_{1A}}\frac{s+2}{s+5}$$

Se completa el diseño $R_{fB} = 100\text{ k}\Omega$ y $R_{1A} = 25\text{ k}\Omega$. El resultado se muestra en la figura 15.50. Los capacitores en este circuito son bastante grandes, aunque lo anterior es una consecuencia directa de las bajas frecuencias seleccionadas para el polo y para el cero de $\mathbf{H}(s)$. Si $\mathbf{H}(s)$ se cambiara a $10(s + 2000)/(s + 5000)$, se podrían utilizar valores de 2 y 5 nF.



■ **FIGURA 15.50** Esta red contiene dos amp op ideales y produce la función de transferencia de tensión $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{H}_{ent} = 10(s+2)/(s+5)$.

PRÁCTICA

15.17 Especificar los valores adecuados de elementos para $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_f$ en cada una de las tres etapas de cascada, a fin de realizar la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = -20\mathbf{s}^2/(\mathbf{s} + 1\,000)$.

Respuestas: 1 μF ‖ ∞, 1 MΩ; 1 μF ‖ ∞, 1 MΩ; 100kΩ ‖ 10 nF, 5 MΩ.

RESUMEN Y REPASO

- Se pueden representar las resistencias en el dominio de la frecuencia por medio de una impedancia que tenga la misma magnitud.
- Los inductores pueden representarse en el dominio de la frecuencia mediante una impedancia $\mathbf{s}L$. Si la corriente inicial es diferente de cero, entonces la impedancia debe ponerse en serie con la fuente de tensión $-Li(0^-)$ o en paralelo con una fuente de corriente $i(0^-)/\mathbf{s}$.

En la tabla 15.1 se muestra un resumen de estos modelos.

- Resulta factible representar los capacitores en el dominio de la frecuencia por medio de una impedancia $1/\mathbf{s}C$. Si la tensión inicial es distinta de cero, entonces la impedancia debe ponerse en serie con la fuente de tensión $v(0^-)/\mathbf{s}$ o en paralelo con una fuente de corriente $Cv(0^-)$.
- El análisis nodal y de malla en el dominio **s** da como resultado ecuaciones simultáneas en términos de polinomios **s**. MATLAB es una herramienta muy útil para resolver tales sistemas de ecuaciones.
- La superposición, la transformación de fuente y los teoremas de Thévenin y de Norton son válidos en el dominio **s**.
- Una función de transferencia de circuito $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ se define como la razón entre la salida y la entrada, ambas en el dominio **s**. Cualquier cantidad pudiese ser una tensión o una corriente.
- Los *zeros* de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ son los valores que propician una magnitud cero. Los *polos* de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ son los valores que originan la magnitud infinita.
- La convolución nos proporciona medios tanto analíticos como gráficos para determinar la salida de un circuito a partir de su respuesta al impulso $h(t)$.
- Existen varios métodos gráficos para representar expresiones en el dominio **s** en términos de polos y de ceros. Se utilizan estas gráficas para sintetizar un circuito y obtener una respuesta deseada.

LECTURAS ADICIONALES

Más detalles acerca del análisis de sistemas en el dominio **s**, el uso de la transformada de Laplace y las propiedades de las funciones de transferencia se pueden encontrar en

K. Ogata, *Modern Control Engineering,* 4a. ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2002.

Un análisis muy completo acerca de los diferentes tipos de circuitos osciladores puede encontrarse en:

R. Mancini, *Op Amps for Everyone,* 2a. ed. Amsterdam: Newnes, 2003

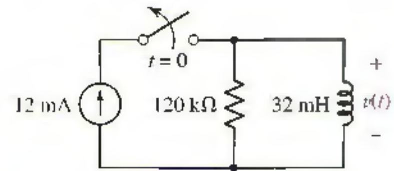
y

G. Clayton y S. Winder, *Operational Amplifiers,* 5a. ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

EJERCICIOS

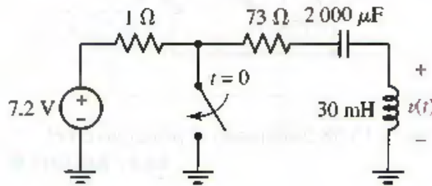
15.1 Z(s) y Y(s)

1. Dibujar todos los equivalentes posibles ($t > 0$) en el dominio **s** del circuito de la figura 15.51.



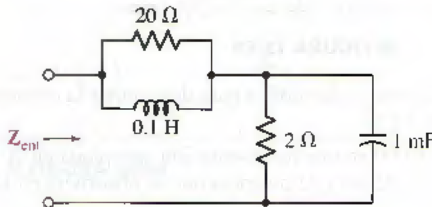
■ **FIGURA 15.51**

2. Dibujar todos los equivalentes posibles ($t > 0$) en el dominio **s** del circuito que se presenta en la figura 15.52.



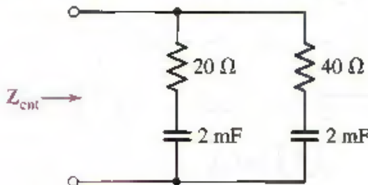
■ **FIGURA 15.52**

3. Observar la figura 15.53 y calcular : (*a*) $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$ como la razón entre dos polinomios en **s**; (*b*) $\mathbf{Z}_{ent}(-80)$; (*c*) $\mathbf{Z}_{ent}(j80)$; (*d*) la admitancia de la rama *RL* en paralelo, $\mathbf{Y}_{RL}(\mathbf{s})$, como una razón de polinomios en **s**. (*e*) Repetir para $\mathbf{Y}_{RC}(\mathbf{s})$. (*f*) Demostrar que $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s}) = (\mathbf{Y}_{RL} + \mathbf{Y}_{RC})/\mathbf{Y}_{RL}\,\mathbf{Y}_{RC}$.



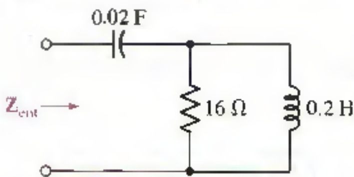
■ **FIGURA 15.53**

4. Determinar la impedancia equivalente de Thévenin vista desde las terminales del circuito que se describe en la figura 15.54, hacia dentro del mismo.



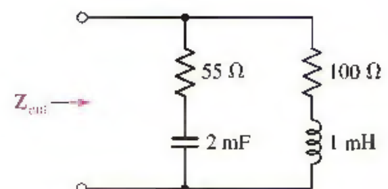
■ **FIGURA 15.54**

5. (*a*) Determinar $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$ de la red de la figura 15.55 como una razón de dos polinomios en **s**. (*b*) Determinar $\mathbf{Z}_{ent}(j8)$ en forma rectangular. (*c*) Encontrar $\mathbf{Z}_{ent}(-2 + j6)$ en forma polar. (*d*) ¿A qué valor debe cambiarse la resistencia de 16 Ω para que $\mathbf{Z}_{ent} = 0$ en $\mathbf{s} = -5 + j0$? (*e*) ¿A qué valor debe cambiarse la resistencia de 16 Ω para que $\mathbf{Z}_{ent} = \infty$ sea $\mathbf{s} = -5 + j0$?



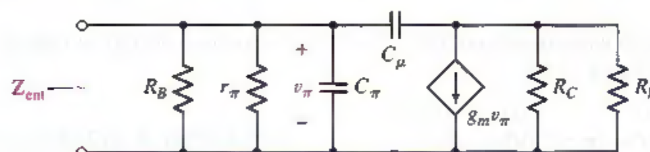
■ **FIGURA 15.55**

6. (*a*) Determinar la impedancia equivalente de Thévenin que se observa desde las terminales del circuito que se ilustra en la figura 15.56, hacia dentro del mismo; (*b*) graficar la magnitud de la impedancia como una función de la pulsación ω para el caso $\sigma = 0$.



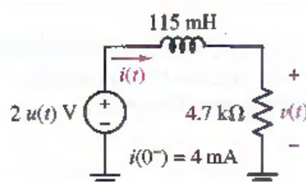
■ **FIGURA 15.56**

7. Determinar la impedancia de entrada $\mathbf{Z}_{ent}$ del circuito que se muestra en la figura 15.57, modelo de un circuito lineal de un amplificador transistorizado de unión bipolar y emisor común válido para frecuencias hasta de varios MHz. Expresar la respuesta como una razón de polinomios s ordenados.

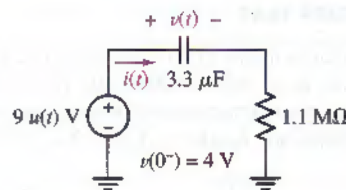


■ FIGURA 15.57

8. Determinar $v(t)$ en el circuito de la figura 15.58 trabajando al principio en el dominio s.



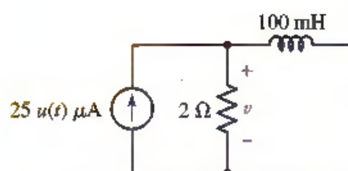
■ FIGURA 15.58



■ FIGURA 15.59

9. Utilizar técnicas de análisis de circuitos en el dominio s para determinar la corriente $i(t)$ a través del capacitor de la figura 15.59.

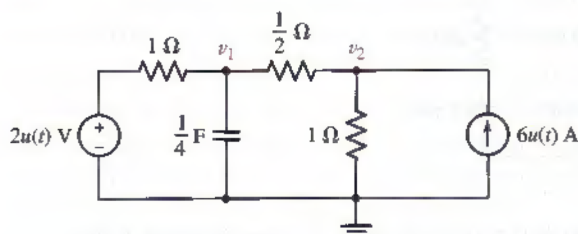
10. (*a*) Convertir el circuito de la figura 15.60 en una representación apropiada en el dominio s. (*b*) Determinar la expresión de $p(t)$, la potencia que se absorberá en la resistencia.



■ FIGURA 15.60

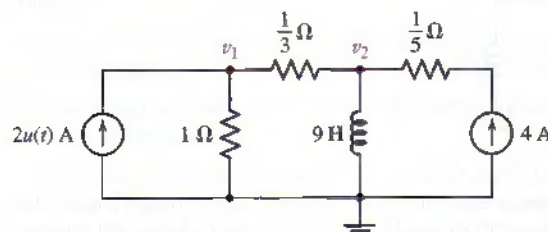
15.2 Análisis nodal y de malla en el dominio s

11. Considerar el circuito de la figura 15.61. Utilizando las técnicas en el dominio s, encontrar las tensiones nodales indicadas $v_1(t)$ y $v_2(t)$ si $v_1(0^-) = -2$ V.



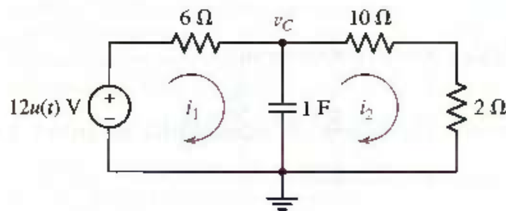
■ FIGURA 15.61

12. Considerar el circuito de la figura 15.62. (*a*) Utilizando las técnicas en el dominio s, encontrar las tensiones nodales indicadas como $v_1(t)$ y $v_2(t)$. (*b*) Elaborar un diagrama de $v_1(t)$.



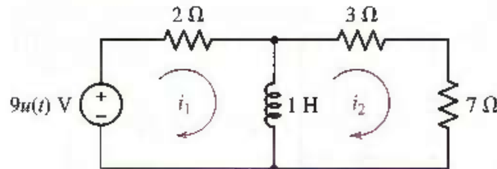
■ FIGURA 15.62

13. El circuito simple de la figura 15.63 contiene dos mallas. (*a*) Determinar tanto $i_1(t)$ como $i_2(t)$ utilizando el análisis de malla en el dominio s si $v_C(0^-) = 9$ V. (*b*) Verificar la respuesta utilizando PSpice. Proponer un esquema marcado apropiadamente junto con el resultado de su simulación comparado con la solución analítica de la parte (*a*).



■ **FIGURA 15.63**

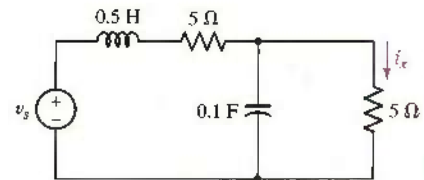
14. El circuito simple de la figura 15.64 contiene dos mallas. (*a*) Determinar tanto $i_1(t)$ como $i_2(t)$ utilizando el análisis de malla en el dominio s si $i_1(0^-) - i_2(0^-) = 8$ A. (*b*) Verificar la respuesta utilizando PSpice. Proponer un esquema marcado apropiadamente, junto con el resultado de su simulación comparado con la solución analítica de la parte (*a*).



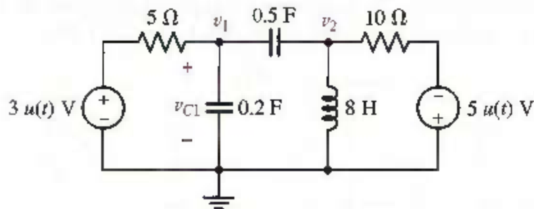
■ **FIGURA 15.64**

15. (*a*) Sea $v_s = 10e^{-2t}\cos(10t + 30°)u(t)$ V en el circuito de la figura 15.65, y trabajar en el dominio de la frecuencia para determinar $\mathbf{I}_x$. (*b*) Calcular $i_x(t)$.

16. Determinar la tensión nodal $v_1(t)$ en el circuito de la figura 15.66, bajo el supuesto de una energía inicial igual a cero.



■ **FIGURA 15.65**

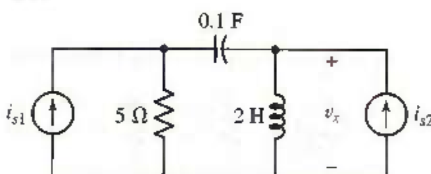


■ **FIGURA 15.66**

17. Determinar las expresiones en el dominio del tiempo de la corriente de malla central del circuito de la figura 15.66, bajo el supuesto de una energía inicial igual a cero.

18. Calcular la tensión nodal $v_1(t)$ del circuito de la figura 15.66 si la tensión en el capacitor $v_{C1}(0^-) = 9$ V, pero ningún otro elemento almacena inicialmente alguna cantidad de energía.

19. Sea $i_{s1} = 20e^{-3t}\cos 4t\, u(t)$ A e $i_{s2} = 30e^{-3t}\,\text{sen}\, 4t\, u(t)$ A en el circuito de la figura 15.67. (*a*) Trabajar en el dominio de la frecuencia para determinar $\mathbf{V}_x$. (*b*) Obtener $v_x(t)$.



■ **FIGURA 15.67**

20. (*a*) Determinar una expresión en el dominio del tiempo para $v(t)$ en el circuito de la figura 15.68 si $v(0^-) = 75$ V, teniendo en cuenta que inicialmente no hay energía almacenada en el inductor. (*b*) Utilizar la respuesta del inciso (*a*) para determinar la corriente en estado permanente que fluye en el circuito desde la fuente de 115 V rms. (*c*) Verificar la respuesta del inciso (*b*) utilizando el análisis fasorial.

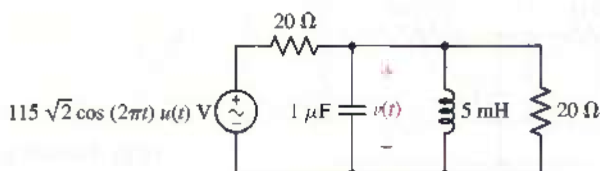


FIGURA 15.68

21. Determinar las corrientes de malla $i_1(t)$ e $i_2(t)$ de la figura 15.69 si la corriente que pasa por el inductor de 1 mH ($i_2 - i_4$) es de 1 A en $t = 0^-$. Verificar que la respuesta se aproxime a la que se obtuvo mediante el análisis fasorial a medida que la respuesta del circuito alcanza, en el largo plazo, el estado permanente.

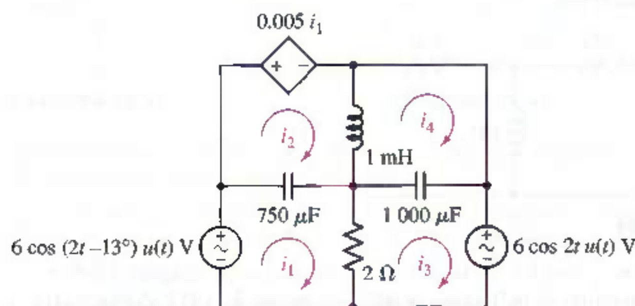


FIGURA 15.69

22. Bajo el supuesto de que no se almacena en un principio energía en el circuito de la figura 15.70, determinar el valor de v_2 en $t =$: (*a*) 1 ms; (*b*) 100 ms; (*c*) 10 s.

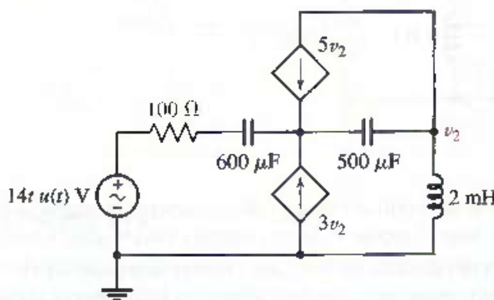


FIGURA 15.70

23. Si la fuente de tensión dependiente del circuito de la figura 15.71 es dañada por una sobretensión durante una tormenta eléctrica y ya no funciona (es decir, ahora es un

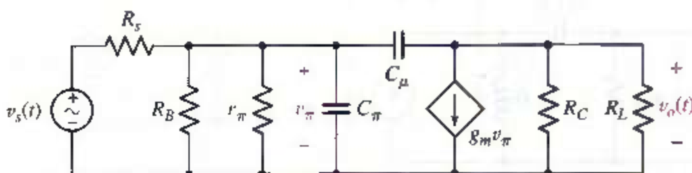


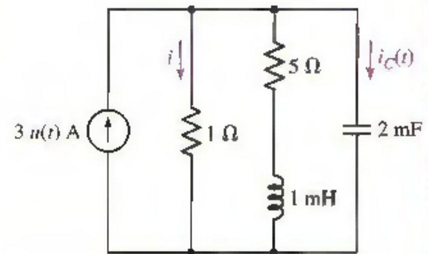
FIGURA 15.71

circuito abierto), determinar la expresión de la potencia que absorbe la resistencia de 2 Ω. Se debe suponer que la única energía almacenada al principio en el circuito se encuentra en el inductor, de manera que la corriente que circula por el inductor de 1 mH inductor $(i_2 - i_4)$ es 1 mA en $t = 0^-$.

24. (*a*) En el circuito de la figura 15.71, un modelo de circuito lineal de un amplificador transistorizado de unión bipolar y emisor común, determinar la expresión de la ganancia de tensión $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$. Se podría suponer que no hay energía almacenada en un principio en los capacitores; expresar la respuesta como una razón de polinomios s ordenados. (*b*) ¿Cuántos polos existen para esta función de transferencia?

15.3 Técnicas adicionales de análisis de circuitos

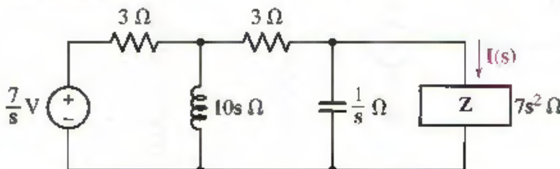
25. (*a*) Convertir el circuito de la figura 15.72 en una representación apropiada en el dominio s. (*b*) Determinar el equivalente de Thévenin visto por la resistencia de 1 Ω. (*c*) Analizar el circuito simplificado para obtener una expresión correspondiente a $i(t)$, la corriente instantánea que pasa por la resistencia de 1 Ω.



■ **FIGURA 15.72**

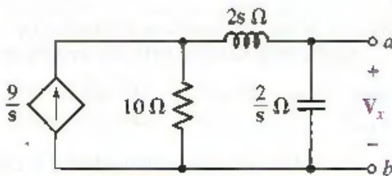
26. Sustituir la fuente de corriente de la figura 15.72 por una fuente de tensión $20u(t)$ V, con la referencia positiva en la parte superior. (*a*) Convertir el circuito en una representación apropiada en el dominio s. (*b*) Determinar el equivalente de Norton visto desde la resistencia de 1 Ω resistor. (*c*) Analizar el circuito simplificado para obtener la expresión correspondiente a $i_C(t)$.

27. En el circuito en el dominio s de la figura 15.73, determinar el equivalente de Thévenin visto desde la impedancia de $7s^2$ Ω y utilizarlo para determinar la corriente **I**(s).



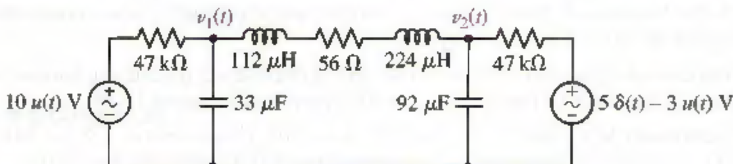
■ **FIGURA 15.73**

28. En el circuito en el dominio s de la figura 15.74, determinar el equivalente de Thévenin visto mirando hacia las terminales marcadas como *a* y *b*.



■ **FIGURA 15.74**

29. (*a*) Aplicar el teorema de superposición en el dominio s para obtener $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ y $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ para el circuito de la figura 15.75. (*b*) Determinar $v_1(t)$ y $v_2(t)$.

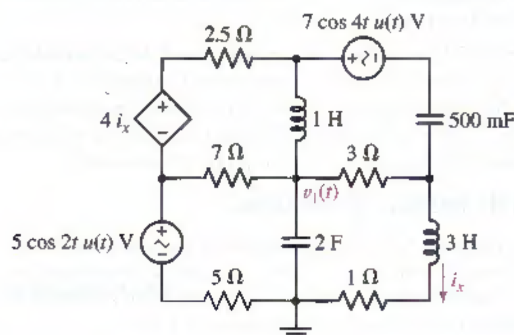


■ **FIGURA 15.75**

30. Determinar la potencia $p(t)$ que absorbe la resistencia de 56 Ω de la figura 15.75 mediante transformaciones de fuente apropiadas en el dominio

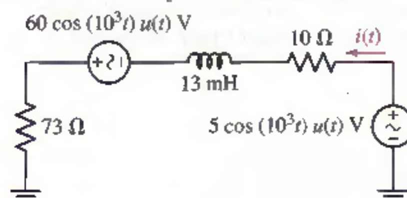
31. (*a*) Calcular el equivalente de Norton en el dominio s visto por la fuente de $10\,u(t)$ V de la figura 15.75. (*b*) Determinar la corriente que fluye hacia fuera de la fuente de $10\,u(t)$ V en $t = 1.5$ ms.

32. (*a*) Utilizar la superposición en el dominio s para encontrar una expresión relativa a $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ como se indica en la figura 15.76. (*b*) Calcular $v_1(t)$.



■ **FIGURA 15.76**

33. (*a*) Emplear transformaciones de fuente en el dominio s para determinar **I(s)** correspondiente al circuito de la figura 15.77. (*b*) Encontrar $i(t)$. (*c*) Determinar el valor del estado permanente de $i(t)$.



■ **FIGURA 15.77**

15.4 Polos, ceros y funciones de transferencia

34. Determinar los polos y ceros de las funciones de transferencia siguientes:

$$(a)\ \frac{7\mathbf{s}}{\mathbf{s}(3\mathbf{s}^2-9\mathbf{s}+4)};\ (b)\ \frac{\mathbf{s}^2-1}{(\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+4)(\mathbf{s}^2+1)}.$$

35. Mencionar todos los polos y ceros de cada una de las funciones en el dominio s siguientes:

$$(a)\ \frac{3\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}^2+4)(\mathbf{s}-1)};\ (b)\ \frac{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}-1}{\mathbf{s}^2(4\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}^2-1)}.$$

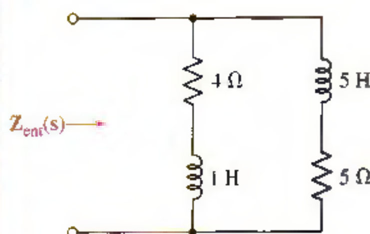
36. La combinación en serie de una resistencia de 5 Ω y una capacitancia de 0.2 F está en paralelo con una combinación en serie de una resistencia de 2 Ω y una inductancia de 5 H. (*a*) Determinar la admitancia de entrada $\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$, de esta combinación en paralelo como una razón de dos polinomios en s. (*b*) Identificar todos los polos y los ceros de $\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$. (*c*) Identificar todos los polos de la admitancia de entrada que se obtendrán si una resistencia de 10 Ω se conecta en paralelo con $\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$. (*d*) Identificar todos los ceros de la admitancia de entrada que se obtendrán si se conecta una resistencia de 10 Ω en serie con $\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$.

37. Determinar todos los polos y los ceros de: (*a*) la impedancia de entrada definida en la figura 15.54; (*b*) la impedancia de entrada definida en la figura 15.56.

38. Una admitancia **Y**(s) tiene ceros en $\mathbf{s} = 0$ y $\mathbf{s} = -10$, y polos en $\mathbf{s} = -5$ y $-20\ \mathrm{s}^{-1}$. Si $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \to 12$ S a medida que $\mathbf{s} \to \infty$, determinar: (*a*) $\mathbf{Y}(j10)$; (*b*) $\mathbf{Y}(-j10)$; (*c*) $\mathbf{Y}(-15)$; (*d*) los polos y los ceros de $5 + \mathbf{Y}(\mathbf{s})$.

39. (*a*) Obtener $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$ en la red de la figura 15.78. (*b*)Determinar todas las frecuencias críticas de $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$.

40. Un circuito dado tiene una función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = (\mathbf{s}+2)/[(\mathbf{s}+5)(\mathbf{s}^2+6\mathbf{s}+25)]$. Determinar la respuesta de salida en el dominio: (*a*) $\delta(t)$; (*b*) $e^{-4t}u(t)$; (*c*) $[2\cos 15t]u(t)$; (*d*) $te^{-t}u(t)$. (*e*) Mencionar los polos y ceros de cada respuesta de salida.



■ **FIGURA 15.78**

15.5 Convolución

41. La respuesta al impulso de cierto sistema lineal es $h(t) = 5\operatorname{sen}\pi t[u(t) - u(t-1)]$. Se aplica una señal de entrada $x(t) = 2[u(t) - u(t-2)]$ Utilizar la convolución para determinar y dibujar la salida $y(t)$.
42. Sean $f_1(t) = e^{-5t}u(t)$ y $f_2(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$. Calcular $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ por: (*a*) convolución en el dominio del tiempo; (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}_1(\mathbf{s})\mathbf{F}_2(\mathbf{s})\}$.
43. Cuando se aplica un impulso $\delta(t)$ V a cierta red de puertos, la tensión de salida es $v_o(t) = 4u(t) - 4u(t-2)$ V. Determinar y dibujar $v_o(t)$ si la tensión de entrada es $2u(t-1)$ V.
44. Sean $h(t) = 2e^{-3t}u(t)$ y $x(t) = u(t) - \delta(t)$. Determinar $y(t) = h(t) * x(t)2$ como sigue: (*a*) utilizando la convolución en el dominio del tiempo; (*b*) calculando $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ y $\mathbf{X}(\mathbf{s})$ y después obtener $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{H}(\mathbf{s})\mathbf{X}(\mathbf{s})\}$.
45. La respuesta en tensión al impulso de un circuito particular está dada como $h(t) = 5u(t) - 5u(t-2)$. Calcular la respuesta en tensión en el dominio s y en el dominio del tiempo si la tensión de excitación $v_{\text{ent}}(t) =$ es igual a: (*a*) $3\delta(t)$ V; (*b*) $3u(t)$ V; (*c*) $3u(t) - 3u(t-2)$ V; (*d*) $3\cos 3t$ V. (*e*) Dibujar la respuesta en tensión en el dominio del tiempo para todos los incisos precedentes (*a*)–(*d*).
46. (*a*) Determinar la respuesta al impulso $h(t)$ de la red que se muestra en la figura 15.79. (*b*) Utilizar la convolución para determinar $v_o(t)$ si $v_{\text{ent}}(t) = 8u(t)$ V.

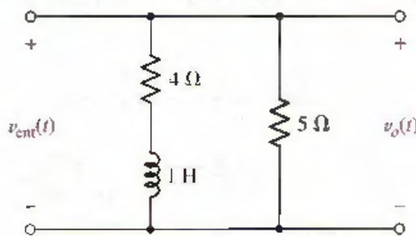


FIGURA 15.79

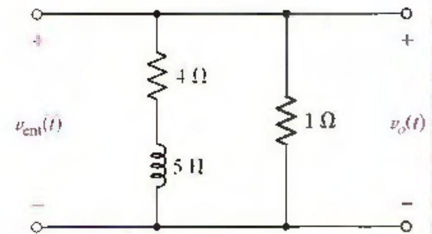


FIGURA 15.80

47. (*a*) Determinar la respuesta al impulso $h(t)$ de la red que se muestra en la figura 15.80. (*b*) Utilizar la convolución para determinar $v_o(t)$ si $v_{\text{ent}}(t) = 8e^{-t}u(t)$ V.

15.6 Plano de frecuencia compleja

48. Determinar $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{\text{sal}}{=}\mathbf{V}_{\text{ent}}$ de la red de la figura 15.81 y localizar todas sus frecuencias críticas.

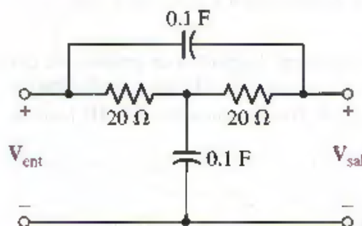


FIGURA 15.81

49. La configuración de polos y ceros de $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_2(\mathbf{s})/\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ se muestra en la figura 15.82. Sea $\mathbf{H}(0) = 1$. Dibujar $|\mathbf{H}(\mathbf{s})|$ en función de: (*a*) σ si $\omega = 0$; (*b*) ω si $\sigma = 0$. (*c*) Determinar $|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{máx}}$.
50. Una pieza de maquinaria eléctrica tiene una impedancia de entrada caracterizada por dos ceros en $s = -1$, un polo en $\mathbf{s} = -0.5 + j\sqrt{3}/2$, otro polo en $\mathbf{s} = -0.5 - j\sqrt{3}/2$, y es igual a 1 ohm en $\mathbf{s} = 0$. (*a*) Dibujar la constelación de polos y de ceros de esa impedancia. (*b*) Dibujar el modelo de lámina elástica de la magni-

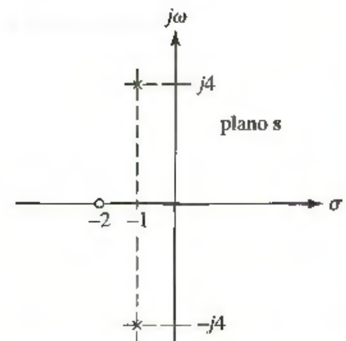


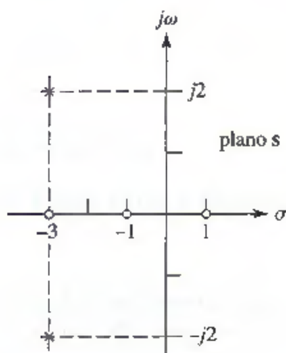
FIGURA 15.82

tud de la impedancia. (*c*) Encontrar una combinación de resistencias, inductores y capacitores que tengan la misma impedancia. (*Sugerencia: trabajar de atrás hacia adelante a partir de la expresión en el dominio* **s**.)

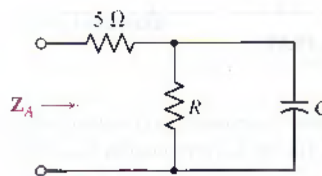
51. Dada la ganancia de tensión $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = (10\mathbf{s}^2 + 55\mathbf{s} + 75)/(\mathbf{s}^2 + 16)$: (*a*) indicar las frecuencias críticas en el plano. (*b*) Calcular $\mathbf{H}(0)$ y $\mathbf{H}(\infty)$. (*c*) Si un modelo de escala $|\mathbf{H}(\mathbf{s})|$ tiene una altura de 3 cm en el origen, ¿cuál es la altura en $\mathbf{s} = j3$? (*d*) Dibujar en forma aproximada $|\mathbf{H}(\sigma)|$ en función de σ y $|\mathbf{H}(j\omega)|$ en función de ω.

52. En un laboratorio secreto del gobierno, un investigador cuyo almuerzo escondieron de manera maliciosa sus colegas, que al parecer no tienen nada que hacer, descubrió una caja de metal de forma extraña. Sin señales de comida por ningún lado, el investigador decidió medir la admitancia de la caja y descubrió que su modelo podría ser $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = (5\mathbf{s}^2 + 5\mathbf{s} + 2)/(5\mathbf{s}^2 + 15\mathbf{s} + 2)$ S. (*a*) Dibujar la constelación de polos y de ceros de esta admitancia. (*b*) Dibujar el modelo de lámina elástica de la magnitud de la admitancia. (*c*) Determinar la ubicación del almuerzo desaparecido, si los coeficientes de polinomio del denominador corresponden a la latitud (grados, minutos y segundos) y los coeficientes del polinomio del numerador corresponden a la longitud (grados, minutos y segundos). Resulta obvio que los colegas del investigador tienen mucho en qué divertirse.

53. Se aplica la constelación de polos y de ceros que se presenta en la figura 15.83 a una ganancia de corriente $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_{sal}/\mathbf{I}_{ent}$. Let $\mathbf{H}(-2) = 6$. (*a*) Expresar $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ como una razón de polinomios en **s**. (*b*) Calcular $\mathbf{H}(0)$ y $\mathbf{H}(\infty)$. (*c*) Determinar la magnitud y la dirección de cada flecha, a partir de una frecuencia crítica para $\mathbf{s} = j2$.



■ **FIGURA 15.83**



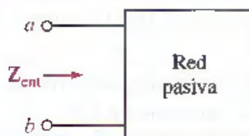
■ **FIGURA 15.84**

54. La red de tres elementos de la figura 15.84 tiene una impedancia de entrada $\mathbf{Z}_A(\mathbf{s})$ con un cero en $\mathbf{s} = -10 + j0$. Si se pone una resistencia de 20 Ω en serie con la red, el cero de la nueva impedancia se desplazará a $\mathbf{s} = -3.6 + j0$. Determinar R y C.

55. Sea $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 100(\mathbf{s} + 2)/(\mathbf{s}^2 + 2\mathbf{s} + 5)$ y: (*a*) mostrar la gráfica de polos y de ceros correspondiente a $\mathbf{H}(\mathbf{s})$; (*b*) determinar $\mathbf{H}(j\omega)$; (*c*) deducir $|\mathbf{H}(j\omega)|$; (*d*) dibujar $|\mathbf{H}(j\omega)|$ en función de ω; (*e*) determinar $\omega_{máx}$, la frecuencia a la cual $|\mathbf{H}(j\omega)|$ es máximo.

15.7 Respuesta natural y el plano s

56. Sea $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s}) = (5\mathbf{s} + 20)/(\mathbf{s} + 2)$ Ω para la red que se presenta en la figura 15.85. Determinar: (*a*) la tensión $v_{ab}(t)$ entre las terminales en circuito abierto, si $v_{ab}(0) = 25$ V; (*b*) la corriente $i_{ab}(t)$ en un corto circuito entre las terminales *a* y *b* si $i_{ab}(0) = 3$ A.



■ **FIGURA 15.85**

57. Sea $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s}) = 5(\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 20)/(\mathbf{s} + 1)\ \Omega$ en la red pasiva de la figura 15.85. Determinar $i_a(t)$, la corriente instantánea que entra a la terminal a, dado que $v_{ab}(t)$ es igual a: (*a*) $160e^{-6t}$ V; (*b*) $160e^{-6t}u(t)$ V, con $i_a(0) = 0$ y $di_a/dt = 32$ A/s en $t = 0$.

58. (*a*) Determinar $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_C/\mathbf{I}_s$ en el circuito que se muestra en la figura 15.86. (*b*) Determinar los polos de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$. (*c*) Encontrar α, ω_0 y ω_d en el circuito *RLC*. (*d*) Determinar la respuesta forzada $i_{C,f}(t)$ en forma completa. (*e*) Indicar la forma de la respuesta neutral $i_{C,n}(t)$. (*f*) Determinar los valores para $i_C(0^+)$ y di_C/dt en $t = 0^+$. (*g*) Escribir la respuesta completa, $i_C(t)$.

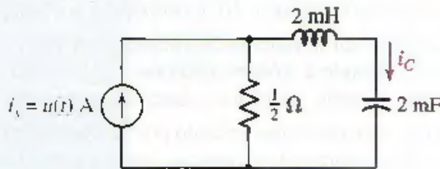


FIGURA 15.86

59. En el circuito de la figura 15.87: (*a*) encontrar los polos de $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_{ent}/\mathbf{V}_{ent}$. (*b*) Sean $i_1(0^+) = 5$ A e $i_2(0^+) = 2$ A y determinar $i_{ent}(t)$ si $v_{ent}(t) = 500u(t)$ V.

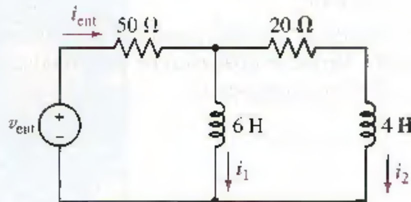


FIGURA 15.87

60. (*a*) Calcular $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s(\mathbf{s})$ para el circuito de la figura 15.88. Determinar $v(t)$ si $i_s(t)$ es igual a: (*b*) $2u(t)$ A; (*c*) $4e^{-10t}$ A; (*d*) $4e^{-10t}u(t)$ A.

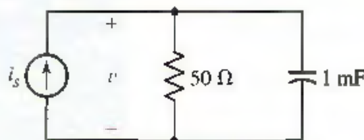


FIGURA 15.88

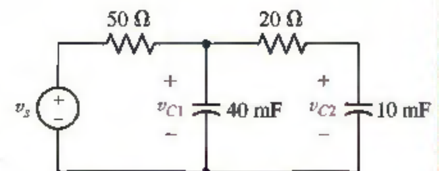


FIGURA 15.89

61. En el circuito de la figura 15.89: (*a*) calcular $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{C2}/\mathbf{V}_s$; (*b*) sea $v_{C1}(0^+) = 0$ y $v_{C2}(0^+) = 0$, y calcular $v_{C2}(t)$ si $v_s(t) = u(t)$ V.

62. Observar la figura 15.90 y determinar la impedancia $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$ vista desde la fuente. Utilizar esta expresión para ayudar a determinar $v_{ent}(t)$ para $t > 0$.

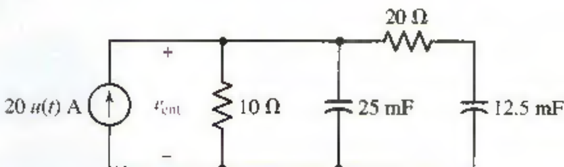


FIGURA 15.90

15.8 Técnica para sintetizar la razón de tensión $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$

63. Determinar $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ como una razón de polinomios en s para el amp op de la figura 15.48, indicando los valores de impedancia (en Ω): (*a*) $\mathbf{Z}_1(s) = 10^3 + (10^8/s)$, $\mathbf{Z}_f(s) = 5\,000$; (*b*) $\mathbf{Z}_1(s) = 5\,000$, $\mathbf{Z}_f(s) = 10^3 + (10^8/s)$; (*c*) $\mathbf{Z}_1(s) = 10^3 + (10^8/s)$, $\mathbf{Z}_f(s) = 10^4 + (10^8/s)$.

D 64. En el circuito de la figura 15.49*b*, sea $R_f = 20\ \text{k}\Omega$ y especificar entonces los valores de R_1 y C_1 de manera que $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ sea igual a: (*a*) -50; (*b*) $-10^{-3}(s + 10^4)$; (*c*) $-10^{-4}(s + 10^3)$; (*d*) $10^{-3}(s + 10^5)$, utilizando dos etapas.

D 65. En el amp op de la figura 15.49*a*, sea $R_f = 20\ \text{k}\Omega$ y especificar en ese caso los valores de R_1 y C_f de manera que $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ sea igual a: (*a*) -50; (*b*) $-10^3/(s + 10^4)$; (*c*) $-10^4/(s + 10^3)$; (*d*) $100/(s + 10^5)$, utilizando dos etapas.

D 66. Utilizar varios amp op en cascada para realizar la función de transferencia $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent} = -10^{-4}s(s + 10^2)/(s + 10^3)$. Emplear sólo resistencias de $10\ \text{k}\Omega$ circuitos abiertos, circuitos en corto, especificando todos los valores de capacitancia.

D 67. Diseñar un oscilador de puente de Wien que esté caracterizado por una frecuencia de oscilación de 1 kHz. Emplear sólo los valores de resistencias estándar dados en el interior de la cubierta. Verificar su diseño con una simulación PSpice apropiada.

D 68. Diseñar un oscilador de puente de Wien con una frecuencia de oscilación de 60 Hz. Verificar su diseño con una simulación PSpice apropiada.

D 69. Diseñar un circuito de oscilador para proporcionar una señal senoidal de 440 Hz empleando sólo valores de resistencia estándar, como los que se dan en la parte interior de la cubierta de la portada. Verificar el diseño con una simulación PSpice apropiada. ¿Qué nota musical produce el circuito?

D 70. Diseñar un circuito que proporciona una salida de tensión compuesta por una onda seno de 220 Hz y una onda seno de 440 Hz. Verificar el diseño con una simulación PSpice apropiada. ¿Están en fase entre sí las dos ondas seno?

CAPÍTULO 16

Respuesta en frecuencia

CONCEPTOS CLAVE

- Frecuencia resonante de los circuitos con inductores y capacitores.
- Factor de calidad.
- Ancho de banda.
- Escalamiento (o ajuste) de frecuencia y magnitud.
- Técnicas de los diagramas de Bode.
- Filtros pasabajas y pasaaltas.
- Diseño de filtros pasa bandas.
- Filtros activos.

INTRODUCCIÓN

La respuesta en frecuencia ya ha aparecido en varios capítulos, por lo que tal vez al lector le sorprenda que ahora se dedique al tema un capítulo completo. Dicho concepto es de suma importancia en todos los campos de la ciencia y de la ingeniería, pues constituye la base para comprender los factores que determinan la estabilidad o inestabilidad, de un sistema específico, sea eléctrico, mecánico, químico o biológico. Se encontrará también que los conceptos de respuesta en frecuencia se requieren en muchas aplicaciones de la ingeniería eléctrica más allá del tema de la estabilidad. Por ejemplo, cuando se trabaja con sistemas de comunicaciones a menudo se deben enfrentar situaciones que exigen la separación de frecuencias (cada una de las estaciones de radio, por mencionar un caso), operación que se lleva a cabo una vez que se cuenta con una comprensión cabal de la respuesta en frecuencia de los circuitos de filtrado. En resumen, sin ninguna dificultad se podrían dedicar varias páginas a elogiar las virtudes del estudio de la respuesta en frecuencia. Sin embargo, se prefiere llevarlo a cabo dentro del tema, comenzando con el efecto eléctrico del concepto de resonancia y culminando con el diseño de circuitos de filtrado básicos que se emplean en aplicaciones cotidianas como los amplificadores de audio.

16.1 RESONANCIA EN PARALELO

¿Por qué el lector se debe interesar en la respuesta de las funciones forzadas senoidales cuando rara vez se encuentran en la práctica? La industria de la energía eléctrica es una excepción, pues la forma de onda senoidal aparece por todas partes, aunque en ocasiones resulta necesario considerar otras frecuencias que introducen la no linealidad de algunos dispositivos. Sin embargo, en casi todos los demás sistemas eléctricos, las funciones forzadas y las respuestas *no* son

senoidales. En cualquier sistema en el que se va a transmitir información, la senoide por sí sola es casi siempre inútil; contiene información limitada debido a que sus valores futuros son exactamente predecibles, a partir de sus valores pasados. Además, una vez completado un periodo, cualquier forma de onda periódica no senoidal tampoco contiene ninguna información adicional.

Suponer que se encuentra que cierta función forzada contiene *componentes* senoidales con frecuencias dentro del intervalo de 10 a 100 Hz. Imaginar ahora que tal función forzada se aplica a una red que incluye la propiedad de que todas las tensiones senoidales con frecuencias desde 0 hasta 200 Hz aplicadas a las terminales de entrada aparecen con su magnitud duplicada en las terminales de salida, sin cambio en el ángulo de fase. Por lo tanto, la función de salida es un facsímil sin distorsión de la función de entrada, pero con el doble de amplitud. No obstante, si la red tiene una respuesta en frecuencia tal que las magnitudes de las senoides de entrada de entre 10 y 50 Hz se multiplican por un factor diferente que aquellas entre 50 y 100 Hz, la salida en general estaría distorsionada; no sería ya una versión amplificada de la entrada. Dicha salida distorsionada podría resultar deseable en algunos casos e indeseable en otros. Es decir, quizás la respuesta en frecuencia de la red se eligiera *deliberadamente* para rechazar algunas componentes de frecuencia de la función forzada, o para acentuar otras.

Un comportamiento de este tipo es característico de los circuitos sintonizados o de los circuitos resonantes, como se verá en este capítulo. Al explicar la resonancia se pueden aplicar todos los métodos aplicados cuando se presentó la respuesta en frecuencia.

Resonancia

En esta sección se comenzará a estudiar un fenómeno muy importante que podría ocurrir en circuitos que contienen inductores y capacitores. El fenómeno recibe el nombre de ***resonancia*** y se describirá de manera aproximada como la condición que existe en todo sistema físico cuando una función forzada senoidal de amplitud fija produce una respuesta de amplitud máxima. Sin embargo, a menudo se habla de la resonancia como si ocurriera, aun cuando la función forzada no sea senoidal. El sistema resonante puede ser eléctrico, mecánico, hidráulico, acústico o de otro tipo, aunque se restringirá la atención, en la mayor parte de los casos, a los sistemas eléctricos.

La resonancia es un fenómeno familiar. Saltar sobre las defensas de un automóvil por ejemplo, puede causar que el vehículo tenga un movimiento oscilatorio muy grande, si los brincos se repiten con la frecuencia apropiada (alrededor de uno por segundo) y si los amortiguadores están un poco viejos. Sin embargo, si la frecuencia de los brincos aumenta o disminuye, la respuesta vibratoria del automóvil será mucho menor que antes. Una ilustración adicional se presenta en el caso de una cantante de ópera que puede romper copas de cristal por medio de una nota perfectamente emitida a la frecuencia adecuada. En cada uno de estos ejemplos se está considerando la frecuencia como si se ajustara hasta que ocurra la resonancia; también se puede ajustar el tamaño, la forma y el material del objeto mecánico que está vibrando, aunque no sea tan fácil de conseguir de manera física.

La condición de resonancia puede ser deseable o indeseable, según el propósito al que va a servir el sistema físico. En el ejemplo del automóvil, una gran amplitud de la vibración quizá ayude a separar las defensas atoradas, aunque sería una acción un poco desagradable a 65 mi/h (105 km/h).

Se verá ahora la resonancia con mayor cuidado. En una red eléctrica de dos terminales que contiene al menos un inductor y un capacitor, se define la resonancia como la condición que existe cuando la impedancia en la entrada de la red es puramente resistiva. Por lo tanto,

Una red está en resonancia (o es resonante) cuando la tensión y la corriente en las terminales de entrada de la red están en fase.

También se descubrirá que se produce una respuesta de amplitud máxima en la red cuando se encuentra en la condición resonante.

En primera instancia se aplicará la definición de resonancia a una red *RLC* en paralelo accionada por una fuente de corriente senoidal, como se indica en la figura 16.1. En muchas situaciones prácticas, el circuito es una muy buena aproximación al que podría construirse en el laboratorio conectando un inductor físico en paralelo con un capacitor físico, donde la combinación en paralelo se acciona mediante una fuente de energía que tiene una impedancia de salida muy alta. La admitancia de estado permanente ofrecida a la fuente de corriente ideal es

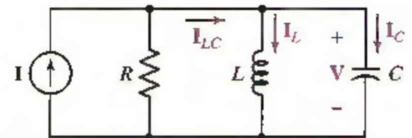


FIGURA 16.1 Combinación en paralelo de una resistencia, un inductor y un capacitor; a menudo se le conoce como *circuito resonante en paralelo.*

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \qquad [1]$$

La resonancia ocurre cuando la tensión y la corriente en las terminales de entrada están en fase, lo cual corresponde a una admitancia puramente real, de modo que la condición necesaria está dada por

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

La condición resonante quizá se consiga ajustando L, C u ω; analizar el caso donde ω es la variable. Por consiguiente, la frecuencia resonante ω_0 está dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{rad/s} \qquad [2]$$

o

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \text{Hz} \qquad [3]$$

Esta frecuencia resonante ω_0 es idéntica a la frecuencia resonante definida en la ecuación [10] del capítulo 9.

La configuración de polos-ceros de la función de admitancia también se usa para obtener una considerable ventaja en este caso. Dada $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$,

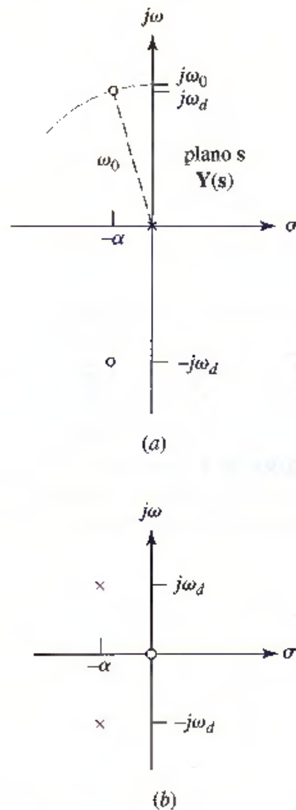
$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathbf{s}L} + \mathbf{s}C$$

o

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = C\frac{\mathbf{s}^2 + \mathbf{s}/RC + 1/LC}{\mathbf{s}} \qquad [4]$$

se podrían exhibir los ceros de $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ factorizando el numerador:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = C\frac{(\mathbf{s} + \alpha - j\omega_d)(\mathbf{s} + \alpha + j\omega_d)}{\mathbf{s}}$$



■ **FIGURA 16.2** (*a*) Constelación de polos-ceros de la admitancia de entrada de un circuito resonante en paralelo se muestra en el plano s; $\omega_0^2 = \alpha^2 + \omega_d^2$. (*b*) Constelación de polos y ceros de la impedancia de entrada.

donde α y ω_d representan las mismas cantidades mencionadas cuando se explicó la respuesta natural del circuito *RLC* en paralelo en la sección 9.4. Esto es, α es el *coeficiente de amortiguamiento exponencial*

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

y ω_d es la pulsación correspondiente a la *frecuencia resonante natural* (no la frecuencia resonante ω_0),

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

La constelación de polos-ceros de la figura 16.2*a* se deduce de manera directa en la forma factorizada.

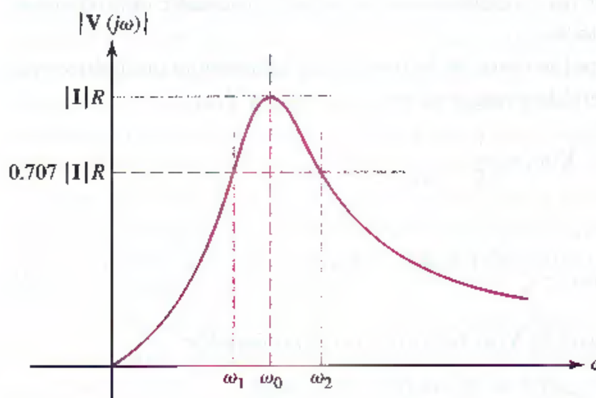
Vista la relación entre α, ω_d y ω_0, resulta patente que la distancia desde el origen del plano s a uno de los ceros de la admitancia es numéricamente igual a ω_0. Por lo tanto, dada la configuración de polos-ceros, la frecuencia resonante se obtendría por medio de métodos puramente gráficos. Sólo se trazará un arco utilizando el origen del plano s como centro, a través de uno de los ceros. La intersección del arco y el eje $j\omega$ positivo localiza el punto $\mathbf{s} = j\omega_0$. Evidentemente ω_0 es un poco mayor que la frecuencia resonante natural ω_d, aunque su proporción tiende a la unidad cuando aumenta la razón entre ω_d y α.

Resonancia y respuesta en tensión

Examinar a continuación la magnitud de la respuesta, la tensión $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ indicada en la figura 16.1, a medida que varía la frecuencia ω de la función forzada. Si se supone una fuente de corriente senoidal de amplitud constante, la respuesta en tensión es proporcional a la impedancia de entrada. La respuesta se obtiene de la gráfica de los polos-ceros de la impedancia:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}/C}{(\mathbf{s} + \alpha - j\omega_d)(\mathbf{s} + \alpha + j\omega_d)}$$

que se muestra en la figura 16.2*b*. La respuesta, desde luego, empieza en cero, alcanza un valor máximo en la cercanía de la frecuencia resonante natural y luego disminuye de nuevo hasta cero, a medida que ω se vuelve infinita. La respuesta en frecuencia se dibuja en la figura 16.3. Su valor máximo se indica como *R* veces la amplitud de la corriente de la fuente, lo que implica que la magnitud



■ **FIGURA 16.3** La magnitud de la respuesta en tensión de un circuito resonante en paralelo se muestra como una función de la frecuencia.

máxima de la impedancia del circuito es igual a R; además, se demuestra que la máxima respuesta ocurre exactamente a la frecuencia resonante correspondiente a la pulsación ω_0. También se identifican dos frecuencias adicionales, correspondientes a ω_1 y ω_2, que se usarán después como una medida del ancho de la curva de respuesta. Se mostrará primero que la magnitud de la impedancia máxima es R y que ocurre en la resonancia.

La admitancia, según especifica la ecuación [1], posee una conductancia constante y una susceptancia con una magnitud mínima (cero) en la resonancia. Por lo tanto, la magnitud de la admitancia mínima ocurre en la resonancia, y es $1/R$. Por consiguiente, la magnitud de la impedancia máxima es R, *la cual ocurre en la resonancia.*

Por lo tanto, en el caso de la frecuencia resonante, la tensión en los extremos del circuito resonante paralelo de la figura 16.1 es simplemente $\mathbf{I}R$, y la corriente de fuente *total* $\mathbf{I}$ fluye por la resistencia. Sin embargo, la corriente también está presente en L y C. En el inductor, $\mathbf{I}_{L,0} = \mathbf{V}_{L,0}/j\omega_0 L = \mathbf{I}R/j\omega_0 L$, y la corriente del capacitor en la resonancia corresponde a $\mathbf{I}_{C,0} = (j\omega_0 C)\mathbf{V}_{C,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I}$. Puesto que $1/\omega_0 C = \omega_0 L$ en la resonancia, se encuentra que,

$$\mathbf{I}_{C,0} = -\mathbf{I}_{L,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I} \qquad [5]$$

y

$$\mathbf{I}_{C,0} + \mathbf{I}_{L,0} = \mathbf{I}_{LC} = 0$$

Por lo tanto, la corriente *neta* que fluye dentro de la combinación LC es cero. El valor máximo de la magnitud de la respuesta y de la frecuencia a la que ésta ocurre no siempre se encuentra con facilidad. En circuitos resonantes menos comunes, tal vez sea necesario expresar la magnitud de la respuesta en forma analítica, casi siempre como la raíz cuadrada de la suma de la parte real al cuadrado y de la parte imaginaria al cuadrado; luego se debe diferenciar esta expresión respecto de la frecuencia, igualar la derivada a cero, despejar la frecuencia de la respuesta máxima y, por último, sustituir esta frecuencia en la expresión de la magnitud para obtener la respuesta de amplitud máxima. Se podría efectuar el procedimiento para este caso simple, sólo como un ejercicio de corroboración; sin embargo, como se ha visto, no es necesario.

Factor de calidad

Debe subrayarse que, a pesar de que la *altura* de la curva de la respuesta de la figura 16.3 depende sólo del valor de R para la excitación de amplitud constante, el ancho de la curva o la inclinación de los lados depende también de los otros dos valores de los elementos. Un poco más adelante se relacionará el "ancho de la curva de respuesta" con una cantidad definida con mayor cuidado, el *ancho de banda,* aunque resulta útil expresar esta relación en términos de un parámetro muy importante, el ***factor de calidad Q***.

Se debe tener mucho cuidado y no confundir el factor de calidad con la carga o potencia reactiva, pues todas ellas se representan mediante la letra Q.

Se encontrará que lo puntiagudo de la curva de respuesta de cualquier circuito resonante está determinado por la cantidad de energía máxima que se puede almacenar en el circuito, en comparación con la energía que se pierde durante un periodo completo de la respuesta. Se define Q como

$$Q = \text{factor de calidad} = 2\pi \frac{\text{energía máxima almacenada}}{\text{energía total perdida por ciclo}} \qquad [6]$$

La constante de proporcionalidad 2π se incluye en la definición para simplificar las expresiones más útiles de Q que se obtendrán ahora. Dado que la energía sólo se almacena en el inductor y en el capacitor, y se pierde únicamente en la resistencia, se puede expresar en términos de la energía instantánea asociada con cada uno de los elementos reactivos y con la potencia promedio P_R disipada en la resistencia:

$$Q = 2\pi \frac{[w_L(t) + w_C(t)]_{\text{máx}}}{P_R T}$$

donde T es el periodo de la frecuencia senoidal en el que se evalúa Q.

Aplicar ahora esta definición en el circuito RLC en paralelo de la figura 16.1 y determinar el valor de Q a la frecuencia resonante. Este valor de Q se denota mediante Q_0. Se elige la función forzada de corriente

$$i(t) = \mathbf{I}_m \cos \omega_0 t$$

y se obtiene la respuesta en tensión correspondiente a la resonancia,

$$v(t) = Ri(t) = R\mathbf{I}_m \cos \omega_0 t$$

En consecuencia, la energía almacenada en el capacitor corresponde a

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C}{2} \cos^2 \omega_0 t$$

La energía instantánea almacenada en el inductor está dada por

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{1}{L}\int v\,dt\right)^2 = \frac{1}{2L}\left[\frac{R\mathbf{I}_m}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t\right]^2$$

por lo que

$$w_L(t) = \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C}{2} \operatorname{sen}^2 \omega_0 t$$

Por lo tanto, la energía total almacenada *instantánea* es constante:

$$w(t) = w_L(t) + w_C(t) = \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C}{2}$$

y este valor constante también debe ser el valor máximo. Para obtener la energía perdida en la resistencia en un periodo, se toma la potencia promedio absorbida por la resistencia (vea la sección 11.2),

$$P_R = \tfrac{1}{2}\mathbf{I}_m^2 R$$

y al multiplicarla por un periodo, se obtiene

$$P_R T = \frac{1}{2 f_0}\mathbf{I}_m^2 R$$

De este modo se encuentra el factor de calidad a la resonancia:

$$Q_0 = 2\pi \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C/2}{\mathbf{I}_m^2 R/2 f_0}$$

o

$$Q_0 = 2\pi f_0 RC = \omega_0 RC \qquad [7]$$

Esta ecuación (así como las expresiones de la ecuación [8]) se cumple sólo para el circuito simple RLC en paralelo de la figura 16.1. Se pueden obtener expresiones equivalentes de Q_0 que en muchas ocasiones resultan bastante útiles mediante la

sustitución simple:

$$Q_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{|X_{C,0}|} = \frac{R}{|X_{L,0}|} \qquad [8]$$

Por lo que se observa que, en el caso de este circuito específico, al disminuir la resistencia *disminuye* Q_0; a medida que la resistencia es menor, es mayor la cantidad de energía que se pierde en el elemento. Causa intriga que al aumentar la capacitancia *aumenta* Q_0, pero si aumenta la inductancia *disminuye* Q_0. Por supuesto, estas aseveraciones se aplican al funcionamiento del circuito a la frecuencia de resonancia.

Otras interpretaciones de Q

La constante adimensional Q_0 es una función de los tres elementos de circuito pertenecientes al circuito resonante paralelo. Sin embargo, el concepto de Q no está limitado a circuitos eléctricos o incluso a sistemas eléctricos; es útil en la descripción de "cualquier fenómeno resonante". Por ejemplo, considerar el rebote de una pelota de golf. Si se supone un peso W y que se libera la pelota desde una altura h_1 sobre una superficie horizontal muy dura (sin pérdida), la pelota rebota hasta una altura menor h_2. La energía que se almacena al inicio es Wh_1 y la que se pierde en un periodo corresponde a $W(h_1 - h_2)$. Por lo tanto, Q_0 es

$$Q_0 = 2\pi\frac{h_1 W}{(h_1 - h_2)W} = \frac{2\pi h_1}{h_1 - h_2}$$

Una pelota de golf perfecta rebotaría hasta su altura original y tendría una Q_0; infinita; un valor más característico es 35. Se requiere advertir que en este ejemplo mecánico Q se calculó a partir de la respuesta natural y no de la respuesta forzada. La Q de un circuito también se determinaría a partir del conocimiento de la respuesta natural, como se ilustra mediante las ecuaciones [10] y [11] en el análisis siguiente.

Otra interpretación útil de Q se obtiene cuando se inspeccionan las corrientes en el inductor y el capacitor a la resonancia, según se expresa en la ecuación [5],

$$\mathbf{I}_{C,0} = -\mathbf{I}_{L,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I} = jQ_0\mathbf{I} \qquad [9]$$

Observar que cada una es Q_0 veces la corriente de la fuente en amplitud y que cada una está 180° fuera de fase respecto de la otra. De tal manera, si se aplican 2 mA a la frecuencia resonante a un circuito resonante en paralelo, con una Q_0 de 50, se tienen 2 mA en la resistencia y 100 mA tanto en el inductor como en el capacitor. Por lo tanto, un circuito resonante en paralelo actúa como un amplificador de corriente, pero no, desde luego, como un amplificador de potencia, dado que es una red pasiva.

Ahora se relacionarán entre sí los demás parámetros que se asocian con el circuito resonante en paralelo. Los tres parámetros: α, ω_d y ω_0 se presentaron mucho antes en conexión con la respuesta natural. La resonancia, por definición, se asocia sobre todo con la respuesta forzada, dado que se define en términos de una impedancia de entrada (puramente resistiva), un concepto del estado senoidal permanente. Los dos parámetros más importantes de un circuito resonante son quizá la frecuencia resonante ω_0 y el factor de calidad Q_0. Tanto el coeficiente de amortiguamiento exponencial como la frecuencia resonante natural se expresan en términos de ω_0 y Q_0:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(Q_0/\omega_0 C)C}$$

o

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} \qquad [10]$$

y

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

o

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \qquad [11]$$

Factor de amortiguamiento

Como referencia futura quizá resulte útil tomar en cuenta una relación adicional que involucre a ω_0 y Q_0. El factor cuadrático que aparece en el numerador de la ecuación [4]:

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}$$

podría escribirse en términos de α y ω_0:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$$

En el campo de la teoría de sistemas o la teoría de control automático, se acostumbra escribir este factor en una forma un poco diferente, que utiliza el parámetro adimensional ζ (dzeta), denominado ***factor de amortiguamiento***:

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

La comparación de ambas expresiones permite relacionar ζ con otros parámetros:

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q_0} \qquad [12]$$

EJEMPLO **16.1**

Calcular los valores numéricos de ω_0, α, ω_d y R en el circuito resonante en paralelo que tiene $L = 2.5$ mH, $Q_0 = 5$ y $C = 0.01$ μF.

De la ecuación 2, se observa que $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 200$ krad/s, mientras que $f_0 = \omega_0/2\pi = 31.8$ kHz.

Se obtendrá rápidamente el valor de α mediante la ecuación [10],

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} = \frac{2 \times 10^5}{(2 \times 5)} = 2 \times 10^4 \text{ Np/s}$$

Ahora se puede recurrir a la vieja amiga del capítulo 9,

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

para encontrar que

$$\omega_d = \sqrt{(2 \times 10^5)^2 - (2 \times 10^4)^2} = 199.0 \text{ krad/s}$$

Por último, es necesario atribuir un valor a la resistencia en paralelo, y la ecuación [7] proporciona la respuesta:

$$Q_0 = \omega_0 RC$$

por lo que

$$R = \frac{Q_0}{\omega_0 C} = \frac{5}{(2 \times 10^5 \times 10^{-8})} = 2.50 \text{ k}\Omega$$

PRÁCTICA

16.1 Un circuito resonante en paralelo está compuesto por los elementos $R = 8$ kΩ, $L = 50$ mH y $C = 80$ nF. Calcular: (*a*) ω_0; (*b*) Q_0; (*c*) ω_d; (*d*) α; (*e*) ζ.

16.2 Determinar los valores de R, L y C en un circuito resonante en paralelo para el cual $\omega_0 = 1\,000$ rad/s, $\omega_d = 998$ rad/s, e $\mathbf{Y}_{\text{ent}} = 1$ mS en la resonancia.

Respuestas: 16.1: 15.811 krad/s; 10.12; 15.792 krad/s; 781 Np/s; 0.0494. 16.2: 1 000 Ω; 126.4 mH; 7.91 μF.

A continuación se interpretará Q_0 en términos de las localizaciones de polos-ceros de la admitancia $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ del circuito *RLC* en paralelo. Se mantendrá ω_0 constante, lo cual se efectuaría cambiando R mientras L y C se mantienen constantes. A medida que Q_0 se incrementa, las relaciones que vinculan α, Q_0 y ω_0 indican que los dos ceros deben acercarse al eje $j\omega$. Tales relaciones indican también que los dos ceros deben acercarse al eje $j\omega$. Tales relaciones indican también que los ceros deben alejarse de manera simultánea del eje σ. La naturaleza exacta del movimiento se aclara cuando se recuerda que el punto en el cual $\mathbf{s} = j\omega_0$ podría ubicarse sobre el eje $j\omega$ recorriendo un arco, centrado en el origen, por uno de los ceros y arriba del eje positivo $j\omega$, puesto que ω_0 debe ser constante, al igual que el radio y los ceros, por lo tanto, deben moverse a lo largo de este arco hacia el eje $j\omega$ positivo, conforme aumenta Q_0.

Los dos ceros se indican en la figura 16.4 y las dos flechas muestran la trayectoria que siguen conforme crece R. Cuando R es infinita, Q_0 también lo es, y los dos ceros se encuentran en $\mathbf{s} = \pm j\omega_0$ sobre el eje $j\omega$. A medida que R se reduce, los ceros se mueven hacia el eje σ a lo largo del lugar geométrico circular, uniéndose para formar un doble cero sobre el eje σ en $\mathbf{s} = -\omega_0$ cuando $R = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ o $Q_0 = \frac{1}{2}$. Esta condición puede recordarse como la de amortiguamiento crítico, por lo que $\omega_d = 0$ y $\alpha = \omega_0$. Los valores inferiores de R y de Q_0 ocasionan que los ceros se separen y se muevan en direcciones opuestas sobre el eje σ negativo, si bien estos valores menores de Q_0 no son en realidad característicos de los circuitos resonantes, por lo que ya no es necesario buscarlos.

Después, se utilizará el criterio $Q_0 \geq 5$ para describir un circuito de alta Q. Cuando $Q_0 = 5$, los ceros se ubican en $\mathbf{s} = -0.1\omega_0 \pm j0.995\omega_0$, y por lo tanto, ω_0 y ω_d difieren sólo por la mitad de 1.

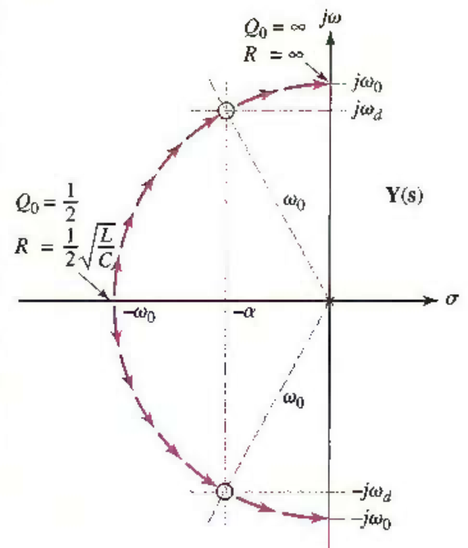


FIGURA 16.4 Los dos ceros de la admitancia $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$, localizada en $\mathbf{s} = -\alpha \pm j\omega_d$, proporcionan un lugar geométrico semicircular, conforme R aumenta desde $\frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ hasta ∞.

16.2 ANCHO DE BANDA Y CIRCUITOS DE ALTO *Q*

Se prosigue con el análisis de la resonancia en paralelo mediante la definición de las frecuencias de media potencia y el ancho de banda; después se hará buen uso de estos nuevos conceptos al obtener datos de la respuesta aproximada para circuitos de alta Q. El "ancho" de la curva de la respuesta en resonancia, como el de la figura 16.3, quizá se defina ahora con mayor cuidado y se relacione con Q_0. En primer lugar se definirán las dos frecuencias de media potencia correspondientes a las pulsaciones ω_1 y ω_2 como las frecuencias a las que la magnitud de la admitancia de entrada de un circuito resonante en paralelo es mayor que la magnitud de la admitancia en resonancia en un factor de $\sqrt{2}$. En razón de que la curva de respuesta de la figura 16.3 presenta las tensiones producidas en el circuito en paralelo por una fuente de corriente senoidal como una función de la frecuencia, las frecuencias de media potencia se localizan también en aquellos puntos en los que la respuesta en tensión es $1/\sqrt{2}$, o 0.707, veces su valor máximo. También se cumple una relación similar para la magnitud de la impedancia. Designar ω_1 como la ***frecuencia inferior de media potencia***, y a ω_2 como la ***frecuencia superior de media potencia***.

Estos nombres surgen del hecho de que una tensión que es $1/\sqrt{2}$ veces la tensión resonante, equivale a la tensión al cuadrado que corresponde a la mitad de la tensión al cuadrado de la resonancia. Así, en el caso de las frecuencias de media potencia, la resistencia absorbe la mitad de la potencia que absorbe en la resonancia.

Ancho de banda

El ***ancho de banda*** (de media potencia) de un circuito resonante se define como la diferencia de estas dos frecuencias de media potencia,

$$\mathcal{B} \equiv \omega_2 - \omega_1 \qquad [13]$$

Se tiende a considerar el ancho de banda como el "ancho" de la curva de respuesta, aun cuando la curva se extiende desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$. De manera más exacta, el ancho de banda de media potencia se mide por esa porción de la curva de respuesta que es igual o mayor que 70.7% del valor máximo, como se muestra en la figura 16.5.

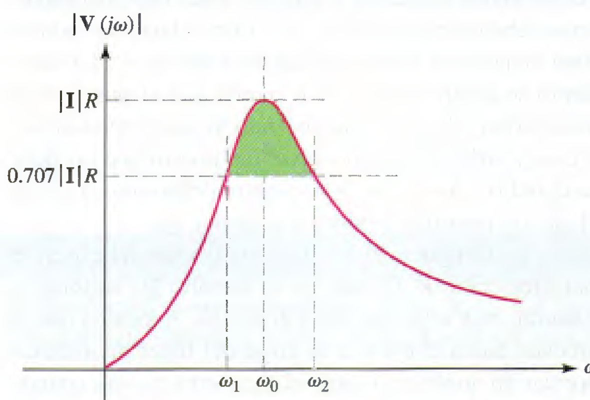


FIGURA 16.5 El ancho de banda de la respuesta del circuito se encuentra resaltada con verde; corresponde a la porción de la curva de respuesta mayor o igual a 70.7% del valor máximo.

Expresar ahora el ancho de banda en términos de Q_0 y de la frecuencia resonante. Para hacerlo, obtener primero la admitancia del circuito *RLC* en paralelo:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

en términos de Q_0:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\frac{1}{R}\left(\frac{\omega\omega_0 CR}{\omega_0} - \frac{\omega_0 R}{\omega\omega_0 L}\right)$$

o

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R}\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \qquad [14]$$

Observar de nuevo que la magnitud de la admitancia en la resonancia es $1/R$, y después de que una magnitud de la admitancia de $\sqrt{2}/R$ puede ocurrir sólo cuando se elige una frecuencia tal que la parte imaginaria de la cantidad entre corchetes tiene una magnitud unitaria. Por lo tanto,

$$Q_0\left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2}\right) = 1 \quad \text{y} \quad Q_0\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = -1$$

Tener presente que $\omega_2 > \omega_0$, mientras que $\omega_1 < \omega_0$.

Al resolver, se tiene

$$\omega_1 = \omega_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} - \frac{1}{2Q_0}\right] \qquad [15]$$

$$\omega_2 = \omega_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} + \frac{1}{2Q_0}\right] \qquad [16]$$

Si bien estas expresiones son difíciles de manejar, su diferencia proporciona una fórmula muy simple para determinar el ancho de banda:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

Las ecuaciones [15] y [16] pueden multiplicarse entre sí para demostrar que ω_0 corresponde exactamente a la media geométrica de las frecuencias de media potencia:

$$\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$$

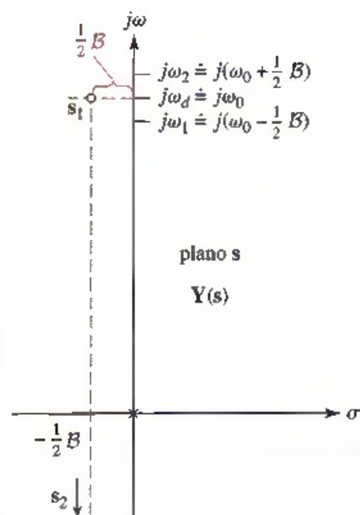
o

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

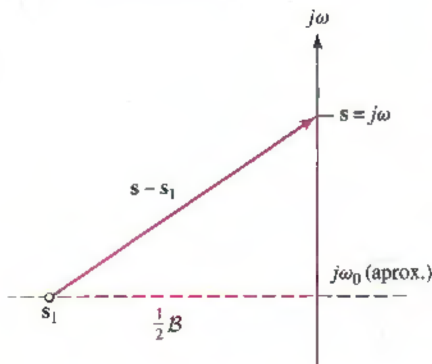
Los circuitos que poseen una Q_0 más alta presentan un ancho de banda más estrecho, o una curva de respuesta más puntiaguda; tiene una ***selectividad de frecuencia*** mayor o una calidad (factor) superior.

Aproximaciones en circuitos de alta Q

Muchos circuitos resonantes se diseñan de manera deliberada para que tengan una Q_0 grande, a fin de aprovechar el ancho de banda y la selectividad de alta frecuencia que se asocia con tales circuitos. Cuando Q_0 es mayor a aproximadamente 5, se pueden efectuar algunas aproximaciones muy útiles en las expresiones de las frecuencias de media potencia, superior e inferior, y en las expresiones generales de la respuesta en la vecindad de la resonancia. Se hará referencia de manera arbitraria a un "circuito de alta Q" como uno en el que Q_0 es igual o mayor que 5. La configuración de polos-ceros de $\mathbf{Y}(s)$ de un circuito



■ **FIGURA 16.6** Constelación de polos-ceros de Y(s) de un circuito *RLC* en paralelo. Los dos ceros están exactamente $\frac{1}{2}\mathcal{B}$ Np/s (o rad/s) hacia la izquierda del eje $j\omega$, y aproximadamente a $j\,\omega_0$ rad/s (or Np/s) del eje σ. Las frecuencias de media potencia superior e inferior están separadas exactamente por $\mathcal{B}$ rad/s, y cada una se ubica a $\frac{1}{2}\mathcal{B}$ rad/s de la frecuencia resonante y de la frecuencia resonante natural.



■ **FIGURA 16.7** Una sección aumentada de la constelación de polos y ceros correspondiente a Y(s) de un circuito Q_0 en paralelo de alta *RLC*.

RLC en paralelo con una Q_0 de casi 5 se muestra en la figura 16.6. Dado que

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

entonces,

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\mathcal{B}$$

y las ubicaciones de los dos ceros $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ se podrían aproximar:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{1,2} &= -\alpha \pm j\omega_d \\ &\approx -\tfrac{1}{2}\mathcal{B} \pm j\omega_0\end{aligned}$$

Además, las ubicaciones de las dos frecuencias de media potencia (sobre el eje $j\omega$ positivo) también se determinarían en una forma aproximada y concisa:

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right] \approx \omega_0\left(1 \mp \frac{1}{2Q_0}\right)$$

o

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \tfrac{1}{2}\mathcal{B} \qquad [17]$$

Por lo tanto, en un circuito de alta Q cada frecuencia de media potencia se ubica aproximadamente a la mitad del ancho de banda a partir de la frecuencia resonante, característica; que se indica en la figura 16.6.

Las relaciones aproximadas de ω_1 y ω_2 en la ecuación [17] podrían ser sumadas entre sí para demostrar que ω_0 es casi igual a la media aritmética de ω_1 y ω_2 en circuitos de alta Q:

$$\omega_0 \approx \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

Imaginar ahora un punto de prueba que está un poco arriba de $j\omega_0$ sobre el eje $j\omega$. Para determinar la admitancia que ofrece la red *RLC* en paralelo a esta frecuencia, se construyen tres vectores a partir de las frecuencias críticas del punto de prueba. Si éste es cercano a $j\omega_0$, entonces el vector desde el polo es casi $j\omega_0$ y aquel desde el cero inferior es casi $j2\omega_0$. Por lo tanto, la admitancia está dada de manera aproximada por

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx C\frac{(j2\omega_0)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1)}{j\omega_0} \approx 2C(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1) \qquad [18]$$

donde C es la capacitancia, como en la ecuación [4]. A fin de determinar una aproximación útil del vector $(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1)$, considerar una vista aumentada de esa porción del plano s en la cercanía del cero $\mathbf{s}_1$ (figura 16.7).

En términos de sus componentes cartesianos, se observa que

$$\mathbf{s}-\mathbf{s}_1 \approx \tfrac{1}{2}\mathcal{B} + j(\omega - \omega_0)$$

donde esta expresión sería exacta si ω_0 se sustituyera por ω_d. Se sustituye ahora esta ecuación en una aproximación de $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$, ecuación [18], y se deja como factor $\frac{1}{2}\mathcal{B}$:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx 2C\left(\frac{1}{2}\mathcal{B}\right)\left(1 + j\frac{\omega-\omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}\right)$$

o

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx \frac{1}{R}\left(1 + j\frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}\right)$$

La fracción $(\omega - \omega_0)/(\frac{1}{2}\mathcal{B})$ puede interpretarse como el "número de mitades del ancho de banda de resonancia" y se abrevia por medio de N. Por lo tanto,

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx \frac{1}{R}(1 + jN) \qquad [19]$$

donde:

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}} \qquad [20]$$

En la frecuencia superior de media potencia, $\omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2}\mathcal{B}$, $N = +1$, y su localización es a medio ancho de banda por encima de la resonancia. En el caso de la frecuencia inferior de media potencia, $\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2}\mathcal{B}$, de manera que $N = -1$, ubicándola a la mitad de un ancho de banda por debajo de la resonancia.

La ecuación [19] es mucho más fácil de usar que las relaciones exactas que se han conformado hasta ahora. Demostrar que la magnitud de la admitancia es

$$|\mathbf{Y}(j\omega)| \approx \frac{1}{R}\sqrt{1 + N^2}$$

mientras que el ángulo de $\mathbf{Y}(j\omega)$ está dado por la tangente inversa de N:

$$\text{ang } \mathbf{Y}(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$

EJEMPLO 16.2

Determinar el valor aproximado de la admitancia de una red RLC en paralelo para la que $R = 40$ kΩ, $L = 1$ H y $C = \frac{1}{64}$ μF si la frecuencia de operación es de $\omega = 8.2$ krad/s.

Identificar el objetivo del problema.

Se solicita determinar el valor aproximado de $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ a $\omega = 8.2$ krad/s para una red RLC simple. Lo anterior implica que Q_0 debe ser al menos 5 y la frecuencia de operación no está lejos de la de resonancia.

Recopilar la información conocida.

Se proporcionan los valores de R, L y C así como la frecuencia a la cual se debe evaluar $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$, lo cual es suficiente para calcular la admitancia utilizando expresiones exactas o aproximadas.

Elaborar un plan.

Para emplear la expresión aproximada de la admitancia, se debe determinar primero Q_0, el factor de calidad en la resonancia, así como el ancho de banda.

La frecuencia resonante ω_0 está dada por la ecuación [2] como $1/\sqrt{LC} = 8$ krad/s. Por lo tanto, $Q_0 = \omega_0 RC = 5$, y el ancho de banda es $\omega_0/Q_0 = 1.6$ krad/s. El valor de Q_0 de este circuito es suficiente para emplear aproximaciones de "alta Q".

(Continúa en la siguiente página)

Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.

La ecuación [19] establece que

$$\mathbf{Y}(s) \approx \frac{1}{R}(1 + jN)$$

por lo que

$$|\mathbf{Y}(j\omega)| \approx \frac{1}{R}\sqrt{1 + N^2} \qquad \text{y} \qquad \text{ang}\,\mathbf{Y}(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$

Determinar si se requiere información adicional.

Aún es necesario N, la cual indica el número de mitades de ancho de banda al que ω se encuentra de la frecuencia resonante ω_0:

$$N = (8.2 - 8)/0.8 = 0.25$$

Buscar la solución.

En esta etapa ya se está listo para emplear las relaciones aproximadas de la magnitud y el ángulo de la admitancia de la red,

$$\text{ang}\,\mathbf{Y} \approx \tan^{-1} 0.25 = 14.04°$$

y

$$|\mathbf{Y}| \approx 25\sqrt{1 + (0.25)^2} = 25.77\ \mu\text{S}$$

Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?

El cálculo exacto de la admitancia mediante la ecuación [1] demuestra que

$$\mathbf{Y}(j8200) = 25.75\underline{/13.87°}\ \mu\text{S}$$

Por lo tanto, el método aproximado origina valores de la magnitud y el ángulo de la admitancia que son razonablemente exactos (mejor que 2%) de esta frecuencia.

PRÁCTICA

16.3 Un circuito resonante en paralelo con una Q marginalmente alta tiene $f_0 = 440\,\text{Hz}$ con $Q_0 = 6$. Aplicar las ecuaciones [15] y [16] para obtener valores exactos correspondientes a: (*a*) f_1; (*b*) f_2. Utilizar luego la ecuación [17] para calcular valores aproximados de: (*c*) f_1; (*d*) f_2.

Respuestas: 404.9 Hz; 478.2 Hz; 403.3 Hz; 476.7 Hz.

El objetivo es utilizar estas aproximaciones en circuitos de alta Q cerca de la resonancia. Se ha acordado que permitir una "alta Q" implica que $Q_0 \geq 5$, pero ¿qué tan cerca es "cerca"? Se demuestra que el error en magnitud o en fase es menor que 5 por ciento si $Q_0 \geq 5$ y $0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0$. Aunque esta banda estrecha de frecuencias quizá parezca prohibitivamente pequeña, suele ser más que suficiente para contener el intervalo de frecuencias que más interesa. Por ejemplo, el radio de AM contiene por lo general un circuito sintonizado a una frecuencia resonante de 455 kHz, con un ancho de banda de media potencia de 10 kHz. Este circuito debe tener entonces un valor de 45.5 para Q_0, de modo que las frecuencias de media potencia estén alrededor de 450 y 460 kHz. Sin embargo,

estas aproximaciones son válidas desde 409.5 hasta 505.5 kHz (con errores menores a 5%), lo cual es un intervalo que cubre en esencia toda la porción máxima de la curva de respuesta; sólo en las "colas" remotas de la curva de respuesta las aproximaciones provocan errores irrazonablemente grandes.[1]

Se termina la cobertura del circuito resonante *paralelo* revisando algunas de las conclusiones clave a las que se han llegado:

- La frecuencia resonante ω_0 es la frecuencia a la que la parte imaginaria de la admitancia de entrada se convierte en cero, o el ángulo de la admitancia se hace cero. En este circuito, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- La cifra de mérito Q_0 del circuito se define como 2π veces la razón entre la energía máxima almacenada en el circuito y la energía que se pierde en cada periodo en el circuito. En este circuito, $Q_0 = \omega_0 RC$.
- Las dos frecuencias de media potencia, ω_1 y ω_2, se definen como las frecuencias a las que la magnitud de la admitancia es $\sqrt{2}$ veces la magnitud de la admitancia mínima. (También son las frecuencias a las cuales la respuesta en tensión es 70.7% de la respuesta máxima.)
- Las expresiones exactas de ω_1 y ω_2 son,

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$$

- Las expresiones exacta y aproximada (para alta Q_0) que corresponden a estas dos frecuencias son

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

- El ancho de banda de media potencia $\mathcal{B}$ está dado por

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

- La admitancia de entrada también puede expresarse en forma aproximada en circuitos con alta Q como:

$$\mathbf{Y} \approx \frac{1}{R}(1 + jN) = \frac{1}{R}\sqrt{1 + N^2}\underline{/\tan^{-1} N}$$

donde N se define como el número de mitades de ancho de banda fuera de la resonancia, o

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}$$

Esta aproximación es válida para $0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0$.

16.3 RESONANCIA EN SERIE

Aunque quizá se observe un menor uso del circuito *RLC* en serie, del que ocurre en el caso del *RLC* en paralelo, el primero sigue mereciendo que se le ponga atención. Considerar el circuito de la figura 16.8. Debe observar que en este caso a los

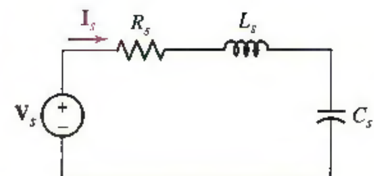


FIGURA 16.8 Circuito resonante en serie.

(1) A frecuencias alejadas de la resonancia, en muchas ocasiones se está satisfecho con resultados muy aproximados; una precisión mayor no siempre es necesaria.

diversos elementos de circuito se les asigna el subíndice s (de serie), para evitar confusión con los elementos en paralelo, cuando los circuitos se comparen.

El análisis de la resonancia en paralelo ocupó dos secciones de amplitud considerable. Es posible darle ahora al circuito *RLC* en serie el mismo tipo de tratamiento, pero resulta más inteligente omitir tal repetición innecesaria y utilizar el concepto de dualidad. Por simplicidad, el enfoque se concentrará en las conclusiones que se presentan en el último párrafo de la sección anterior acerca de la resonancia en paralelo. Los resultados importantes están contenidos ahí y el uso del lenguaje dual permite transcribir este párrafo para presentar los resultados importantes correspondientes al circuito *RLC* en serie.

De nuevo, este párrafo es el mismo que el último de la sección 16.2, pero con la frase *RLC* en paralelo convertida en *RLC* en serie gracias a la dualidad (de ahí las comillas).

"Se concluye el estudio del circuito resonante en *serie* resumiendo las distintas conclusiones clave a las que se ha llegado:

- La frecuencia resonante ω_0 es aquella a la que la parte imaginaria de la impedancia de entrada se vuelve cero, o en la que el ángulo de la impedancia se hace cero. En este circuito, $\omega_0 = 1/\sqrt{C_s L_s}$.
- La cifra de mérito del circuito Q_0 se define como 2π veces la proporción entre la entrega máxima almacenada en el circuito y la energía que se pierde en cada periodo en el circuito. En este circuito, $Q_0 = \omega_0 L_S / R_S$.
- Se definen las dos frecuencias de media potencia, ω_1 y ω_2, como las frecuencias a las cuales la magnitud de la impedancia es $\sqrt{2}$ veces la magnitud de la impedancia mínima. (Éstas son también las frecuencias a las que la respuesta en corriente es 70.7% de la respuesta máxima.)
- Las expresiones exactas de ω_1 y ω_2 son:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$$

- Las expresiones aproximadas (alta Q_0) de ω_1 y ω_2 son,

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

- El ancho de banda de media potencia $\mathcal{B}$ está dado por

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

- La impedancia de entrada de circuitos con alta Q también puede expresarse en forma aproximada como

$$\mathbf{Y} \approx \frac{1}{R}(1 + jN) = \frac{1}{R}\sqrt{1 + N^2}\underline{/\tan^{-1} N}$$

donde N se define como el número de mitades de ancho de banda fuera de resonancia, o

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}$$

Esta aproximación es válida para $0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0$."

A partir de este punto ya no se identificarán los circuitos resonantes en serie mediante el uso del subíndice s, a menos que se requiera para efectos de mayor claridad.

EJEMPLO 16.3

La tensión $v_s = 100 \cos \omega t$ mV se aplica a un circuito resonante en serie compuesto por una resistencia de 10 Ω una capacitancia de 200 nF y una inductancia de 2 mH. Utilizar los métodos tanto exacto como aproximado para calcular la amplitud de corriente, si $\omega = 48$ krad/s.

La frecuencia resonante del circuito está dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2 \times 10^{-3})(200 \times 10^{-9})}} = 50 \text{ krad/s}$$

Dado que se opera a $\omega = 48$ krad/s, wla cual está dentro del 10% de la frecuencia resonante, resulta razonable aplicar las relaciones aproximadas para estimar la impedancia equivalente de la red, siempre y cuando se sepa que se trabaja con un circuito de alta Q:

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} \approx R\sqrt{1 + N^2}\,\underline{/\tan^{-1} N}$$

donde N se calcula una vez que se determina Q_0. Es un circuito en serie, por lo que

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(50 \times 10^3)(2 \times 10^{-3})}{10} = 10$$

hace que sea un circuito de alta Q. Por lo tanto,

$$B = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{50 \times 10^3}{10} = 5 \text{ krad/s}$$

Por lo tanto, el número de mitades de ancho de banda (N) fuera de la resonancia es

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{B/2} = \frac{48 - 50}{2.5} = -0.8$$

Por ende,

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} \approx R\sqrt{1 + N^2}\,\underline{/\tan^{-1} N} = 12.81\underline{/-38.66^\circ}\ \Omega$$

Por lo tanto, la magnitud de la corriente aproximada es

$$\frac{|\mathbf{V}_s|}{|\mathbf{Z}_{\text{eq}}|} = \frac{100}{12.81} = 7.806 \text{ mA}$$

Utilizando las expresiones exactas, se observa que $\mathbf{I} = 7.746\underline{/39.24^\circ}$ mA y, por ende,

$$|\mathbf{I}| = 7.746 \text{ mA}.$$

PRÁCTICA

16.4 Un circuito resonante en serie de un ancho de banda de 100 Hz contiene una inductancia de 20 mH y una capacitancia de 2 μF. Determinar: (*a*) f_0; (*b*) Q_0; (*c*) $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$ en la resonancia; (*d*) f_2.

Respuestas: 796 Hz; 7.96; 12.57 + j0 Ω; 846 Hz (aproximadamente).

El circuito resonante en serie se caracteriza por una impedancia mínima en la resonancia, en tanto que el resonante en paralelo produce una impedancia resonante máxima. El último circuito proporciona corrientes de inductor y de capacitor en la resonancia que tienen amplitudes Q_0 veces mayores que la corriente de la fuente; el circuito resonante en serie proporciona tensiones en el inductor y en el capacitor que son mayores que la tensión en la fuente por el factor Q_{0s}. El circuito en serie debe proporcionar entonces una amplificación de tensión en la resonancia.

Una comparación de los resultados que se obtuvieron para la resonancia en serie y la resonancia en paralelo, así como las expresiones exactas y aproximadas que se desarrollaron, aparecen en la tabla 16.1.

TABLA 16.1 Breve resumen de la resonancia

I, $\mathbf{I}_L$, $\mathbf{I}_C$, $\mathbf{Y}_p$, R, L, C | R, L, + $\mathbf{V}_L$ −, + $\mathbf{V}_C$ −, C, $\mathbf{Z}_s$, V

$Q_0 = \omega_0 RC \qquad \alpha = \dfrac{1}{2RC}$ | $Q_0 = \dfrac{\omega_0 L}{R} \qquad \alpha = \dfrac{R}{2L}$

$|\mathbf{I}_L(j\omega_0)| = |\mathbf{I}_C(j\omega_0)| = Q_0|\mathbf{I}(j\omega_0)|$ | $|\mathbf{V}_L(j\omega_0)| = |\mathbf{V}_C(j\omega_0)| = Q_0|\mathbf{V}(j\omega_0)|$

$\mathbf{Y}_p = \dfrac{1}{R}\left[1 + jQ_0\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$ | $\mathbf{Z}_s = R\left[1 + jQ_0\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$

Expresiones exactas

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2}$$

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right]$$

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}$$

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2\alpha$$

Expresiones aproximadas

$$(Q_0 \geq 5 \qquad 0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0)$$

$$\omega_d \approx \omega_0$$

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \tfrac{1}{2}\mathcal{B}$$

$$\omega_0 \approx \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\mathbf{Y}_p \approx \frac{\sqrt{1 + N^2}}{R}\underline{/\tan^{-1} N}$$

$$\mathbf{Z}_s \approx R\sqrt{1 + N^2}\underline{/\tan^{-1} N}$$

16.4 OTRAS FORMAS RESONANTES

Los circuitos *RLC* en paralelo y en serie de las dos secciones anteriores representan circuitos resonantes *idealizados*; no son más que representaciones útiles y *aproximadas* de un circuito físico que podría construirse combinando una bobina de alambre, una resistencia de carbón y un capacitor de tantalio en paralelo o en serie. El grado de exactitud que el modelo idealizado logre respecto del circuito *real* depende del intervalo de la frecuencia de operación, la Q del circuito, los materiales presentes en los elementos físicos, los tamaños de los elementos y muchos otros factores. No se está estudiando la técnica para determinar el modelo de un circuito físico particular, pues esto requiere cierto conocimiento de la teoría del campo electromagnético y de las propiedades de los materiales; sin embargo, es de interés el problema de reducir un modelo más complicado a uno de los dos modelos más simples con los que se está familiarizado.

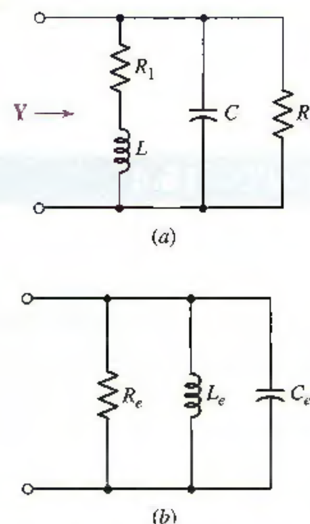


FIGURA 16.9 (*a*) Modelo útil de una red física que consta de un inductor, un capacitor y una resistencia presentes físicamente en paralelo. (*b*) Red que puede equivaler a la parte (*a*) en una banda estrecha de frecuencias.

La red de la figura 16.9*a* constituye un modelo razonablemente exacto de la combinación en paralelo, físicamente hablando, de un inductor, un capacitor y una resistencia. La resistencia marcada como R_1 es hipotética y se incluye para tomar en cuenta las pérdidas óhmicas del núcleo y las pérdidas por radiación de la bobina. Las pérdidas en el dieléctrico dentro del capacitor, así como la resistencia del circuito *RLC* particular, se toman en cuenta mediante la resistencia denominada R_2. En este modelo, *no hay forma* de combinar elementos y reproducir un modelo más simple equivalente al modelo original de *todas las frecuencias*. Sin embargo, se demostrará que se puede construir un equivalente más simple válido sobre una banda de frecuencias que suele ser lo suficientemente grande como para incluir todas las frecuencias de interés. El equivalente tomará la forma de la red que se muestra en la figura 16.9*b*.



Antes de aprender cómo crear tal circuito equivalente, considerar primero el circuito que se muestra en la figura 16.9*a*. La frecuencia resonante en radianes de esta red *no* es $1/\sqrt{LC}$, aunque si R_1 es lo suficientemente pequeña podría aproximarse mucho a este valor. La definición de resonancia permanece invariable, y se podría determinar la frecuencia resonante igualando a cero la parte imaginaria de la admitancia de entrada:

$$\text{Im}\{\mathbf{Y}(j\omega)\} = \text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\right\} = 0$$

o

$$\text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\frac{R_1 - j\omega L}{R_1 - j\omega L}\right\}$$

$$= \text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right\} = 0$$

De tal manera, por la condición de resonancia

$$C = \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}$$

y, por ende,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{L}\right)^2} \qquad [21]$$

Se observa que ω_0 es menor que $1/\sqrt{LC}$, si bien quizá los valores suficientemente pequeños de la proporción R_1/L produzcan una diferencia despreciable entre ω_0 y $1/\sqrt{LC}$.

La magnitud máxima de la impedancia de entrada también merece considerarse. No es R_2, y tampoco ocurre en ω_0 (o en $\omega = 1/\sqrt{LC}$). La prueba de estas afirmaciones no se demostrará, debido a que las expresiones se vuelven de inmediato problemáticas desde la perspectiva algebraica; la teoría, sin embargo, es clara. Con un ejemplo numérico se estará satisfecho.

EJEMPLO 16.4

Utilizando los valores $R_1 = 2\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 125$ mF y $R_2 = 3\ \Omega$ en la figura 16.9*a*, determinar la frecuencia resonante y la impedancia en la resonancia.

Sustituyendo los valores apropiados en la ecuación [21], se observa que,

$$\omega_0 = \sqrt{8 - 2^2} = 2 \text{ rad/s}$$

lo cual permite calcular la admitancia de entrada en la resonancia:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{3} + j2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2 + j(2)(1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 0.583 \text{ S}$$

y luego la impedancia de entrada en la resonancia:

$$\mathbf{Z}(j2) = \frac{1}{0.583} = 1.714\ \Omega$$

A la frecuencia que correspondería la frecuencia resonante, si R_1 fuera cero,

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.83 \text{ rad/s}$$

la impedancia de entrada sería

$$\mathbf{Z}(j2.83) = 1.947\underline{/-13.26^\circ}\ \Omega$$

Sin embargo, como puede observarse en la figura 16.10, la frecuencia a la que ocurre la magnitud *máxima* de la impedancia, indicada por ω_m, se determina que es $\omega_m = 3.26$ rad/s, y la magnitud *máxima* de la impedancia es

$$\mathbf{Z}(j3.26) = 1.980\underline{/-21.4^\circ}\ \Omega$$

La magnitud de la impedancia a la resonancia y a la magnitud máxima difiere en casi 16%. Si bien es cierto que un error de este tipo puede ignorarse a veces en la práctica, resulta demasiado grande como para ignorarlo en un examen. En la última parte de esta sección se mostrará que la Q de la combinación inductor-resistencia a 2 rad/s es la unidad; este valor bajo explica la discrepancia de 16%.

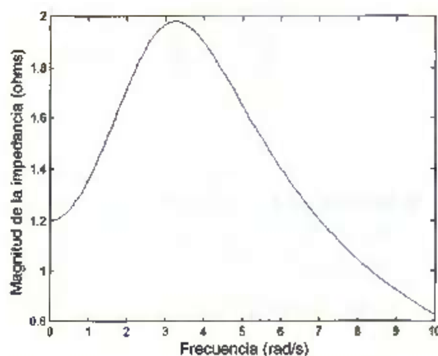


FIGURA 16.10 Gráfica de |Z| en función de ω, generada mediante la siguiente serie de instrucciones de MATLAB:

```
EDU» omega = linspace(0,10,100);
EDU» for i = 1:100
Y(i) = 1/3 + j*omega(i)/8 + 1/(2 + j*omega(i));
Z(i) = 1/Y(i);
end
EDU» plot(omega,abs(Z));
EDU» xlabel('frequency (rad/s)');
EDU» ylabel('impedance magnitude (ohms)');
```

PRÁCTICA

16.5 Con referencia al circuito de la figura 16.9*a*, sea $R_1 = 1$ kΩ y $C = 2.533$ pF. Determinar la inductancia necesaria para seleccionar una frecuencia resonante de 1 MHz. (*Sugerencia:* recuerde que $\omega = 2\pi f$.)

Respuesta: 10 mH.

Combinaciones equivalentes en serie y en paralelo

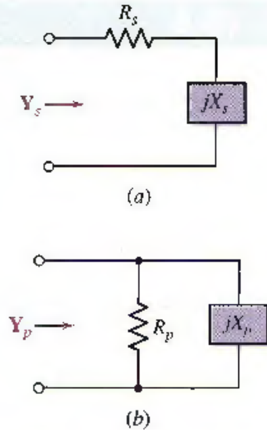


FIGURA 16.11 (*a*) Red en serie que consta de una resistencia R_S y una reactancia inductiva o capacitiva X_S que se podría transformar en (*b*) una red en paralelo tal que $\mathbf{Y}_S = \mathbf{Y}_P$ a una frecuencia específica. La transformación inversa también es posible.

Para transformar el circuito dado en la figura 16.9*a* en uno equivalente en la forma que se indica en la figura 16.9*b*, se debe analizar la Q de una combinación simple en serie o en paralelo de una resistencia y un reactor (inductor o capacitor). Se considera en primera instancia el circuito en serie de la figura 16.11*a*. La Q de esta red se define de nuevo como 2π veces la proporción de la máxima energía almacenada y la energía que se pierde en cada periodo, aunque la Q se podría evaluar a cualquier frecuencia que se elija. En otras palabras, Q es una función de ω. Es cierto que se elegirá evaluarla a la frecuencia que tiene, o aparentemente tiene, la frecuencia resonante de alguna red de la cual forma parte la rama en serie. Esta frecuencia, sin embargo, no se conoce hasta que se dispone de un circuito más completo. Se sugiere al lector demostrar que la Q de esta rama en serie es $|X_s|/R_s$, en tanto que la Q de la red en paralelo de la figura 16.11*b* es $R_p/|X_p|$.

Se llevarán a cabo los detalles necesarios para determinar los valores de R_p y X_p de modo que la red en paralelo de la figura 16.11*b* sea equivalente a la red en serie de la figura 16.11*a* a cierta frecuencia específica simple. Se iguala $\mathbf{Y}_s$ y $\mathbf{Y}_p$,

$$\mathbf{Y}_s = \frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

$$= \mathbf{Y}_p = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{X_p}$$

y se obtiene

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s}$$

$$X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

Al dividir estas dos expresiones, se obtiene

$$\frac{R_p}{X_p} = \frac{X_s}{R_s}$$

Se concluye que las Q de las redes en serie y en paralelo deben ser iguales:

$$Q_p = Q_s = Q$$

Por lo tanto, las ecuaciones de transformación pueden simplificarse:

$$R_p = R_s(1 + Q^2) \quad [22]$$

$$X_p = X_s\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) \quad [23]$$

R_s y X_s también se pueden encontrar si R_p y X_p son los valores dados; se efectúa la transformación en cualquier dirección.

Si $Q \geq 5$ se introduce un pequeño error al utilizar las relaciones aproximadas

$$R_p \approx Q^2 R_s \quad [24]$$

$$X_p \approx X_s \qquad (C_p \approx C_s \quad \text{o} \quad L_p \approx L_s) \quad [25]$$

EJEMPLO 16.5

Determinar el equivalente en paralelo de la combinación en serie de un inductor de 100 mH y una resistencia de 5 Ω a una frecuencia de 1 000 rad/s. No se cuenta con los detalles de la red a la cual se conecta esta combinación en serie.

En $\omega = 1000$ rad/s, $X_s = 1000(100 \times 10^{-3}) = 100\ \Omega$. La Q de esta combinación en serie se determinará mediante

$$Q = \frac{X_s}{R_s} = \frac{100}{5} = 20$$

Dado que Q es suficientemente alta (20 es mucho mayor que 5), se utilizan las ecuaciones [24] y [25] para obtener

$$R_p \approx Q^2 R_s = 2\,000\ \Omega \qquad \text{y} \qquad L_p \approx L_s = 100\text{ mH}$$

La afirmación aquí consiste en que un inductor de 100 mH, en serie con una resistencia de 5 Ω proporciona *esencialmente la misma* impedancia de entrada que un inductor de 100 mH en paralelo con una resistencia de 2 000 Ω a la frecuencia de 1 000 rad/s.

Para verificar la exactitud de la equivalencia, evaluar la impedancia de entrada de cada red a 1 000 rad/s. Se encuentra que

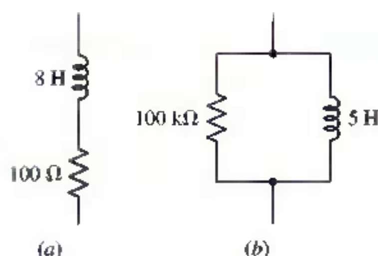
$$\mathbf{Z}_s(j1000) = 5 + j100 = 100.1\underline{/87.1^\circ}\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_p(j1000) = \frac{2000(j100)}{2000 + j100} = 99.9\underline{/87.1^\circ}\ \Omega$$

y se concluye que la exactitud de la aproximación a la frecuencia de transformación es bastante impresionante. La exactitud a 900 rad/s también resulta razonablemente buena, debido a que

$$\mathbf{Z}_s(j900) = 90.1\underline{/86.8^\circ}\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_p(j900) = 89.9\underline{/87.4^\circ}\ \Omega$$



■ **FIGURA 16.12** (*a*) Red en serie para la que se necesita una red equivalente en paralelo (en $\omega = 1000$ rad/s). (*b*) Red en paralelo para la que se necesita una red equivalente en serie (en $\omega = 1000$ rad/s).

PRÁCTICA

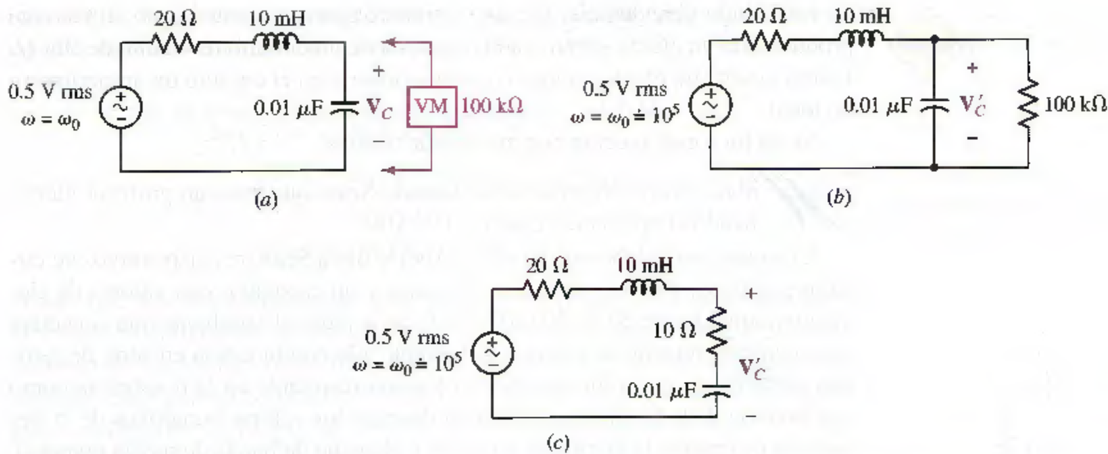
16.6 A $\omega = 1\,000$ rad/s, proporcionar una red en paralelo equivalente a la combinación en serie de la figura 16.12*a*.

16.7 Encontrar un equivalente en serie de la red en paralelo que se muestra en la figura 16.12*b*, suponiendo que $\omega = 1\,000$ rad/s.

Respuesta: 16.6: 8 H, 640 kΩ; 16.7: 5 H, 250 Ω.

Como un ejemplo adicional de la sustitución de un circuito resonante más complicado por un circuito *RLC* equivalente en serie o en paralelo, considerar un problema de instrumentación electrónica. La red *RLC* simple en serie de la figura 16.13*a* se excita mediante una fuente de tensión senoidal a la frecuencia resonante de la red. El valor eficaz (rms) de la tensión de la fuente es igual a 0.5 V; además, se desea medir el valor eficaz de la tensión en el capacitor, con un voltímetro electrónico (VE) que tenga una resistencia interna de 100 000 Ω. Esto es, una representación equivalente de voltímetro dada por un voltímetro ideal en paralelo, con una resistencia de 100 kΩ.

Un medidor "ideal" es un instrumento que mide una cantidad particular sin perturbar el circuito que se prueba. Aunque esto es imposible, los instrumentos modernos se acercan mucho a ser ideales en este sentido.



■ **FIGURA 16.13** (*a*) Circuito resonante en serie en el que la tensión en el capacitor se va a medir mediante un voltímetro electrónico no ideal. (*b*) El efecto del voltímetro se incluye en el circuito; éste registra V_C'. (*c*) Se obtiene un circuito resonante en serie cuando la red *RC* en paralelo de la parte (*b*) se sustituye por la red *RC* en serie, que equivale a 10^5 rad/s.

Antes de que el voltímetro se conecte, se calcula que la frecuencia resonante sea de 10^5 rad/s, $Q_0 = 50$, la corriente de 25 mA y la tensión rms (o eficaz) en el capacitor de 25 V. (Como se indicó al final de la sección 16.3, esta tensión es Q_0 veces la aplicada.) De tal manera, si el voltímetro fuera ideal, leería 25 V al conectarse a los extremos del capacitor.

Sin embargo, cuando se conecta el voltímetro real, se produce el circuito de la figura 16.13*b*. Para obtener un circuito *RLC* en serie, se requiere en este caso sustituir la red *RC* en paralelo por una *RC* en serie. Suponga que la Q de esta red es lo suficientemente alta, de modo que el capacitor equivalente en serie será el mismo que el capacitor dado en paralelo. Se lleva a cabo lo anterior para aproximar la frecuencia resonante del circuito final *RLC* en serie. Por lo tanto, si el circuito *RLC* en serie contiene también un capacitor de 0.01 μF la frecuencia resonante permanece en 10^5 rad/s. Es necesario conocer esta frecuencia resonante estimada, a fin de calcular la Q de la red *RC* en paralelo, la cual es,

$$Q = \frac{R_p}{|X_p|} = \omega R_p C_p = 10^5(10^5)(10^{-8}) = 100$$

Dado que este valor es mayor que 5, se justifica el círculo vicioso de supuestos que se hicieron, por lo que la red equivalente *RC* en serie consiste en el capacitor $C_s = 0.01\ \mu$F y la resistencia:

$$R_s \approx \frac{R_p}{Q^2} = 10\ \Omega$$

De esta forma, se obtiene el circuito equivalente de la figura 16.13*c*. La Q resonante del circuito es, en este caso, sólo de 33.3 y, por lo tanto, la tensión en el capacitor del circuito de la figura 16.13*c* es $16\frac{2}{3}$ V. No obstante, se debe determinar $|\mathbf{V}_C'|$, la tensión en la combinación *RC* en serie, que es

$$|\mathbf{V}_C'| = \frac{0.5}{30}|10 - j1000| = 16.67\ \text{V}$$

La tensión en el capacitor y $|\mathbf{V}_C'|$ son esencialmente iguales, pues la tensión en la resistencia de 10 Ω es demasiado pequeña.

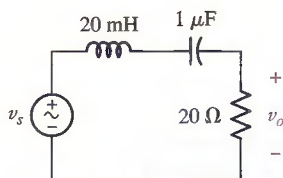


La conclusión final debe ser que un voltímetro aparentemente bueno tal vez siga produciendo un efecto severo en la respuesta de un circuito resonante de alta Q. Podría ocurrir un efecto similar cuando se inserte en el circuito un amperímetro no ideal.

Se da fin a esta sección con una fábula técnica.

Había una vez un estudiante llamado Sean, que tenía un profesor identificado simplemente como el Dr. Abel.

Una tarde, en el laboratorio, el Dr. Abel le dio a Sean tres dispositivos de circuito prácticos: una resistencia, un inductor y un capacitor, con valores de elemento nominales de 20 Ω, 20 mH y 1 μF. Se le pidió al estudiante que conectara una fuente de tensión de frecuencia variable a la combinación en serie de estos tres elementos, con el fin de medir la tensión resultante en la resistencia como una función de la frecuencia y calcular después los valores numéricos de la frecuencia resonante, la Q en la resonancia y el ancho de banda de media potencia. También se le pidió predecir los resultados del experimento antes de efectuar las mediciones.



■ **FIGURA 16.14** Primer modelo de un inductor de 20 mH, un capacitor de 1 μF y una resistencia de 20 Ω en serie con un generador de tensión.

Sean, cuyo proceso mental suele ser claro, a veces se ve abrumado por la ansiedad del análisis de circuitos. Dibujó un circuito equivalente para este problema que se asemejaba al de la figura 16.14, y luego calculó:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = 1125 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = 7.07$$

$$\mathcal{B} = \frac{f_0}{Q_0} = 159 \text{ Hz}$$

Luego, Sean efectuó las mediciones que el Dr. Abel le había pedido, las comparó con los valores predichos y sintió una intensa urgencia por cambiarse a una carrera administrativa. Los resultados fueron:

$$f_0 = 1\,000 \text{ Hz} \qquad Q_0 = 0.625 \qquad \mathcal{B} = 1\,600 \text{ Hz}$$

Sean sabía que las discrepancias de esta magnitud no podían considerarse como "dentro de la precisión de la ingeniería" o "debido a errores del medidor". Desafortunadamente, entregó sus resultados al profesor.

Recordando muchos errores de juicio pasados, algunos de los cuales se debieron (quizás) a él mismo, el doctor Abel sonrió de manera benevolente y llamó la atención a Sean en cuanto al medidor Q (o puente de impedancia) que está presente en la mayor parte de los laboratorios bien equipados; le sugirió que podría utilizarse para averiguar cómo se comportan en la realidad estos elementos de circuitos prácticos a cierta frecuencia conveniente próxima a la resonancia: a 1 000 Hz, por ejemplo.

Al hacerlo de esta manera, Sean descubrió que la resistencia tenía un valor medido de 18 Ω y el inductor de 21.4 mH con una Q de 1.2, en tanto que la capacitancia del capacitor era de 1.41 μF y a un factor de disipación (el recíproco de Q) igual a 0.123.

Así, con la esperanza que brota eternamente en el corazón de todo estudiante de ingeniería, Sean razonó que un mejor modelo del inductor práctico correspondería a 21.4 mH en serie con $\omega L/Q = 112$ Ω, mientras que un modelo más apropiado del capacitor sería de 1.41 μF en serie con $1/\omega CQ = 13.9$ Ω. Con

estos datos, Sean elaboró el modelo de circuito modificado de la figura 16.15 y calculó un nuevo conjunto de valores predichos:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{21.4 \times 10^{-3} \times 1.41 \times 10^{-6}}} = 916 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi \times 916 \times 21.4 \times 10^{-3}}{143.9} = 0.856$$

$$\mathcal{B} = 916/0.856 = 1070 \text{ Hz}$$

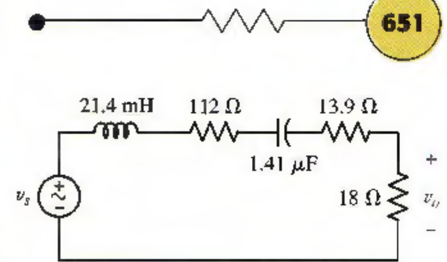


FIGURA 16.15 Modelo mejorado donde se usan valores más exactos y se reconocen las pérdidas en el inductor y en el capacitor.

Puesto que los resultados se aproximaban mucho más a los valores medidos, Sean estaba satisfecho. El doctor Abel, sin embargo, debido a que era muy riguroso en los detalles, ponderó las diferencias entre los valores predichos y los medidos tanto para Q_0 como para el ancho de banda. "*¿Ha considerado* —preguntó el Dr. Abel—, *la impedancia de salida de la fuente de tensión?,*" "*Aún no*", dijo Sean corriendo de regreso a la mesa del laboratorio.

Resultó que la impedancia de salida en cuestión fue de 50 Ω por lo cual Sean agregó este valor al diagrama de circuito, como se muestra en la figura 16.16. Con el nuevo valor de resistencia equivalente de 193.9 Ω, se obtuvieron mejores valores de Q_0 y $\mathcal{B}$:

$$Q_0 = 0.635 \qquad \mathcal{B} = 1442 \text{ Hz}$$

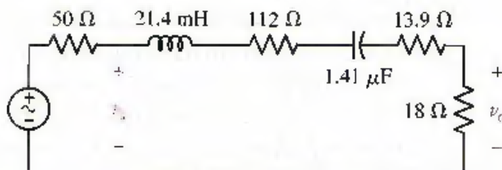


FIGURA 16.16 Modelo final que contiene también la resistencia de salida de la fuente de tensión.

En razón de que todos los valores teóricos experimentales concuerdan ahora dentro del famoso 10%, Sean fue de nuevo un estudiante de ingeniería entusiasta y confiado, al que le motivaba iniciar antes el trabajo en casa y leer libros de texto antes de clase.[2] El Dr. Abel simplemente movió la cabeza de manera complaciente cuando dijo la moraleja siguiente:

Cuando se utilizan dispositivos reales,
observar los modelos que se eligen;
pensar bien antes de calcular,
¡y prestar atención a sus Z y Q!

PRÁCTICA

16.8 La combinación en serie de 10 Ω y 10 nF está en paralelo con la combinación a su vez en serie de 20 Ω y 10 mH. (*a*) Calcular la frecuencia resonante aproximada de la red en paralelo. (*b*) Determinar la Q de la rama *RC*. (*c*) Calcular la Q de la rama *RL*. (*d*) Encontrar el equivalente de tres elementos de la red original.

Respuestas: 10^5 rad/s; 100; 50; 10 nF ‖ 10 mH ‖ 33.3 kΩ.

(2) De acuerdo, esta última parte es excesiva. Nos disculpamos por ello.

16.5 ESCALAMIENTO (O AJUSTE)

Algunos de los ejemplos que se han resuelto implicaron circuitos con valores de elementos pasivos que varían alrededor de unos cuantos ohms, unos cuantos henrys y algunos faradios. Las frecuencias aplicadas correspondieron a unos cuantos radianes por segundo. Se usaron estos valores numéricos particulares debido no a que con frecuencia se encuentran en la práctica, sino en virtud de que las manipulaciones aritméticas resultan mucho más sencillas que en el caso de que fuera necesario manipular diversas potencias de 10 a lo largo de los cálculos. Los procedimientos de escalamiento (o ajuste) que se explicarán en esta sección permiten analizar redes compuestas por elementos de tamaño práctico, al ajustar el valor de los elementos para permitir cálculos numéricos más convenientes. Se considera tanto el ***escalamiento (o ajuste) en magnitud*** como el ***escalamiento (o ajuste) en frecuencia***.

Se elige el circuito resonante en paralelo de la figura 16.17*a* como ejemplo. Los valores imprácticos de los elementos dan origen a la poca probable curva de respuesta que se dibuja en la figura 16.17*b*; la impedancia máxima es igual a 2.5 Ω, la frecuencia resonante corresponde a 1 rad/s, Q_0 es 5, y el ancho de banda equivale a 0.2 rad/s. Estos valores numéricos son mucho más parecidos a los análogos eléctricos de algún sistema mecánico que a los correspondientes a cualquier dispositivo básicamente eléctrico. Se dispone de números convenientes con los cuales efectuar los cálculos, pero se tiene un circuito impráctico difícil de construir.

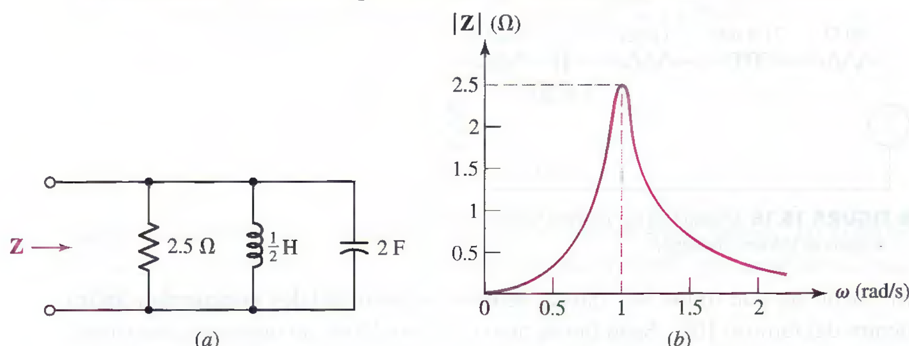


FIGURA 16.17 (*a*) Circuito resonante en paralelo que se usa como ejemplo para ilustrar el escalamiento (ajuste) en magnitud y en frecuencia. (*b*) La magnitud de la impedancia de entrada se muestra como una función de la frecuencia.

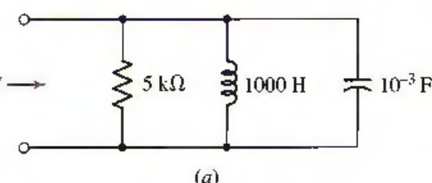
Recordar que "ordenada" se refiere al eje vertical y "abscisa" al eje horizontal.

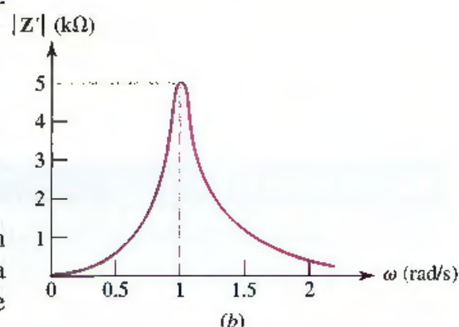
Suponer que la meta sea ajustar esta red, de manera que proporcione una impedancia máxima de 5 000 Ω a una frecuencia resonante de 5×10^6 rad/s, o 796 kHz. En otras palabras, se utilizaría la misma curva de respuesta de la figura 16.17*b* si todo número sobre la escala de las *ordenadas* se incrementa por un factor de 2 000 y cada número sobre la escala de las *abscisas* se aumenta por un factor de 5×10^6. Se tratará lo anterior como dos problemas: 1) Escalamiento (o ajuste) en magnitud por un factor de 2 000 y 2) escalamiento (o ajuste) en frecuencia por un factor de 5×10^6.

El escalamiento (o ajuste) en magnitud se define como el proceso mediante el cual la impedancia de una red de dos terminales se incrementa por un factor K_m, pero permanece constante la frecuencia. El factor K_m es real y positivo, y podría ser mayor o menor que la unidad. Se entenderá que la afirmación más breve *"la red se ajusta en magnitud por un factor de dos"* indica que la impedancia de la nueva red es el doble de la antigua, a cualquier frecuencia. Se determinará ahora cómo se debe ajustar cada tipo de elemento pasivo. Para incrementar la impedancia de entrada de una red por un factor K_m, basta aumentar la impedancia

de cada elemento en la red por el mismo factor. Por lo tanto, una resistencia R debe sustituirse por una resistencia $K_m R$. Cada inductancia debe exhibir también una impedancia que sea K_m veces mayor, a cualquier frecuencia. Para incrementar una impedancia sL por un factor de K_m cuando s permanece constante, se debe sustituir la inductancia L por una inductancia $K_m L$. De manera similar, cada capacitancia C debe sustituirse por una capacitancia C/K_m. En resumen, estos cambios producirán una red que se ajusta en magnitud multiplicándola por un factor de K_m:

$$\left.\begin{aligned} R &\to K_m R \\ L &\to K_m L \\ C &\to \frac{C}{K_m} \end{aligned}\right\} \quad \text{escalamiento o ajuste en magnitud}$$





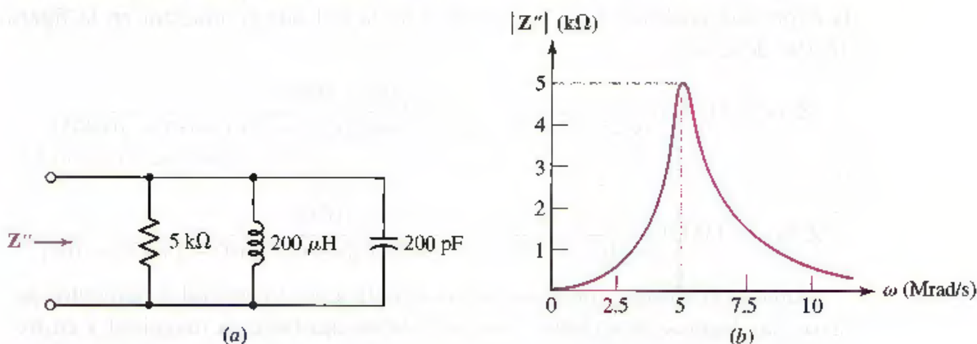
■ **FIGURA 16.18** (*a*) Red de la figura 16.17*a* después de ajustarse en magnitud $K_m = 2000$. (*b*) Curva de respuesta correspondiente.

Cuando cada elemento de la red de la figura 16.17*a* se ajusta en magnitud por un factor de 2 000, se obtiene la red de la figura 16.18*a*. La curva de respuesta de la figura 16.18*b* indica que no es necesario efectuar ningún cambio en la curva de respuesta dibujada antes, aparte del cambio en la escala de las ordenadas.

Considerar ahora esta nueva red y ajustarla en frecuencia. Se definirá el ajuste en frecuencia como el proceso mediante el cual la frecuencia a la que ocurre cualquier impedancia se incrementa por un factor de K_f. También en este caso, se hará uso de la expresión más breve *"la red se ajusta en frecuencia por un factor de dos"* para indicar que se obtiene ahora la misma impedancia a una frecuencia dos veces mayor. El ajuste en frecuencia se lleva a cabo ajustando en frecuencia cada elemento pasivo, y queda claro que no se afecta a ninguna resistencia. La impedancia de cualquier inductor es sL, y si esta misma impedancia se debe obtener a una frecuencia K_f veces más grande, entonces la inductancia L debe sustituirse por una inductancia de L/K_f. De manera similar, se debe sustituir una capacitancia C por una capacitancia C/K_f. Por lo tanto, si una red se va a ajustar en frecuencia por un factor de K_f, entonces los cambios necesarios en cada elemento pasivo son:

$$\left.\begin{aligned} R &\to R \\ L &\to \frac{L}{K_f} \\ C &\to \frac{C}{K_f} \end{aligned}\right\} \quad \text{escalamiento o ajuste en frecuencia}$$

Cuando cada elemento de la red ajustada en magnitud de la figura 16.18*a* se ajusta en frecuencia por un factor de 5×10^6, se obtiene la red de la figura 16.19*a*. La curva de respuesta correspondiente se muestra en la figura 16.19*b*.



■ **FIGURA 16.19** (*a*) Red de la figura 16.18*a* después de ajustarse en frecuencia por un factor de $K_f = 5 \times 10^6$. (*b*) Curva de respuesta correspondiente.

Los elementos de circuito en esta última red tienen valores que se obtienen con facilidad en los circuitos físicos; la red en verdad se construye y se prueba. Se concluye que si la red original de la figura 16.17*a* fuera en realidad un análogo de algún sistema resonante mecánico, se podría ajustar tanto en magnitud como en frecuencia para obtener una red que se podría construir en el laboratorio; las pruebas cuya aplicación resulta costosa o inconveniente en el sistema mecánico podrían efectuarse sobre el sistema eléctrico ajustado, pero los resultados deben "desajustarse" luego y convertirse en las unidades mecánicas para completar el análisis.

Una impedancia, que se indica como una función de **s** también podría ajustarse en magnitud o en frecuencia, y se podría efectuar lo anterior sin conocimiento de los elementos específicos, a partir de los cuales se compone la red de dos terminales. Para ajustar $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ en magnitud, la definición de ajuste de magnitud muestra que sólo se requiere multiplicar $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ por K_m para obtener la impedancia con magnitud ajustada. Así, la impedancia del circuito resonante en paralelo de la figura 16.17*a* es

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{s}^2 + 0.4\mathbf{s} + 2}$$

o

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \frac{0.5\mathbf{s}}{(\mathbf{s} + 0.1 + j0.995)(\mathbf{s} + 0.1 - j0.995)}$$

La impedancia $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$ de la red ajustada en magnitud se determina mediante

$$\mathbf{Z}'(\mathbf{s}) = K_m\mathbf{Z}(\mathbf{s})$$

Si se elige de nuevo $K_m = 2\,000$, se obtiene

$$\mathbf{Z}'(\mathbf{s}) = (1\,000)\frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} + 0.1 + j0.995)(\mathbf{s} + 0.1 - j0.995)}$$

Si $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$ se debe ajustar ahora en frecuencia por un factor de 5×10^6, entonces $\mathbf{Z}''(\mathbf{s})$ y $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$ tienen que proporcionar valores idénticos de impedancia, si $\mathbf{Z}''(\mathbf{s})$ se avalúa a una frecuencia K_f veces igual a la que se evalúa $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$. Después de una cuidadosa actividad cerebral, esta conclusión se establecería de manera concisa en notación funcional:

$$\mathbf{Z}''(\mathbf{s}) = \mathbf{Z}'\left(\frac{\mathbf{s}}{K_f}\right)$$

Observar que se obtiene $\mathbf{Z}''(\mathbf{s})$ al sustituir toda **s** en $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$ por $\mathbf{s}/K_f$. Por lo tanto, la expresión analítica de la impedancia de la red que se muestra en la figura 16.19*a* debe ser

$$\mathbf{Z}''(\mathbf{s}) = (1\,000)\frac{\mathbf{s}/(5 \times 10^6)}{[\mathbf{s}/(5 \times 10^6) + 0.1 + j0.995][\mathbf{s}/(5 \times 10^6) + 0.1 - j0.995]}$$

o

$$\mathbf{Z}''(\mathbf{s}) = (1\,000)\frac{(5 \times 10^6)\mathbf{s}}{[\mathbf{s} + 0.5 \times 10^6 + j4.975 \times 10^6][\mathbf{s} + 0.5 \times 10^6 - j4.975 \times 10^6]}$$

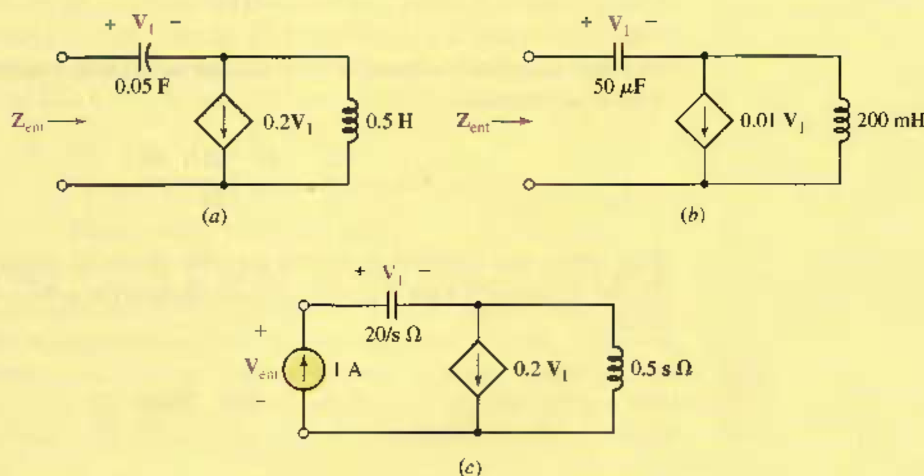
Aunque el ajuste es un proceso que se aplica por lo general a elementos pasivos, las fuentes dependientes también deben ajustarse en magnitud y en frecuencia. Suponer que la salida de cualquier fuente está dada como $k_x v_x$ o $k_y i_y$, donde k_x tiene las dimensiones de una admitancia para una fuente de corriente

dependiente y resulta adimensional para una fuente de tensión dependiente; en tanto que k_y tiene las dimensiones de ohms para una fuente de tensión dependiente y es adimensional en el caso de una fuente de corriente dependiente. Si la red que contiene la fuente dependiente se ajusta en magnitud por K_m, entonces sólo se requiere tratar a k_x o k_y como si fueran el tipo de elemento congruente con sus dimensiones. Esto es, si k_x (o k_y) es adimensional, se deja sin cambio; si es una admitancia, se divide entre K_m y si es una impedancia, se multiplica por K_m. *El ajuste en frecuencia no afecta a las fuentes dependientes.*



EJEMPLO 16.6

Ajustar la red que se muestra en la figura 16.20 por $K_m = 20$ y $K_f = 50$, y después determinar $\mathbf{Z}_{ent}(s)$ de la red ajustada.



■ **FIGURA 16.20** (*a*) Red que se va a ajustar en magnitud por un factor de 20, y en frecuencia por un factor de 50. (*b*) Red ajustada. (*c*) Se aplica una fuente de prueba de 1 A a las terminales de entrada para obtener la impedancia sin ajuste de la red de la parte (*a*).

El ajuste en magnitud del capacitor se consigue dividiendo 0.05 F entre el factor de ajuste $K_m = 20$, y el ajuste en frecuencia se lleva a cabo al dividir entre $K_f = 50$. Al efectuar de manera simultánea ambas operaciones, se tiene

$$C_{\text{ajustada}} = \frac{0.05}{(20)(50)} = 50\,\mu\text{F}$$

El inductor también se ajusta:

$$L_{\text{ajustada}} = \frac{(20)0.5}{50} = 200\text{ mH}$$

Al ajustar la fuente dependiente, sólo es necesario considerar el ajuste en magnitud, pues el de la frecuencia no afecta a las fuentes dependientes. Ya

(Continúa en la siguiente página)

que ésta es una fuente de *corriente* controlada por *tensión*, entonces la constante de multiplicación 0.2 tiene unidades de A/V, o S. Debido a que el factor tiene unidades de admitancia, se divide entre K_m, por lo que el nuevo término es de $0.01\mathbf{V}_1$. La red obtenida (ya ajustada) se muestra en la figura 16.20*b*.

Para determinar la impedancia de la nueva red, es necesario aplicar una fuente de prueba de 1 A en las terminales de entrada. Se podría trabajar con cualquier circuito, pero primero se procederá a calcular la impedancia de la red *sin ajustar* que se muestra en la figura 16.20*a*, y luego se ajustará el resultado.

Con referencia a la figura 16.20*c*,

$$\mathbf{V}_{ent} = \mathbf{V}_1 + 0.5\mathbf{s}(1 - 0.2\mathbf{V}_1)$$

Además,

$$\mathbf{V}_1 = \frac{20}{\mathbf{s}}(1)$$

Al hacer la sustitución indicada, seguida por un poco de manipulación algebraica, se obtiene

$$\mathbf{Z}_{ent} = \frac{\mathbf{V}_{ent}}{1} = \frac{\mathbf{s}^2 - 4\mathbf{s} + 40}{2\mathbf{s}}$$

Para ajustar esta cantidad de manera que corresponda al circuito de la figura 16.20*b* se multiplica por $K_m = 20$, y se sustituye $\mathbf{s}$ por $\mathbf{s}/\mathbf{K}_f = \mathbf{s}/50$. De tal modo,

$$\mathbf{Z}_{ent_{ajustada}} = \frac{0.2\mathbf{s}^2 - 40\mathbf{s} + 20\,000}{\mathbf{s}}\ \Omega$$

PRÁCTICA

16.9 Un circuito resonante en paralelo se define mediante $C = 0.01$ F, $B = 2.5$ rad/s, y $\omega_0 = 20$ rad/s. Proporcionar los valores de R y L si la red se ajusta en: (*a*) magnitud por un factor de 800; (*b*) frecuencia por un factor de 10^4; (*c*) magnitud por un factor de 800 y frecuencia por un factor de 10^4.

Respuestas: 32 kΩ, 200 H; 40 Ω, 25 μH; 32 kΩ, 20 mH.

16.6 DIAGRAMAS DE BODE

En esta sección se descubrirá un método rápido para obtener una imagen *aproximada* de la variación de amplitud y de fase de una función de transferencia dada como función de ω. Desde luego, las curvas exactas se pueden graficar después de calcular valores con una calculadora programable o una computadora, pero también se podrían obtener de manera directa en la computadora. Sin embargo, el objetivo aquí es lograr una imagen de la respuesta superior a la que podría verse a partir de una gráfica de polos-ceros, sin tener que armar toda una ofensiva computacional.

La escala de decibeles (dB)

La curva de respuesta aproximada que se construirá se conoce como gráfica asintótica, ***gráfica de Bode***, o ***diagrama de Bode***, en honor a su creador, Hendrik W. Bode, ingeniero eléctrico y matemático de Bell Telephone Laboratories. Tanto las curvas de magnitud como de fase se muestran utilizando una escala de frecuencias logarítmicas para las abscisas y la propia magnitud se ilustra también en unidades logarítmicas llamadas ***decibeles*** (dB). Se define el valor de $|\mathbf{H}(j\omega)|$ en dB como sigue:

El decibel recibe ese nombre en honor a Alejandro Graham Bell.

$$H_{dB} = 20 \log |\mathbf{H}(j\omega)|$$

donde se emplea el logaritmo común (base 10). (*Se utiliza un multiplicador de 10, en lugar de uno de 20, para las funciones de transferencia de potencia, aunque aquí no será necesario.*) La operación inversa es:

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 10^{(H_{dB}/20)}$$

Antes de que se comience en realidad un análisis detallado de la técnica para dibujar gráficas de Bode, resultará útil obtener cierta percepción del tamaño de la unidad del decibel, a fin de aprender unos cuantos de sus valores importantes y para recordar algunas de las propiedades del logaritmo. Dado que $\log 1 = 0$, $\log 2 = 0.30103$, y $\log 10 = 1$, se observan las correspondencias:

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow H_{dB} = 0$$
$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 2 \Leftrightarrow H_{dB} \approx 6 \text{ dB}$$
$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 10 \Leftrightarrow H_{dB} = 20 \text{ dB}$$

Un aumento de $|\mathbf{H}(j\omega)|$ por un factor de 10 corresponde a un incremento de H_{dB} por 20 dB. Además, $\log 10^n = n$, por ello $10^n \Leftrightarrow 20n$ dB, por lo que 1 000 corresponde a 60 dB, en tanto que 0.01 se representa como −40 dB. Utilizando sólo los valores que ya se indicaron, es posible también que $20 \log 5 = 20 \log \frac{10}{2} = 20 \log 10 - 20 \log 2 = 20 - 6 = 14$ dB, y, por ello $5 \Leftrightarrow 14$ dB. Además, $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$ y, en consecuencia $\sqrt{2} \Leftrightarrow 3$ dB y $1/\sqrt{2} \Leftrightarrow -3$ dB.[3]

Se escribirán las funciones de transferencia en términos de $\mathbf{s}$, sustituyendo $\mathbf{s} = j\omega$ cuando se esté listo para determinar la magnitud o el ángulo de fase. Si se desea, la magnitud se podría escribir en términos de dB en ese punto.

PRÁCTICA

16.10 Calcular H_{dB} en $\omega = 146$ rad/s si $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ es igual a (*a*) $20/(\mathbf{s} + 100)$; (*b*) $20(\mathbf{s} + 100)$; (*c*) $20\mathbf{s}$. Calcular $|\mathbf{H}(j\omega)|$ si H_{dB} se iguala a (*d*) 29.2 dB; (*e*) −15.6 dB; (*f*) −0.318 dB.

Respuestas: −18.94 dB; 71.0 dB; 69.3 dB; 28.8; 0.1660; 0.964.

Determinación de las asíntotas

El siguiente paso consiste en factorizar $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ para mostrar sus polos y ceros. Se considera primero un cero en $\mathbf{s} = -a$, escrito en una forma estandarizada como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + \frac{\mathbf{s}}{a} \qquad [26]$$

(3) Obsérvese que se está siendo un poco deshonesto en este caso al utilizar $20 \log 2 = 6$ dB en lugar de 6.02 dB. Sin embargo, es usual representar $\sqrt{2}$ como 3 dB. En razón de que la escala de dB es inherentemente logarítmica, rara vez es importante una pequeña inexactitud.

El diagrama de Bode de esta función consta de dos curvas asintóticas aproximadas de H_{dB} para valores muy grandes y muy pequeños de ω. De tal manera, se comienza determinando

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \left|1 + \frac{j\omega}{a}\right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

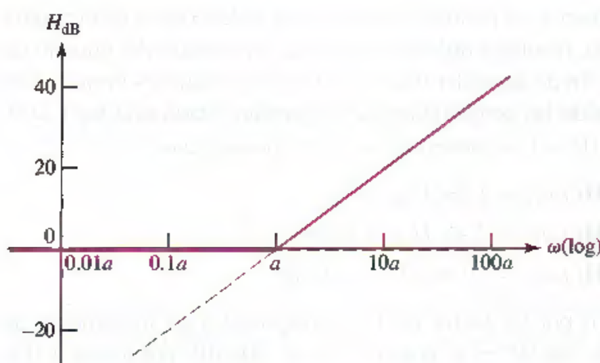
y por ello,

$$H_{dB} = 20 \log \left|1 + \frac{j\omega}{a}\right| = 20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

Cuando $\omega \ll a$:

$$H_{dB} \approx 20 \log 1 = 0 \qquad (\omega \ll a)$$

Esta asíntota simple se muestra en la figura 16.21 y se dibuja como una línea gruesa para representar $\omega < a$, y como una línea punteada para $\omega > a$.



■ **FIGURA 16.21** Diagrama de amplitud de Bode de $\mathbf{H}(s) = 1 + s/a$ que consta de las asíntotas de frecuencia alta y baja, y se muestran como líneas continuas. Se intersectan sobre la abscisa en la frecuencia angular de esquina. El diagrama de Bode representa la respuesta en términos de las dos asíntotas, las cuales son fáciles de dibujar.

Cuando $\omega \gg a$:

$$H_{dB} \approx 20 \log \frac{\omega}{a} \qquad (\omega \gg a)$$

En $\omega = a$, $H_{dB} = 0$; en $\omega = 10a$, $H_{dB} = 20$ dB; y en $\omega = 100a$, $H_{dB} = 40$ dB. Por lo tanto, el valor de H_{dB} aumenta 20 dB por cada aumento de 10 veces en la frecuencia angular. Así, la asíntota tiene una pendiente de 20 dB/década. Puesto que H_{dB} aumenta 6 dB cuando ω se duplica, un valor alterno de la pendiente es 6 dB/octava. La asíntota de alta frecuencia se presenta también en la figura 16.21, una línea sólida para $\omega > a$ y una línea discontinua para $\omega < a$. Observar que las dos asíntotas se intersectan en $\omega = a$, la frecuecia del cero, la cual también se describe como ***frecuencia angular de esquina, de corte, de 3 dB o de media potencia.***

Una ***década*** se refiere a un intervalo de frecuencia definido por un factor de 10, como el de 3 Hz a 30 Hz o el de 12.5 MHz a 125 MHz. Una ***octava*** se refiere a un intervalo de frecuencias definido por un factor de 2, como el de 7 a 14 GHz.

Emparejamiento de los diagramas de Bode

Ahora se verá el grado de error implícito en la curva de respuesta asintótica. A la frecuencia angular de esquina (o de ruptura) $(\omega = a)$,

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}} = 3 \text{ dB}$$

Observar que se sigue respetando la convención de considerar a $\sqrt{2}$ como correspondiente a 3 dB.

cuando se compara con el valor asintótico de 0 dB. En $\omega = 0.5a$, se tiene

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1.25} \approx 1 \text{ dB}$$

De tal modo, la respuesta exacta se representa mediante una curva uniforme que se ubica 3 dB arriba de la respuesta asintótica en $\omega = a$, y a 1 dB sobre ella en $\omega = 0.5a$ (y también en $\omega = 2a$). Siempre se emplea esta información para emparejar la esquina, si se desea un resultado más exacto.

Términos múltiples

La mayor parte de las funciones de transferencia consisten en más de un cero simple (o polo simple). Sin embargo, esto se maneja fácilmente por el método del diagrama de Bode, puesto que de hecho se está trabajando con logaritmos. Por ejemplo, considerar la función

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = K\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{s_1}\right)\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{s_2}\right)$$

donde K = constante, y $-s_1$ y $-s_2$ representan los dos ceros de la función $\mathbf{H}(\mathbf{s})$. Para esta función, H_{dB} puede escribirse como

$$H_{dB} = 20 \log\left|K\left(1 + \frac{j\omega}{s_1}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{s_2}\right)\right|$$

$$= 20 \log\left[K\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2}\right]$$

o

$$H_{dB} = 20 \log K + 20 \log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2} + 20 \log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2}$$

lo cual es simplemente la suma de un término constante 20 log K (independiente de la frecuencia) y dos términos de cero simples de la forma considerada con anterioridad. En otras palabras, *se puede construir un esquema de H_{dB} simplemente sumando de manera gráfica los diagramas de los términos por separado.* En el ejemplo siguiente se estudia este caso.

EJEMPLO 16.7

Obtener el diagrama de Bode de la impedancia de entrada de la red que se muestra en la figura 16.22.

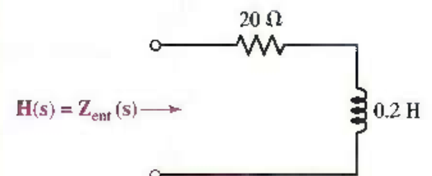
Se tiene la impedancia de entrada

$$\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s}) = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = 20 + 0.2\mathbf{s}$$

Expresando esta igualdad en su forma estándar, se obtiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 20\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{100}\right)6$$

(Continúa en la siguiente página)



■ **FIGURA 16.22** Si H(s) se selecciona como Z_{in}(s) para esta red, entonces el diagrama de Bode para H_{dB} es como se indica en la figura 16.23*b*.

Los dos factores que constituyen $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ son un cero en $\mathbf{s} = -100$, lo cual propicia una frecuencia angular de corte de $\omega = 100$ rad/s, y una constante equivalente a $20 \log 20 = 26$ dB. Ambas se dibujan claramente en la figura 16.23*a*. Dado que se trabaja con el logaritmo de $|\mathbf{H}(j\omega)|$, a continuación se suman los diagramas de Bode correspondientes a los factores individuales. La gráfica de magnitud resultante aparece como la figura 16.23*b*. No se intentó emparejar la esquina con una corrección de $+3$ dB en $\omega = 100$ rad/s. Esto se deja al lector como un ejercicio rápido.

PRÁCTICA

16.11 Construir un diagrama de Bode en magnitud para $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 50 + \mathbf{s}$.

Respuestas: 34 dB, $\omega < 50$ rad/s; pendiente $= +20$ dB/década $\omega > 50$ rad/s.

Respuesta en fase

De regreso a la función de transferencia de la ecuación [26], se quisiera determinar ahora la ***respuesta en fase*** para un cero simple,

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = \text{ang}\left(1 + \frac{j\omega}{a}\right) = \tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$

Esta expresión también se representa a través de sus asíntotas, aunque se requieren tres segmentos rectos. Para $\omega \ll a$, ang $\mathbf{H}(j\omega) \approx 0°$, así que se usa como la asíntota cuando $\omega < 0.1a$:

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = 0° \qquad (\omega < 0.1a)$$

En el extremo superior, $\omega \gg a$, se tiene el ángulo de $\mathbf{H}(j\omega) \approx 90°$ y se utiliza arriba de $\omega = 10a$:

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = 90° \qquad (\omega > 10a)$$

Dado que el ángulo es 45° en $\omega = a$, se construye ahora la asíntota de la línea recta que se extiende desde 0° en $\omega = 0.1a$, pasando por 45° en $\omega = a$, hasta 90° en $\omega = 10a$. Esta línea recta tiene una pendiente de 45°/década. Se presenta como una curva de trazo continuo en la figura 16.24, mientras que la respuesta del ángulo exacto se ilustra como una línea punteada. Las diferencias máximas

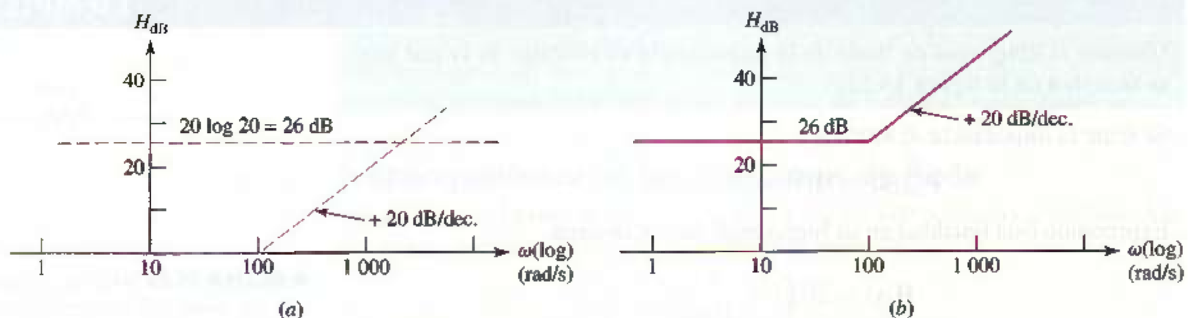


FIGURA 16.23 (*a*) Los diagramas de Bode de los factores de $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 20(1 + \mathbf{s}/100)$ se dibujan individualmente. (*b*) El diagrama de Bode compuesto se expresa como la suma de las gráficas de la parte *a*.

entre las respuestas asintótica y real son $\pm 5.71°$ en $\omega = 0.1a$ y $10a$. Ocurren errores de $\mp$ 5.29° en $\omega = 0.394a$ y $2.54a$; el error es cero en $\omega = 0.159a$ y $6.31a$. Por lo general, la gráfica del ángulo de fase se deja como una aproximación de línea recta, aunque también se dibujan curvas uniformes de una manera similar a la que se describe en la figura 16.24.

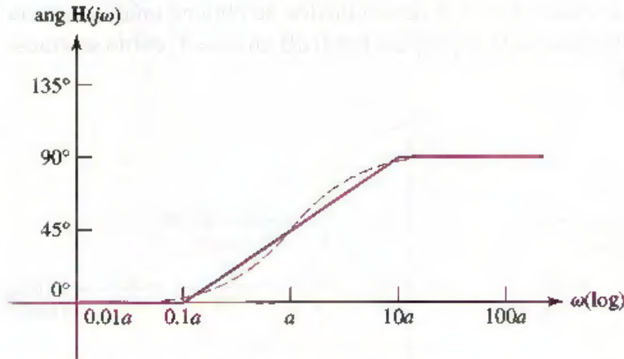


FIGURA 16.24 La respuesta del ángulo asintótico de $\mathbf{H}(s) = 1 + s/a$ se muestra como los tres segmentos de línea recta continuas. Los puntos extremos de la rampa son 0° a $0.1a$ y 90° a $10a$. La línea punteada representa una respuesta más precisa (lisa).

Vale la pena hacer aquí una breve pausa para considerar lo que indica la gráfica de la fase. En el caso de un cero en $s = a$, se observa que para frecuencias mucho menores que la frecuencia de esquina, la fase de la función de respuesta es 0°. Sin embargo, para frecuencias altas ($\omega \gg a$) la fase es de 90°. En la cercanía de la frecuencia de esquina, la fase de la función de transferencia varía con cierta rapidez. Por lo tanto, el ángulo de fase real que le corresponde a la respuesta se selecciona mediante el diseño del circuito (el cual determina a a).

PRÁCTICA

16.12 Dibujar el diagrama de fase de Bode de la función de transferencia del ejemplo 16.7.

Respuestas: 0°, $\omega \leq 10$; 90°, $\omega \geq 1000$; pendiente = 45° dec, $10 < \omega < 1000$. (ω en rad/s).

Consideraciones adicionales para la creación de las gráficas de Bode

Considerar a continuación el polo simple

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{1 + s/a} \qquad [27]$$

Dado que lo anterior es el recíproco de un cero, la operación logarítmica resulta en un diagrama de Bode, que es el *negativo* del que se obtuvo antes. La amplitud es de 0 dB hasta $\omega = a$, y luego la pendiente corresponde a -20 dB/década para $\omega > 10a$, y $-45°$ en $\omega = a$, la cual tiene una pendiente de $-45°$/década cuando $0.1a < \omega < 10a$. Se invita al lector a que genere el diagrama de Bode de esta función trabajando directamente con la ecuación [27].

Otro término que puede aparecer en $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ es un factor de $\mathbf{s}$ en el numerador o el denominador. Si $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$, entonces

$$H_{\text{dB}} = 20 \log |\omega|$$

Así, se tiene una línea recta infinita que pasa por 0 dB en $\omega = 1$ y que tiene una pendiente en todas partes de 20 dB/década, lo cual se ilustra en la figura 16.25*a*. Si el factor $\mathbf{s}$ se encuentra en el denominador, se obtiene una línea recta con una pendiente -20 dB/década y que pasa por 0 dB en $\omega = 1$, como se muestra en la figura 16.25*b*.

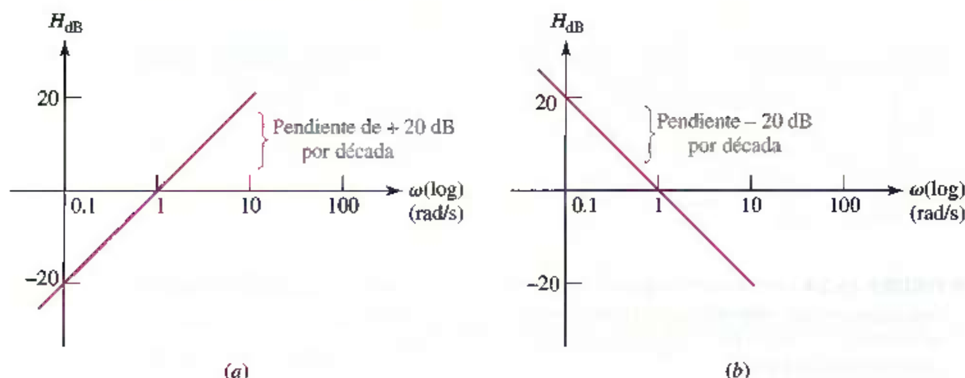


FIGURA 16.25 Se muestran los diagramas asintóticos de: (*a*) $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ y (*b*) $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1/\mathbf{s}$. Ambas rectas infinitamente largas pasan por 0 dB en $\omega = 1$ y tienen pendientes de ± 20 dB/década.

Otro término simple que se encuentra en $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ es la constante de multiplicación K, la cual origina un diagrama de Bode que es una línea recta horizontal que se ubica en $20 \log |K|$ dB sobre la abscisa. En realidad estará por debajo de la abscisa si $|K| < 1$.

EJEMPLO 16.8

Dibujar el diagrama de Bode de la ganancia del circuito de la figura 16.26.

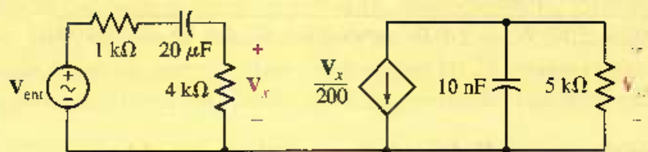


FIGURA 16.26 Si $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$, el diagrama de amplitud de Bode de este amplificador se muestra en la figura 16.27*b*, y el diagrama de fase se presenta en la figura 16.28.

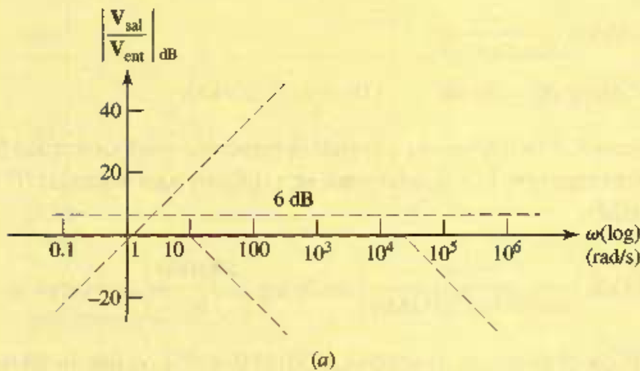
Se trabaja de izquierda a derecha a través del circuito y se escribe la expresión de la ganancia en tensión

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_{\text{sal}}}{\mathbf{V}_{\text{ent}}} = \frac{4\,000}{5\,000 + 10^6/20\mathbf{s}} \left(-\frac{1}{200}\right) \frac{5\,000(10^8/\mathbf{s})}{5\,000 + 10^8/\mathbf{s}}$$

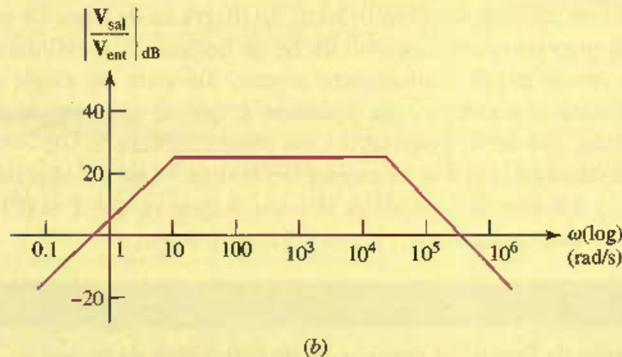
la que, simplifica (por fortuna), se transforma en

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{-2\mathbf{s}}{(1 + \mathbf{s}/10)(1 + \mathbf{s}/20\,000)} \qquad [28]$$

Se observa una constante $20 \log |-2| = 6$ dB, puntos de inflexión en $\omega = 10$ rad/s y $\omega = 20\,000$ rad/s, y un factor lineal **s**. Cada uno de ellos se dibuja en la figura 16.27*a*; además, los cuatro dibujos se añaden para producir el diagrama de Bode en magnitud de la figura 16.27*b*.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 16.27** (*a*) Diagramas de magnitud de Bode individuales de los factores (-2), (s), $(1 + s/10)^{-1}$, y $(1 + s/20\,000)^{-1}$. (*b*) Se suman las cuatro gráficas separadas de la parte a para obtener los diagramas en magnitud de Bode del amplificador de la figura 16.26.

PRÁCTICA

16.13 Construir un diagrama de Bode en magnitud para H(s) igual a: (*a*) $50/(s + 100)$; (*b*) $(s + 10)/(s + 100)$; (*c*) $(s + 10)/s$.

Respuestas: (*a*) −6 dB, $\omega < 100$; −20 dB/década, $\omega > 100$; (*b*) −20 dB, $\omega < 10$; +20 dB/década, $10 < \omega < 100$; 0 dB, $\omega > 100$; (*c*) 0 dB, $\omega > 10$; −20 dB/década, $\omega < 10$.

Antes de construir el diagrama de fase del amplificador de la figura 16.26, se tomará un momento para investigar varios detalles del diagrama de magnitud.

Primero, resulta conveniente no confiar demasiado en la adición gráfica de los diagramas en magnitud individuales. Es mejor determinar con facilidad el valor exacto del diagrama de la magnitud combinada en los puntos elegidos al



considerar el valor asintótico de cada factor de **H**(s) en el punto en cuestión. Por ejemplo, en la región plana de la figura 16.27*a* entre $\omega = 10$ y $\omega = 20\,000$, se está debajo de la esquina en $\omega = 20\,000$, y por ello se representa $(1 + \mathbf{s}/20\,000)$ mediante 1; pero si uno se ubica arriba de $\omega = 10$, entonces $(1 + \mathbf{s}/10)$ se representa como $\omega/10$. En consecuencia,

$$H_{\text{dB}} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega/10)(1)} \right|$$
$$= 20 \log 20 = 26 \text{ dB} \qquad (10 < \omega < 20\,000)$$

También se podría conocer la frecuencia a la cual la respuesta asintótica cruza la abscisa en el extremo superior. Los dos factores se expresan aquí como $\omega/10$ y $\omega/20\,000$; de tal modo,

$$H_{\text{dB}} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega/10)(\omega/20\,000)} \right| = 20 \log \left| \frac{400\,000}{\omega} \right|$$

Dado que $H_{\text{dB}} = 0$ en el cruce de la abscisa, $400\,000/\omega = 1$ y, por lo tanto, $\omega = 400\,000$ rad/s.

Muchas veces no se necesita un dibujo exacto del diagrama de Bode en papel semilogarítmico, pues basta con construir un eje de frecuencia aproximadamente logarítmico en un papel cuadriculado simple. Después de elegir el intervalo de una década —por decir, una distancia L que se extiende desde $\omega = \omega_1$ hasta $\omega = 10\omega_1$ (donde ω_1 a menudo es una potencia entera de 10)—sea x la que ubique la distancia a la que se encuentra ω a la derecha de ω_1, teniendo así $x/L = \log(\omega/\omega_1)$. De particular ayuda es el conocimiento de que $x = 0.3L$ cuando $\omega = 2\omega_1$, $x = 0.6L$ en $\omega = 4\omega_1$, y $x = 0.7L$ en $\omega = 5\omega_1$.

EJEMPLO 16.9

Dibujar el diagrama de fase de la función de transferencia dada por la ecuación [28], H(s) = $-2\mathbf{s}/[(1 + \mathbf{s}/10)(1 + \mathbf{s}/20\,000)]$.

Se empieza inspeccionando $\mathbf{H}(j\omega)$:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{-j2\omega}{(1 + j\omega/10)(1 + j\omega/20\,000)} \qquad [29]$$

El ángulo del numerador es una constante, $-90°$.

Los factores restantes se representan como la suma de los ángulos acortados por los puntos de inflexión en $\omega = 10$ y $\omega + 20\,000$. Estos tres términos aparecen como curvas asintóticas de línea punteada en la figura 16.28 y su suma se presenta como una curva continua. Se obtiene una representación equivalente si la curva se corre hacia arriba de 360°.

También se obtienen valores exactos para la respuesta de fase asintótica. Por ejemplo, en $\omega = 10^4$ rad/s, el ángulo en la figura 16.28 se calcula a partir de los términos del numerador y del denominador en la ecuación [29]. El ángulo del numerador es $-90°$. El ángulo del polo en $\omega = 10$ es $-90°$, puesto que ω es más de 10 veces mayor que la frecuencia de esquina. Entre 0.1 y 10 veces la frecuencia de esquina, recordar que la pendiente es $-45°$ por década de un polo simple. Por lo tanto, en el caso del punto de inflexión en 20 000 rad/s, se calcula el ángulo, $-45° \log(\omega/0.1a) = -45° \log[10000/(0.1 \times 20000)] = -31.5°$.

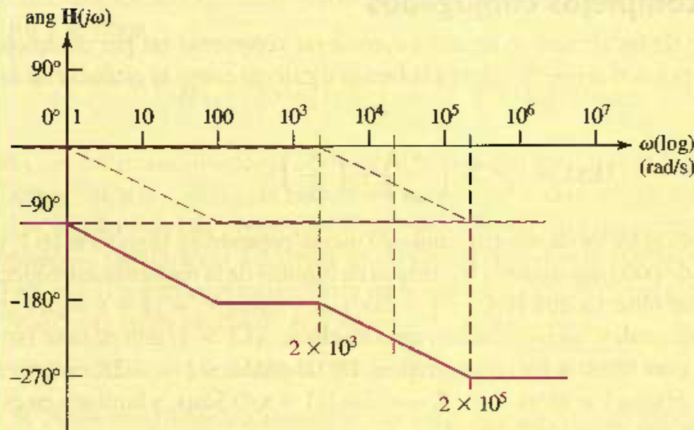


FIGURA 16.28 La curva en trace continuo exhibe la respuesta de fase asintótica del amplificador de la figura 16.26.

La suma algebraica de las tres contribuciones es $-90°-90°$ $-31.5° = -211.5°$, un valor que parece ser moderadamente cercano a la curva de fase asintótica de la figura 16.28.

PRÁCTICA

16.14 Dibujar el diagrama de fase de Bode de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ igual a: (*a*) $50/(\mathbf{s}+100)$; (*b*) $(\mathbf{s}+10)/(\mathbf{s}+100)$; (*c*) $(\mathbf{s}+10)/\mathbf{s}$.

Respuestas: (*a*) 0°, $\omega < 10$; $-45°$/década, $10 < \omega < 1\,000$; $-90°$, $\omega > 1\,000$; (*b*) 0°, $\omega < 1$; $+45°$/década, $1 < \omega < 10$; 45°, $10 < \omega < 100$; $-45°$/década, $100 < \omega < 1\,000$; 0°, $\omega > 1\,000$; (*c*) $-90°$, $\omega < 1$; $+45°$/década, $1 < \omega < 100$; 0°, $\omega > 100$.

Términos de orden superior

Los ceros y polos considerados son términos de primer orden, tales como $\mathbf{s}^{\pm 1}$, $(1+0.2\mathbf{s})^{\pm 1}$, y así sucesivamente. Sin embargo, se podría extender con mucha facilidad el análisis a polos y ceros de orden superior. Un término $\mathbf{s}^{\pm n}$ resulta en una respuesta en magnitud que pasa por $\omega = 1$ con una pendiente de $\pm 20n$ dB/década; la respuesta en fase es un ángulo constante de $\pm 90n°$. Además, un cero múltiple, $(1+\mathbf{s}/a)^n$, debe representar la suma de n de las curvas de respuesta en magnitud, o n de las curvas de respuesta en fase del cero simple. Por lo tanto, se obtiene un diagrama en magnitud asintótica que es 0 dB para $\omega < a$ y que tiene una pendiente de $20n$ dB/década cuando $\omega > a$; el error es $-3n$ dB en $\omega = a$, y $-n$ dB en $\omega = 0.5a$ y $2a$. El diagrama de fase de 0° para $\omega < 0.1a$, $90n°$ para $\omega > 10a$, $45n°$ en $\omega = a$, y una línea recta con pendiente de $45n°$/década para $0.1a < \omega < 10a$, asimismo, presenta errores tan grandes como $\pm 5.71n°$ en las dos frecuencias.

Las curvas en magnitud y en fase asintóticas asociadas con un factor de $(1+\mathbf{s}/20)^{-3}$ se pueden dibujar sin ninguna dificultad, aunque los errores relativamente grandes asociados con las potencias superiores deben tenerse presentes.

Pares de complejos conjugados

El último tipo de factor que se necesita considerar representa un par complejo conjugado de polos o ceros. Se adopta la forma siguiente como la estándar de un par de ceros:

$$\mathbf{H(s)} = 1 + 2\zeta\left(\frac{\mathbf{s}}{\omega_0}\right) + \left(\frac{\mathbf{s}}{\omega_0}\right)^2$$

La cantidad ζ es el factor de amortiguamiento que se presentó en la sección 16.1, y se verá dentro de poco que ω_0 es la frecuencia de esquina de la respuesta asintótica.

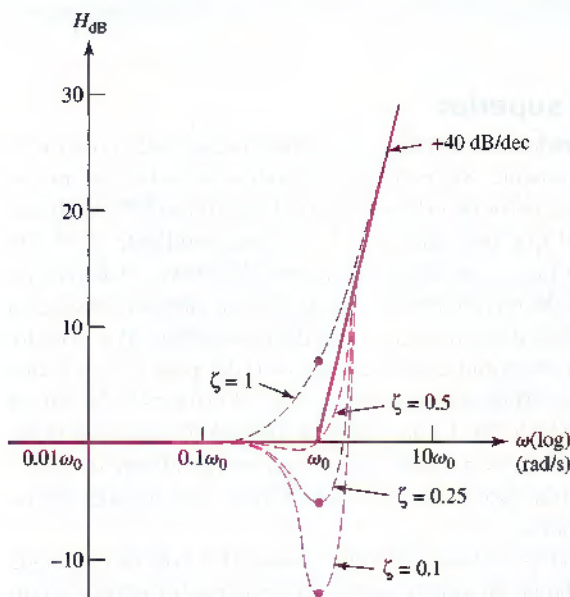
Si $\zeta = 1$, se observa que $\mathbf{H(s)} = 1 + 2(\mathbf{s}/\omega_0) + (\mathbf{s}/\omega_0)^2 = (1 + \mathbf{s}/\omega_0)^2$, un cero de segundo orden, como se acaba de considerar. Si $\zeta > 1$, entonces se factorizaría $\mathbf{H(s)}$ para mostrar los ceros simples. De tal modo, si $\zeta = 1.25$, entonces $\mathbf{H(s)} = 1 + 2.5(\mathbf{s}/\omega_0) + (\mathbf{s}/\omega_0)^2 = (1 + \mathbf{s}/2\omega_0)(1 + \mathbf{s}/0.5\omega_0)$, y también en este caso se tiene una situación familiar.

Se presenta un nuevo caso cuando $0 \leq \zeta \leq 1$. No es necesario determinar valores para el complejo conjugado de raíces. Es mejor que se determinen los valores asintóticos de baja y alta frecuencias, tanto para la respuesta en magnitud como para la respuesta en fase y se aplica luego una corrección que depende del valor de ζ.

Para la respuesta en magnitud, se tiene:

$$H_{\text{dB}} = 20\log|\mathbf{H}(j\omega)| = 20\log\left|1 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right| \qquad [30]$$

Cuando $\omega \ll \omega_0$, $\mathbf{H}_{\text{dB}} = 20\log|1| = 0$ dB, que es la asíntota de baja frecuencia. Luego, si $\omega \gg \omega_0$, sólo es importante el término al cuadrado, y $\mathbf{H}_{\text{dB}} = 20\log|-(\omega/\omega_0)^2| = 40\log(\omega/\omega_0)$. Se tiene una pendiente de +40 dB/década, que es la asíntota de alta frecuencia; además, las dos asíntotas se intersectan en 0 dB, $\omega = \omega_0$. La curva continua en la figura 16.29 muestra esta representación asintótica de la respuesta en magnitud. Sin embargo, se requiere aplicar una



■ **FIGURA 16.29** Diagramas de amplitud de Bode de $\mathbf{H(s)} = 1 + 2\zeta(\mathbf{s}/\omega_0) + (\mathbf{s}/\omega_0)^2$ para diversos valores del factor de amortiguamiento ζ.

corrección en la cercanía de la frecuencia de esquina. Sea $\omega = \omega_0$ en la ecuación [30] y se tiene

$$H_{\text{dB}} = 20\log\left|j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right| = 20\log(2\zeta) \qquad [31]$$

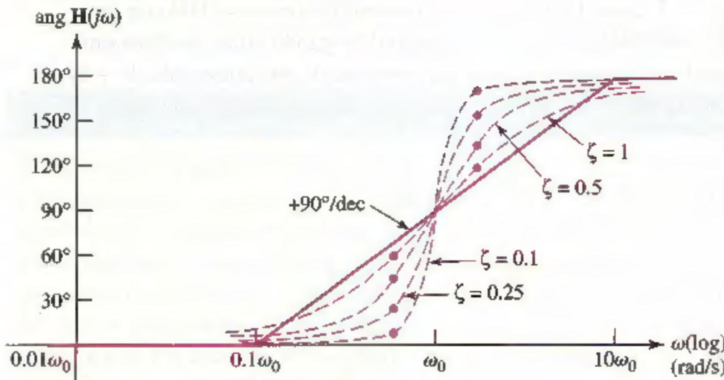
Si $\zeta = 1$, un caso límite, la corrección es +6 dB; para $\zeta = 0.5$, no se requiere corrección; y si $\zeta = 0.1$, la corrección es −14 dB. Conocer este valor de corrección resulta muchas veces suficiente para dibujar una respuesta en magnitud asintótica satisfactoria. La figura 16.29 ilustra curvas más exactas de $\zeta = 1, 0.5, 0.25$, y 0.1, según se calcula a partir de la ecuación [30]. Por ejemplo, si $\zeta = 0.25$, entonces el valor exacto de H_{dB} en $\omega = 0.5\omega_0$ es:

$$H_{\text{dB}} = 20\log|1 + j0.25 - 0.25| = 20\log\sqrt{0.75^2 + 0.25^2} = -2.0 \text{ dB}$$

Los picos negativos no muestran un valor mínimo exactamente en $\omega = \omega_0$, como se ve mediante la curva de $\zeta = 0.5$. El valle se encuentra siempre a una frecuencia un poco inferior.

Si $\zeta = 0$, entonces $\mathbf{H}(j\omega_0) = 0$ y $H_{\text{dB}} = -\infty$. Los diagramas de Bode suelen no dibujarse en esta situación.

La última tarea consiste en dibujar la respuesta en fase asintótica correspondiente a $\mathbf{H}(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$. Debajo de $\omega = 0.1\omega_0$, se deja que ang $\mathbf{H}(j\omega) = 0°$; arriba de $\omega = 10\omega_0$, se tiene ang $\mathbf{H}(j\omega) =$ ang $[-(\omega/(\omega_0)^2$ $= 180°$. Para la frecuencia de esquina, ang $\mathbf{H}(j\omega_0) =$ ang $(j2\zeta) = 90°$. En el intervalo $0.1\omega_0 < \omega < 10\omega_0$ se comien- za con la línea recta que se muestra como una curva contínua en la figura 16.30, que se extiende desde $(0.1\omega_0, 0°)$, hasta $(\omega_0, 90°)$, y termina en $(10\omega_0, 180°)$; con una pendiente de 90°/década.



■ **FIGURA 16.30** La recta de aproximación a la característica de fase correspondiente a $\mathbf{H}(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$ se muestra como una curva contínua y la respuesta de fase verdadera se presenta para $\zeta = 1, 0.5, 0.25$ y 0.1 con líneas punteadas.

Ahora se debe proporcionar alguna corrección a esta curva básica para diversos valores de ζ. De acuerdo con la ecuación [30] se tiene

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = \tan^{-1}\frac{2\zeta(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

Un valor exacto por sobre y otro por debajo de $\omega = \omega_0$ quizás resulten suficientes para dar una forma aproximada a la curva. Si se toma $\omega = 0.5\omega_0$, se encuentra que ang $\mathbf{H}(j0.5\omega_0) = \tan^{-1}(4\zeta/3)$, en tanto que el ángulo es $180° - \tan^{-1}(4\zeta/3)$ en $\omega = 2\omega_0$. Las curvas de la fase se presentan como líneas

punteadas en la figura 16.30 para $\zeta = 1, 0.5, 0.25$ y 0.1; los puntos gruesos identifican valores exactos en $\omega = 0.5\omega_0$ y $\omega = 2\omega_0$.

Si el factor cuadrático aparece en el denominador, las curvas tanto en magnitud como en fase son las *negativas* de las que se acaban de analizar. Se concluye con un ejemplo que contiene factores tanto lineales como cuadráticos.

EJEMPLO 16.10

Construir el diagrama de Bode de la función de transferencia $\mathbf{H(s)} = 100\,000\mathbf{s}/[(\mathbf{s}+1)(10\,000 + 20\mathbf{s} + \mathbf{s}^2)]$.

Considerar primero el factor cuadrático y se ordena de una forma que permita ver el valor de ζ. Se comienza dividiendo el factor de segundo orden por su término constante, 10 000:

$$\mathbf{H(s)} = \frac{10\mathbf{s}}{(1+\mathbf{s})(1+0.002\mathbf{s}+0.0001\mathbf{s}^2)}$$

Una inspección del término $\mathbf{s}^2$ muestra que $\omega_0 = \sqrt{1/0.0001} = 100$. Luego se escribe el término lineal de la cuadrática para mostrar el factor 2, el factor $(\mathbf{s}/\omega_0)$, y por último, el factor ζ:

$$\mathbf{H(s)} = \frac{10\mathbf{s}}{(1+\mathbf{s})[(1+2)(0.1)(\mathbf{s}/100)+(\mathbf{s}/100)^2]}$$

Se puede ver que $\zeta = 0.1$.

Las asíntotas de la curva de respuesta en magnitud se dibujan en líneas delgadas en la figura 16.31: 20 dB para el factor de 10, una línea recta infinita a través de $\omega = 1$ con una pendiente de +20 dB/década para el factor **s**, una esquina en $\omega = 1$ para el polo simple y una esquina en $\omega = 100$ con una pendiente de −40 dB/década para el término de segundo orden en el denominador. Sumando estas cuatro curvas y proporcionando una corrección de +14 dB para el factor cuadrático, se obtiene la curva con trace continuo de la figura 16.31.

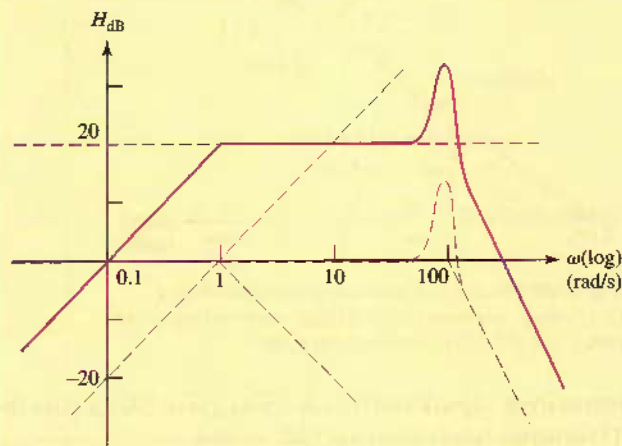


FIGURA 16.31 Diagrama de Bode de la función de transferencia $\mathbf{H(s)} = \dfrac{10\,000\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+1)(10\,000+20\mathbf{s}+\mathbf{s}^2)}$.

La respuesta en fase contiene tres componentes: +90° para el factor **s**; 0° para $\omega < 0.1$, −90° para $\omega > 10$, y −45°/década para el polo simple; y 0° para $\omega < 10$, −180° para $\omega > 1\,000$, y −90° por década para el factor

cuadrático. La adición de estas tres asíntotas, más cierta cantidad de mejora para $\zeta = 0.1$ se presentan como una curva continua en la figura 16.32.

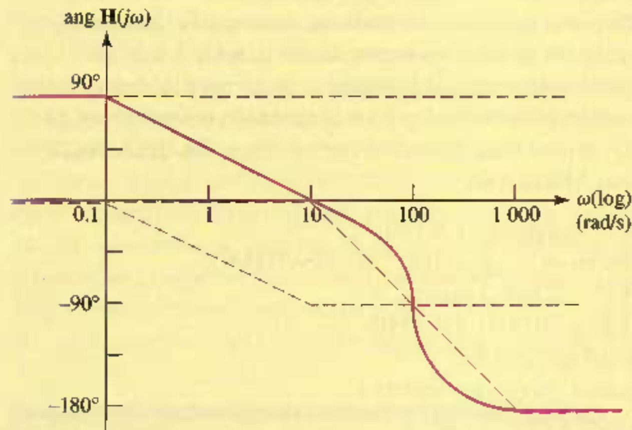


FIGURA 16.32 Diagrama de fase de Bode de la función de transferencia $H(s) = \dfrac{10\,000s}{(s+1)(10\,000 + 20s + s^2)}$.

PRÁCTICA

16.15 Si $\mathbf{H}(s) = 1\,000s^2/(s^2 + 5s + 100)$, dibujar el diagrama de amplitud de Bode y calcular el valor de: (*a*) ω cuando $H_{dB} = 0$; (*b*) H_{dB} a $\omega = 1$; (*c*) H_{dB} a medida que $\omega \to \infty$.

Respuestas: 0.316 rad/s; 20 dB; 60 dB.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

La técnica para generar diagramas de Bode es valiosa. Existen muchas situaciones en las que se necesita con rapidez un diagrama aproximado (por ejemplo en los exámenes o cuando se evalúa una topología de circuito particular para una aplicación específica), y sólo resulta adecuado conocer simplemente la forma general de la respuesta. Además, los diagramas de Bode son invaluables cuando se diseñan filtros, ya que permiten que se seleccionen los factores y los valores de los coeficientes.

En situaciones en las que se requieren las curvas de respuesta *exactas* (como cuando se verifica un diseño de circuito final), el ingeniero dispone de varias opciones asistidas por computadora. La primera técnica que se considerará es el uso de MATLAB para generar una curva de respuesta en frecuencia. A fin de conseguirlo, el circuito debe analizarse primero para obtener la función de transferencia correcta. Sin embargo, no es necesario factorizar o simplificar la expresión.

Considerar el circuito de la figura 16.26. Anteriormente se determinó que la función de transferencia de este circuito puede expresarse como

$$\mathbf{H}(s) = \frac{-2s}{(1 + s/10)(1 + s/20\,000)}$$

(Continúa en la siguiente página)

Se busca una gráfica detallada de esta función sobre el intervalo de frecuencia 100 mrad/s a 1 Mrad/s. Dado que la gráfica final se dibujará en una escala logarítmica, no hay necesidad de espaciar de manera uniforme las frecuencias discretas, sino que, sencillamente, se recurre a la función de MATLAB *logspace*() para generar un vector de frecuencia, donde los primeros dos argumentos representan la potencia de 10 para las frecuencias de inicio y final, respectivamente (−1 y 6 en el ejemplo presente), y el tercer argumento es el número total de puntos que se desea. De tal modo, la serie de instrucciones MATLAB es

```
EDU» w = logspace(−1,6,100);
EDU» denom = (1+j*w/10) .* (1+j*w/20000);
EDU» H = −2*j*w ./ denom;
EDU» Hdb = 20*log10(abs(H));
EDU» semilogx(w,Hdb)
EDU» xlabel('frequency (rad/s)')
EDU» ylabel ('|H(jw)| (dB)')
```

la cual proporciona la gráfica que se describe en la figura 16.33.

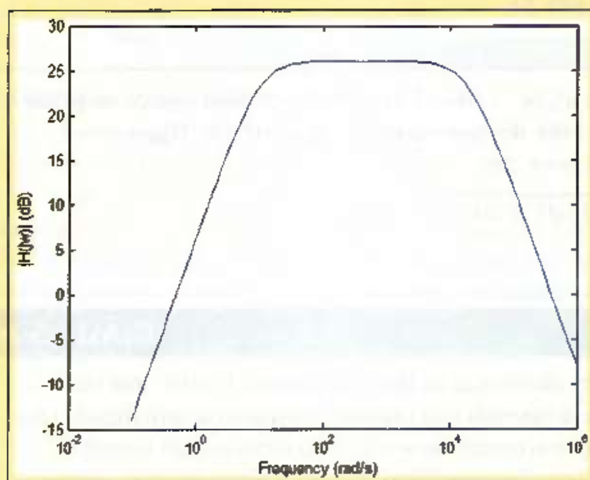


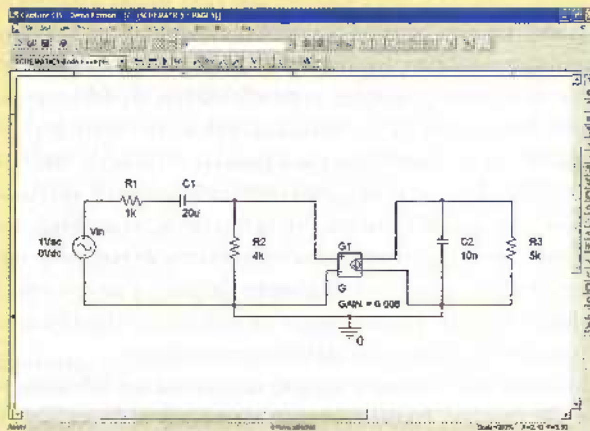
FIGURA 16.33 Gráfica H_{dB} generada utilizando MATLAB.

Vale la pena hacer unos cuántos comentarios acerca del código MATLAB. En primer lugar, observar que se ha sustituido $\mathbf{s} = j\omega$ en la expresión de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$. Además, MATLAB considera la variable w como un vector o matriz unidimensional. Como tal, esta variable provoca dificultades en el denominador de una expresión cuando MATLAB intenta aplicar las reglas del álgebra matricial a cualquier expresión. Por lo tanto, el denominador de $\mathbf{H}(j\omega)$ se calcula en una línea separada, y se requiere el operador "*" en vez de "*", con el objeto de multiplicar los dos términos. Este nuevo operador equivale al siguiente código de MATLAB:

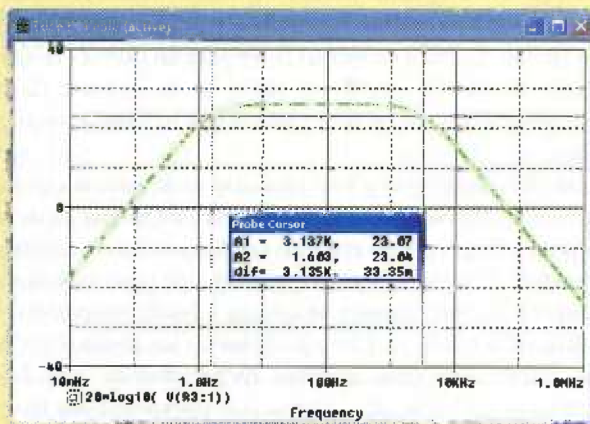
```
EDU» for k = 1:100
denom = (1 + j*w(k)/10) * (1 + j*w(k)/20000);
fin
```

De un modo similar, el nuevo operador "./" se usa en la línea de código subsecuente. Los resultados se desean en dB, por lo que se recurre a la función *log*10() la cual representa el logaritmo natural en MATLAB. Por último, se utiliza un nuevo comando de gráfica; *semilogx*() para generar una gráfica en la que el eje *x* tiene una escala logarítmica. En este punto se recomienda al lector volver a los ejemplos anteriores y utilizar tales técnicas para generar curvas exactas, a fin de compararlas con los correspondientes diagramas de Bode.

PSpice resulta también muy adecuado para generar curvas de respuesta en frecuencia, especialmente para evaluar el diseño final. La figura 16.34*a* muestra el circuito de la figura 16.26, donde la tensión en las terminales de la resistencia R3 representa la tensión de salida deseada. El componente VAC de la fuente se ha empleado con una tensión fija de 1 V por conveniencia. Se requiere de una simulación de barrido en ca para determinar la



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 16.34** (*a*) Circuito de la figura 16.26. (*b*) Respuesta en frecuencia del circuito graficada en escala de dB.

(Continúa en la siguiente página)

respuesta en frecuencia del circuito; la figura 16.34*b* se generó utilizando 10 puntos por década (donde se selecciona la opción Decade del menú **Logarithmic** AC Sweep Type), desde 10 mHz hasta 1 MHz. Observar que la simulación se ha llevado a cabo en Hz, no en rad/s, por lo que la herramienta del cursor está indicando un ancho de banda de 3.14 kHz.

También en este caso, se sugiere al lector que simule circuitos como ejemplo y que compare los resultados con los diagramas de Bode generados con anterioridad.

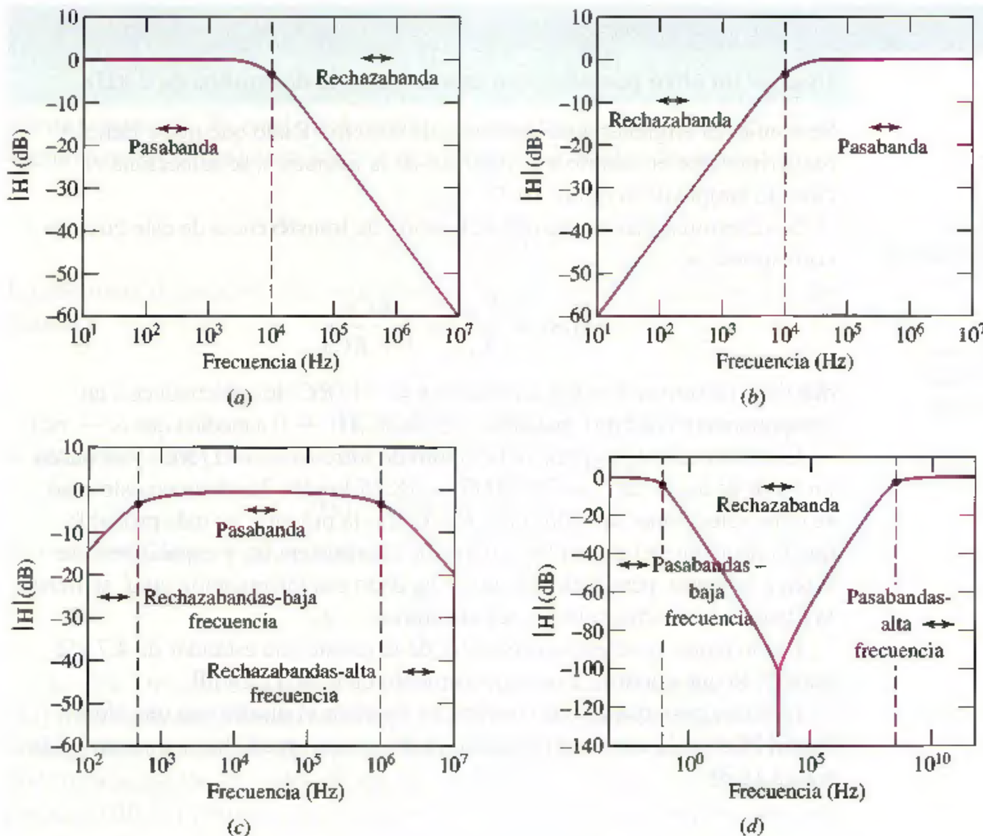
16.7 FILTROS

El diseño de filtros es un tema muy práctico (e interesante) que por sí solo merece un libro de texto separado. En esta ocasión, se presentan algunos de los conceptos básicos del filtrado y se exploran circuitos de filtro tanto pasivos como activos. Estos circuitos pueden ser muy simples, consistiendo en un solo capacitor o inductor, cuya integración a una red determinada propicia un mejor desempeño. También podrían ser bastante complejos, pues pueden constar de muchas resistencias, capacitores, inductores y amp ops para obtener la curva de respuesta precisa que se requiere en una aplicación dada. En la electrónica moderna, los filtros se utilizan para obtener tensiones de cd en los suministros de potencia, eliminar ruido en canales de comunicación, separar canales de radio y de televisión a partir de una señal multiplexada que proporcionan las antenas, y amplificar la señal de bajos en el estéreo, por nombrar sólo algunas aplicaciones.

El concepto implícito en un filtro consiste en que selecciona las frecuencias que pueden pasar a través de una red. Existen diversas variedades, dependiendo de las necesidades de una aplicación particular. Un ***filtro pasabajas***, cuya respuesta se ilustra en la figura 16.35*a*, deja pasar frecuencias debajo de una frecuencia de corte, mientras que amortigua de manera significativa las frecuencias por arriba de dicho corte. Un ***filtro pasaaltas***, en cambio, realiza lo opuesto, como se indica en la figura 16.35*b*. La cifra de mérito clave para un filtro es la agudeza del corte, o el grado de inclinación de la curva en la cercanía de la frecuencia de esquina. En general, las curvas de respuesta más inclinadas requieren circuitos más complejos.

La combinación de un filtro pasabajas y uno pasaaltas es lo que se conoce como ***filtro pasabanda***, como se presenta mediante la curva de respuesta de la figura 16.35*c*. En este tipo de filtro, la región entre las dos frecuencias de esquina se conoce como ***pasabandas***; la región fuera de la banda de paso se conoce como ***rechazabandas***. Estos términos también se aplican a los filtros pasabajas y pasaaltas, como se indica en la figura 16.35*a* y *b*. Al barrer las frecuencias de corte de los dos filtros, también se crea un ***filtro rechazabanda***, que deja pasar frecuencias tanto altas como bajas, pero atenúa cualquier señal que tenga una frecuencia entre las dos frecuencias de esquina (figura 16.35*d*).

El ***filtro muesca*** es un filtro rechazabanda especializado que se diseña con una característica de respuesta estrecha, lo cual bloquea un solo componente de frecuencia de una señal. También existen ***filtros multibanda***; se trata de circuitos que tienen múltiples bandas de paso y de supresión. El diseño de tales filtros es directo, pero se encuentra más allá del alcance de este libro.



■ **FIGURA 16.35** Curvas de respuesta en frecuencia de (*a*) filtro pasabajas; (*b*) filtro pasaaltas; (*c*) filtro pasabanda; (*d*) filtro rechazabanda. En cada diagrama, cada punto corresponde a −3 dB.

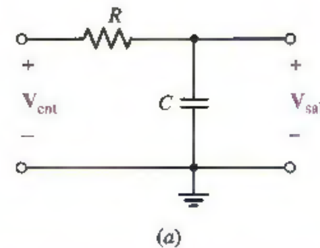
Filtros pasivos pasabajas y pasaaltas

Se puede construir un filtro mediante el empleo de un solo capacitor y una sola resistencia, como se ve en la figura 16.36*a*. La función de transferencia de este circuito de filtro pasabajas es,

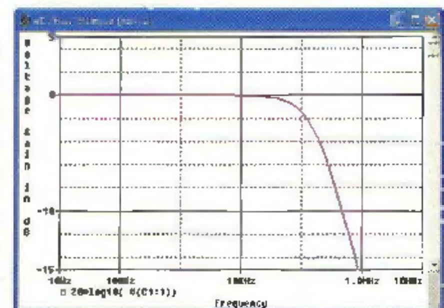
$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = \frac{1}{1 + RC\mathbf{s}} \qquad [32]$$

H(**s**) tiene una sola frecuencia de esquina, la cual ocurre en $\omega = 1/RC$, y un cero en $\mathbf{s} = \infty$, lo cual propicia su comportamiento de filtrado "pasabajas". Las frecuencias bajas ($\mathbf{s} \to 0$) producen $|\mathbf{H}(\mathbf{s})|$ cerca de su valor máximo (la unidad o 0 dB), y las frecuencias altas ($\mathbf{s} \to \infty$) originan $|\mathbf{H}(\mathbf{s})| \to 0$. Este comportamiento se entiende en forma cualitativa al considerar la impedancia del capacitor: a medida que aumenta la frecuencia, el capacitor empieza a actuar como un cortocircuito para las señales de ca, lo que da lugar a una reducción en la tensión de salida. En la figura 16.36*b* se presenta el ejemplo de una curva de respuesta de un filtro de tales características con $R = 500\ \Omega$ y $C = 2$ la frecuencia de esquina de 159 kHz (1 Mrad/s) se determina moviendo el cursor hacia −3 dB. Lo anguloso de la curva de respuesta en la vecindad de la frecuencia de corte se mejora al moverse hacia un circuito que contenga elementos reactivos adicionales (es decir, capacitivos y/o inductivos).

Un filtro pasaaltas se construye barriendo simplemente las ubicaciones de la resistencia y del capacitor en la figura 16.36*a*, como se ve en el ejemplo siguiente.



(*a*)

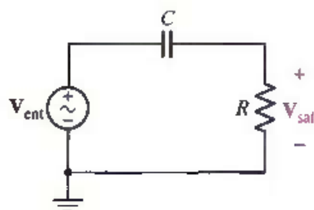


(*b*)

■ **FIGURA 16.36** (*a*) Filtro pasabajas simple construido mediante una combinación resistencia - capacitor. (*b*) Respuesta en frecuencia del circuito generado utilizando PSpice.

EJEMPLO 16.11

Diseñar un filtro pasaaltas con una frecuencia de esquina de 3 kHz.



■ **FIGURA 16.37** Circuito de filtro pasaaltas simple para el que deben elegirse los valores de R y C a fin de obtener una frecuencia de corte de 3 kHz.

Se comienza eligiendo una topología de circuito. Dado que no se indican requerimientos en cuanto a lo riguroso de la respuesta, se selecciona el circuito simple de la figura 16.37.

Se determina fácilmente que la función de transferencia de este circuito corresponde a

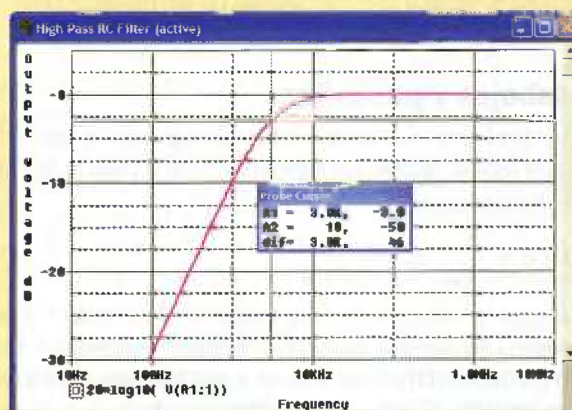
$$\mathbf{H(s)} \equiv \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_x} = \frac{RC\mathbf{s}}{1 + RC\mathbf{s}}$$

que tiene un cero en $\mathbf{s} = 0$ y un polo en $\mathbf{s} = -1/RC$, lo que conduce a un comportamiento de filtro "pasaaltas" (es decir, $|\mathbf{H}| \to 0$ a medida que $\omega \to \infty$).

La frecuencia de esquina del circuito de filtro es $\omega_c = 1/RC$, y se busca un valor de $\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi(3000) = 18.85$ krad/s. También en este caso se debe seleccionar un valor para R o C. En la práctica, es más probable que la decisión se base en los valores de las resistencias y capacitores que estén a la mano, pero dado que no se ha dado esa información aquí, se tiene la libertad de efectuar elecciones arbitrarias.

Por lo tanto, se selecciona el valor de la resistencia estándar de 4.7 kΩ para R, lo que conduce a un requerimiento de $C = 11.29$ nF.

El único paso que queda consiste en verificar el diseño con una simulación PSpice; la curva de respuesta en frecuencia predicha se muestra en la figura 16.38.



■ **FIGURA 16.38** Respuesta en frecuencia simulada del diseño final, en el que se muestra una frecuencia de corte (3 dB) de 3 kHz, como se esperaba.

PRÁCTICA

16.16 Diseñar un filtro pasaaltas con una frecuencia de corte de 13.56 MHz, frecuencia común de un suministro de potencia de rf. Verificar el diseño con PSpice.

Filtro pasabandas

En este capítulo ya se han visto varios circuitos que se clasificarían como filtros "pasabandas" (por ejemplo, las figuras 16.1 y 16.8). Considerar el circuito simple de la figura 16.39, en el que la salida se toma a través de la resistencia. Se encuentra con facilidad que la función de transferencia de este circuito es

$$\mathbf{A}_V = \frac{s RC}{LCs^2 + RCs + 1} \tag{33}$$

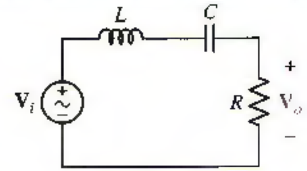


FIGURA 16.39 Filtro pasabandas simple construido mediante el uso de un circuito *RLC* en serie.

La magnitud de esta función es (después de unas cuantas manipulaciones algebraicas)

$$|\mathbf{A}_V| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{34}$$

la cual, en el límite de $\omega \to 0$, se convierte en

$$|\mathbf{A}_V| \approx \omega RC \to 0$$

y en el límite de $\omega \to \infty$ se vuelve

$$|\mathbf{A}_V| \approx \frac{R}{\omega L} \to 0$$

Se sabe a través de la experiencia con los diagramas de Bode que la ecuación [33] representa tres frecuencias críticas: un cero y dos polos. Con la finalidad de obtener una respuesta de filtro pasabandas con un valor pico unitario (0 dB), las dos frecuencias de los polos deben ser mayores que 1 rad/s, la frecuencia de cruce a 0 dB del término cero. Estas dos frecuencias críticas pueden obtenerse factorizando la ecuación [33] o determinando los valores de ω en los que la ecuación [34] es igual a $1/\sqrt{2}$. La frecuencia central de este filtro se presenta en $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Por lo tanto, si se aplica un poco de álgebra después de fijar la ecuación [34] igual a $1/\sqrt{2}$, se puede encontrar que

$$\left(1 - LC\omega_c^2\right)^2 = \omega_c^2 R^2 C^2 \tag{35}$$

Al tomar la raíz cuadrada en ambos lados, se obtiene

$$LC\omega_c^2 + RC\omega_c - 1 = 0$$

Mediante el empleo de la ecuación cuadrática, se encuentra que

$$\omega_c = -\frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \tag{36}$$

En este contexto, la frecuencia negativa es una solución no física para la ecuación original, por lo que es necesario retener sólo la raíz positiva de la ecuación [36]. Sin embargo, quizá se ha ido un poco rápido al tomar la raíz cuadrada positiva de ambos lados de la ecuación [35]. Tomando en cuenta también la raíz cuadrada negativa, la cual es igualmente válida, se obtiene

$$\omega_c = \frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \tag{37}$$

a partir de la cual se puede demostrar que sólo el radicando positivo es físico. Por ende, se obtiene ω_L a partir de la ecuación [36] y ω_H a partir de la ecuación [37]; puesto que $\omega_H - \omega_L = \mathcal{B}$, por simple álgebra se demuestra que $\mathcal{B} = R/L$.

EJEMPLO 16.12

Diseñar un filtro pasabanda caracterizado por un ancho de banda de 1 MHz y uno de corte de alta frecuencia de 1.1 MHz.

Se elige la topología del circuito de la figura 16.37 y se comienza determinando las frecuencias de esquina necesarias. El ancho de banda está dado por $f_H - f_L$, por lo que

$$f_L = 1.1 \times 10^6 - 1 \times 10^6 = 100 \text{ kHz}$$

y

$$\omega_L = 2\pi f_L = 628.3 \text{ krad/s}$$

El corte de alta frecuencia (ω_H) es simplemente 6.912 Mrad/s.

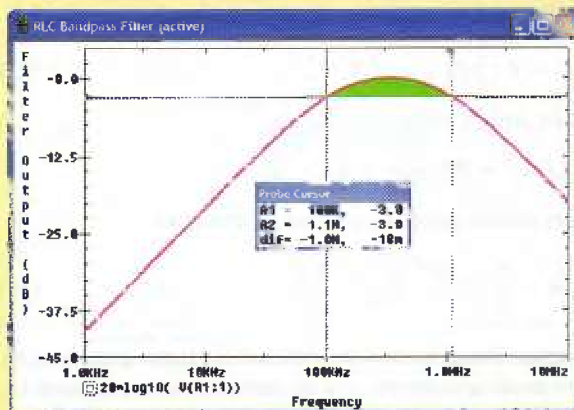
Con la finalidad de proceder al diseño de un circuito con estas características, se requiere obtener la expresión de cada frecuencia, en términos de las variables R, L y C.

El igualar la ecuación [37] con $2\pi(1.1 \times 10^6)$ permite resolver respecto a $1/LC$, pues ya se sabe que $\mathcal{B} = 2\pi(f_H - f_L) = 6.283 \times 10^6$.

$$\frac{1}{2}\mathcal{B} + \left[\frac{1}{4}\mathcal{B}^2 + \frac{1}{LC}\right]^{1/2} = 2\pi(1.1 \times 10^6)$$

Resolviendo, se observa que $1/LC = 4.343 \times 10^{12}$. Al elegir de manera arbitraria $L = 1$ H (un poco grande, en términos prácticos), se obtiene $R = 6.283$ MΩ y $C = 230.3$ fF. Se debe observar que no hay una solución única para este problema de "diseño", pues tanto R, L o C pueden elegirse como punto de partida.

La verificación del diseño con PSpice se muestra en la figura 16.40.



■ **FIGURA 16.40** Respuesta simulada del diseño de un filtro pasabandas que muestra un ancho de banda de 1 MHz y una frecuencia de corte superior de 1.1 MHz como se deseaba. Las frecuencias pasabanda se sombrearon en color verde.

PRÁCTICA

16.17 Diseñar un filtro pasabanda con un corte de baja frecuencia de 100 rad/s o uno de alta frecuencia de 10 krad/s.

Respuestas: Una posible respuesta de muchas: $R = 990\,\Omega$, $L = 100$ mH y $C = 10\,\mu$F.

El tipo de circuito que se ha estudiado se conoce como ***filtro pasivo***, pues se construye sólo a partir de componentes pasivos (es decir, sin transistores, amp ops u otros elementos "activos"). Aunque los filtros pasivos son relativamente comunes, no son muy adecuados para todas las aplicaciones. La ganancia (definida como la tensión de salida dividida entre la tensión de entrada) de un filtro pasivo resulta difícil de establecer, y muchas veces es deseable la amplificación en los circuitos de filtro.

Filtros activos

El uso de un elemento activo, como el amp op, en el diseño de filtros, supera por mucho las desventajas de los filtros pasivos. Como se vio en el capítulo 6, se diseñan circuitos de amp op para proporcionar ganancia. Asimismo, estos circuitos pueden presentar un comportamiento similar al de los inductores mediante la ubicación estratégica de capacitores.

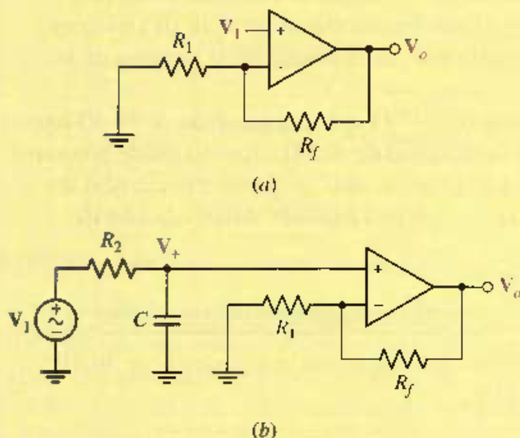
La circuitería interna de un amp op tiene capacitancias muy pequeñas (por lo común del orden de 100 pF), las cuales limitan la frecuencia máxima a la que el op amp funcionará de manera apropiada. En consecuencia, cualquier circuito de amp op se comportará como un filtro pasabajas con una frecuencia de corte de quizás 20 MHz o más en dispositivos modernos (lo cual depende de la ganancia del circuito).

EJEMPLO 16.13

Diseñar un filtro pasabajas activo con una frecuencia de corte de 10 kHz y una ganancia de tensión de 40 dB.

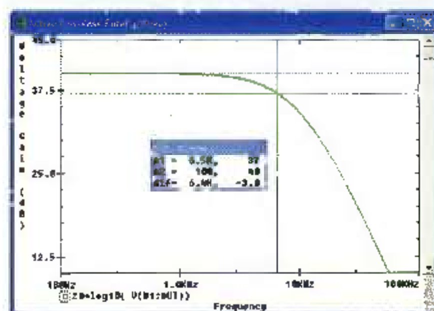
Para frecuencias mucho menores de 10 kHz, se requiere un circuito amplificador capaz de proporcionar una ganancia de 40 dB, o 100 V/V. Lo anterior se logra utilizando sólo un amplificador no inversor (como el de la figura 16.41*a*) con

$$\frac{R_f}{R_1} + 1 = 100$$

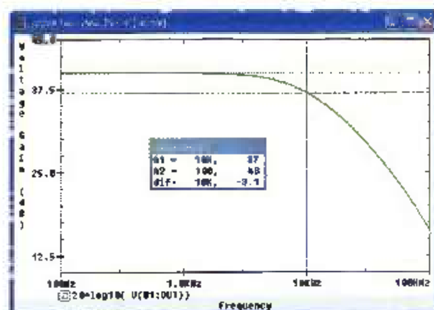


■ **FIGURA 16.41** (*a*) Circuito de amp op no inversor simple. (*b*) Filtro pasabajas que consta de una resistencia R_2 y de un capacitor C que se ha agregado a la entrada.

(Continúa en la siguiente página)



(*a*)



(*b*)

FIGURA 16.42 (*a*) Respuesta en frecuencia del circuito de filtro utilizando un amp op μA741 en el que se muestra una frecuencia de esquina de 6.4 kHz. (*b*) Respuesta en frecuencia del mismo circuito de filtro, pero utilizando ahora un amp op LF111. La frecuencia de corte del circuito es igual a 10 kHz, que es el valor deseado.

Para proveer una esquina de alta frecuencia a 10 kHz, se requiere un filtro pasabajas en la entrada del amp op (como en la figura 16.41*b*). Para calcular la función de transferencia, se comienza en la entrada no inversora,

$$\mathbf{V}_+ = \mathbf{V}_i \frac{1/sC}{R_2 + 1/sC} = \mathbf{V}_i \frac{1}{1 + sR_2C}$$

En la entrada inversora se tiene

$$\frac{\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_+}{R_f} = \frac{\mathbf{V}_+}{R_1}$$

Al combinar ambas ecuaciones y despejar $\mathbf{V}_o$ se encuentra que

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_i \left(\frac{1}{1 + sR_2C}\right)\left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right)$$

El valor máximo de la ganancia $\mathbf{A}_V = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ es $1 + R_f/R_1$, por lo que se iguala esta cantidad a 100. En razón de que ninguna resistencia aparece en la expresión de la frecuencia de esquina $(R_2C)^{-1}$, cualquiera puede elegirse primero. Por lo tanto, se selecciona $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$, de manera que $R_f = 99\ \text{k}\Omega$.

Al elegir de manera arbitraria $C = 1\ \mu\text{F}$, se encuentra que

$$R_2 = \frac{1}{2\pi(10 \times 10^3)C} = 15.9\ \Omega$$

En este punto se completa el diseño, ¿o no? La respuesta en frecuencia simulada en este circuito se muestra en la figura 16.42*a*.

Resulta del todo claro que, en realidad, el diseño no cumple la especificación del corte de 10 kHz. ¿Qué se hizo mal? Una revisión cuidadosa del álgebra no revela ningún error, por lo que en alguna parte se planteó un supuesto erróneo. La simulación se llevó a cabo utilizando un amp op μA741 en oposición al amp op ideal supuesto en las deducciones. Resulta que ésta es la fuente del desconcierto: el mismo circuito con un amp op LF111 en vez del μA741 origina una frecuencia de corte de 10 kHz como se desea. El resultado de la simulación correspondiente se presenta en la figura 16.42*b*.

Desafortunadamente, el amp op μA741 con una ganancia de 40 dB tiene una frecuencia de esquina en la vecindad de 10 kHz, que no puede ignorarse en este caso. Sin embargo, el LF111 no alcanza su primera frecuencia de esquina sino hasta casi 75 kHz, lo cual está bastante alejado de 10 kHz como para afectar el diseño.

PRÁCTICA

16.18 Diseñar un circuito de filtro pasabajas con una ganancia de 30 dB y una frecuencia de corte de 1 kHz.

Respuesta: Una posible respuesta de muchas: $R_1 = 100\ \text{k}\Omega$, $R_f = 3.062\ \text{M}\Omega$, $R_2 = 79.58\ \Omega$ y $C = 2\ \mu\text{F}$.

Ajuste de bajos, agudos e intermedios

Por lo general es deseable contar con capacidad para ajustar los bajos, agudos e intermedios de manera independiente en un sistema de sonido, incluso en el caso de un equipo económico. Suele aceptarse que el intervalo de frecuencias de audio (al menos para el oído humano) va de 20 Hz a 20 kHz, con los bajos a frecuencias inferiores (< 500 Hz más o menos) y los agudos a frecuencias superiores (> 5 kHz aproximadamente).

El diseño de un sistema ecualizador gráfico simple se convierte en una tarea relativamente sencilla, aunque un sistema como el que se muestra en la figura 16.43 requiere de un poco más de esfuerzo. En el ecualizador tipo bajo, intermedio y agudo comunes en muchos radios portátiles, la señal principal (proporcionada por el circuito receptor de radio, o quizás un reproductor de CD) se compone de un amplio espectro de frecuencias que tienen un ancho de banda de casi 20 kHz.

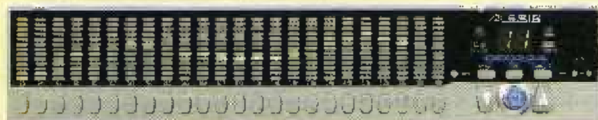


FIGURA 16.43 Ejemplo de un ecualizador gráfico. Cortesía de Alesis.

Esa señal debe enviarse a tres diferentes circuitos de amp op, cada uno con un filtro diferente en la entrada. El circuito de ajuste de bajos requerirá un filtro pasabajas; el circuito de ajuste de agudos, uno pasaaltas y el circuito de ajuste intermedio, un filtro pasabanda. La salida de cada circuito de amp op se alimenta luego a un circuito amplificador sumador; en la figura 16.44 se presenta el diagrama de bloques del circuito completo.

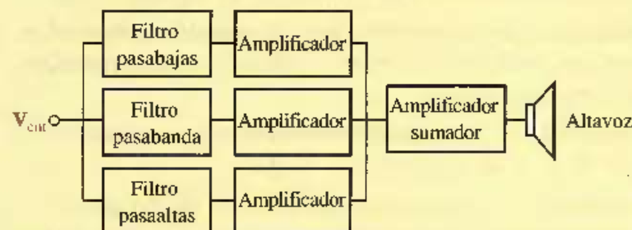


FIGURA 16.44 Diagrama de bloques de un circuito ecualizador gráfico simple.

El bloque constitutivo básico se indica en la figura 16.45. El circuito consiste en un circuito de amp op inversor caracterizado por una ganancia de tensión de $1 + R_f/R_1$, y un filtro pasabajas simple compuesto por una resistencia R_2 y un capacitor C. La resistencia de retroalimentación R_f es una resistencia variable (conocida algunas veces como ***potenciómetro***), el cual permite modificar la ganancia mediante la rotación de una perilla; las

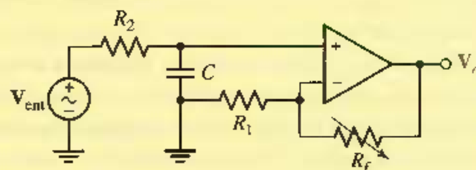


FIGURA 16.45 Sección de ajuste de bajos del circuito amplificador.

personas comunes llamarían a esta resistencia el control de volumen. La red del filtro pasabajas restringe las frecuencias que entrarán al amp op, y en consecuencia las que se amplificarán; la frecuencia de esquina es simplemente $(R_2C)^{-1}$. Si el diseñador de circuitos necesita que el usuario también elija la frecuencia de corte del filtro, tal vez R_2 se sustituya por un potenciómetro, o de manera alterna, C podría reemplazarse por un capacitor variable. Las etapas restantes se construyen en esencia de la misma manera, aunque con diferente red de filtro en la entrada.

Para mantener independientes las resistencias, capacitores y amp ops, se requiere agregar un subíndice apropiado a cada uno, como una indicación de la etapa a la que pertenecen (t, m, b). Empezando con la etapa de agudos, ya se han encontrado problemas al usar el μA741 en el intervalo de 10 a 20 kHz a ganancia elevada; de modo que quizá el LF111 sea una mejor elección en este caso. Al elegir una frecuencia de corte de agudos de 5 kHz (existe cierta variación entre los valores elegidos por diferentes diseñadores de circuitos de audio), se requiere

$$\frac{1}{R_{2t}C_t} = 2\pi(5 \times 10^3) = 3.142 \times 10^4$$

La elección arbitraria de $C_t = 1\mu$F produce un valor requerido de 31.83 Ω para R_{2t}. Al seleccionar también $C_b = 1\ \mu$F (quizá se pueda negociar una reducción de la cantidad), es necesario que $R_{2b} = 318.3\ \Omega$ para una frecuencia de corte bajo de 500 Hz. Se deja al lector el diseño de un filtro pasabanda adecuado.

La parte siguiente del diseño implica la selección de valores adecuados para R_{1t} y R_{1b}, así como las correspondientes resistencias de retroalimentación. Sin ninguna instrucción contraria, es probable que lo más simple sea igualar ambas etapas. Por lo tanto, de modo arbitrario se elige tanto a R_{1t} como a R_{1b} iguales a 1 kΩ, y a R_{ft} y a R_{fb} como potenciómetros de 10 kΩ (lo que significa que el intervalo será de 0 a 10 kΩ). Lo anterior permite que el volumen de una señal sea hasta 11 veces más fuerte que el de la otra. En caso de que se necesite que el diseño sea portátil, se deben seleccionar tensiones de suministro de ±9 V aunque este valor podría cambiarse si así fuere necesario.

(Continúa en la siguiente página)

Ahora que se ha completado el diseño de la etapa de filtro, está listo para considerar el diseño de la etapa sumadora. En bien de la simplicidad, se debe accionar esta etapa de amp op con las mismas fuentes de tensión que las otras etapas, lo cual limita la magnitud máxima de la tensión de salida a menos de 9 V. Se utiliza una configuración de amp op inversor, con la salida de cada una de las etapas de amp op de filtro alimentadas de manera directa a su propia resistencia de 1 kΩ. La otra terminal de cada resistencia de 1 kΩ se conecta entonces a la entrada inversora de la etapa del amplificador sumador. El potenciómetro apropiado para la etapa de amplificador sumador debe escogerse de manera que se evite la saturación, por lo que se requiere saber tanto el intervalo de la tensión de entrada como la potencia en watts del altavoz de salida.

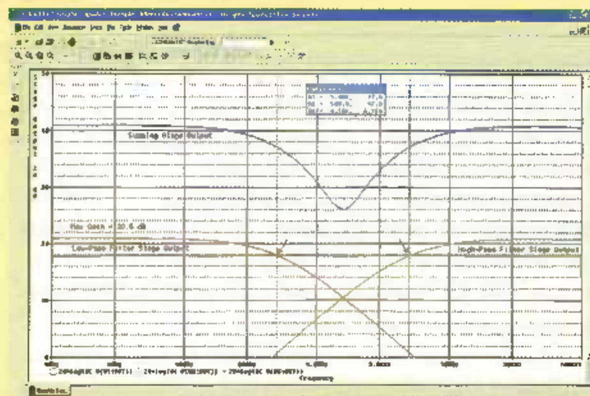


FIGURA 16.46 Respuesta en frecuencia simulada de la combinación de filtros pasabajas y pasaaltas.

RESUMEN Y REPASO

- La resonancia es la condición en la que una función forzada senoidal fija produce una respuesta de amplitud máxima.
- Una red eléctrica está en resonancia cuando la tensión y la corriente en las terminales de entrada de la red están en fase.
- El factor de calidad es proporcional a la energía máxima almacenada en una red, dividida entre la energía total perdida por periodo.
- Una frecuencia de media potencia se define como la frecuencia a la que la magnitud de la función de respuesta de circuito se reduce hasta $1/\sqrt{2}$ veces su valor máximo.
- El ancho de banda de un circuito resonante se define como la diferencia entre las frecuencias de media potencia superior e inferior.
- Un circuito de alta Q es un circuito resonante en el que el factor de calidad es ≥ 5.
- En un circuito de alta Q, cada frecuencia de media potencia se ubica aproximadamente a medio ancho de banda de la frecuencia resonante.
- Un circuito resonante en serie se caracteriza por una impedancia *baja* en la resonancia, en tanto que un circuito resonante en paralelo se determina por una impedancia *alta* en la resonancia.
- Un circuito resonante en serie y un circuito resonante en paralelo son equivalentes si $R_p = R_s(1 + Q^2)$ y $Xp = X_s(1 + Q^{-2})$.
- Los valores imprácticos de los componentes hacen que el diseño sea a menudo más fácil. La función de transferencia de una red se podría ajustar en magnitud o en frecuencia mediante valores de sustitución apropiados para los componentes.
- Los diagramas de Bode permiten que la forma burda de la función de transferencia se grafique con rapidez, a partir de los polos y los ceros.
- Los cuatro tipos básicos de filtros son: pasabajas, pasaaltas, pasabanda y rechazabanda.
- Los filtros pasivos sólo utilizan resistencias, capacitores e inductores; los filtros activos se basan en los amp op o en otros elementos activos.

LECTURAS ADICIONALES

El estudio de una gran variedad de filtros puede encontrarse en

J.T.Taylor y Q. Huang, eds., *CRC Handbook of Electrical Filters*. Boca Raton, Fla: CRC Press,1977.

Una compilación muy completa de varios circuitos con filtros activos y procedimientos de diseño se proporciona en

D. Lancaster, *Lancaster's Active Filter Cookbook*, 2a. ed. Burlington, Mass.: Newnes, 1996.

EJERCICIOS

16.1 Resonancia en paralelo

1. Un circuito *RLC* en paralelo tiene $R = 1\ \text{k}\Omega$, $C = 47\ \mu\text{F}$ y $L = 11$ mH. (*a*) Calcular Q_0. (*b*) Determinar la frecuencia resonante (en Hz). (*c*) Graficar la respuesta en tensión como una función de la frecuencia, si el circuito se excita mediante una fuente de corriente de estado permanente senoidal de 1 mA.
2. En un circuito *RLC* en paralelo se mide un valor de Q_0 de 200. Determinar el valor de los componentes restantes si: (*a*) $R = 1\ \Omega$ y $C = 1\ \mu\text{F}$; (*b*) $L = 12$ fH y $C = 2.4$ nF; (*c*) $R = 121.7\ \text{k}\Omega$ y $L = 100$ pH.
3. Un varactor es un dispositivo semiconductor cuya reactancia se podría variar aplicando una tensión de polarización. Es posible expresar el factor de calidad[4] como:

$$Q \approx \frac{\omega C_J R_P}{1 + \omega^2 C_J^2 R_P R_S}$$

donde C_J es la capacitancia de la unión (que depende de la tensión aplicada al dispositivo), R_S es la resistencia en serie del dispositivo y R_P es un término de resistencia en paralelo equivalente. (*a*) Si $C_J = 3.77$ pF a 1.5 V, $R_P = 1.5\ \text{M}\Omega$, y $R_S = 2.8\ \Omega$, graficar el factor de calidad como una función de la pulsación ω. (*b*) Derivar la expresión de Q a fin de obtener tanto ω_0 correspondiente a $Q_{\text{máx}}$.
4. Determinar Q para: (*a*) una pelota de ping pong; (*b*) una moneda; (*c*) este libro de texto. Asegurarse de proporcionar detalles precisos de las condiciones de medición y de cualesquiera observaciones que se realicen, incluyendo promedios u otros análisis estadísticos.
5. Un circuito resonante en paralelo tiene valores de parámetros de $\alpha = 80$ Np/s y $\omega_d = 1\,200$ rad/s. Si la impedancia en $\mathbf{s} = -2\alpha + j\omega_d$ tiene una magnitud de $400\ \Omega$, calcular Q_0, R, L y C.
6. Encontrar la frecuencia resonante de la red de dos terminales que se muestra en la figura 16.47.

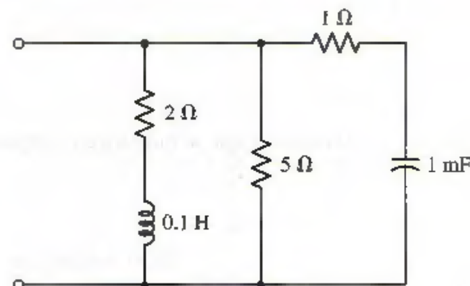


FIGURA 16.47

7. Sea $R = 1\ \text{M}\Omega$, $L = 1$ H, $C = 1\mu\text{F}$ e $\mathbf{I} = 10\underline{/0^\circ}\ \mu\text{A}$ en el circuito de la figura 16.1. (*a*) Proporcionar ω_0 y Q_0. (*b*) Graficar $|\mathbf{V}|$ como una función de ω, para $995 < \omega < 1\,005$ rad/s.

(4) S. M. Sze, *Physics of Semiconductor Devices*, 2a. ed. Nueva York: Wiley, 1981, p. 116.

8. En la red que se muestra en la figura 16.48, calcular: (*a*) la frecuencia resonante ω_0; (*b*) $\mathbf{Z}_{ent}(j\omega_0)$.

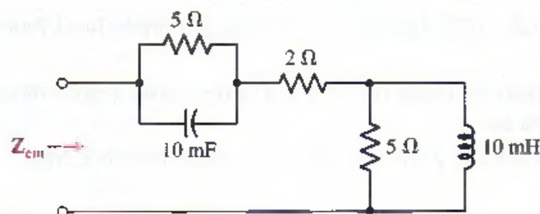


FIGURA 16.48

9. Un circuito resonante en paralelo tiene polos de impedancia en $\mathbf{s} = -50 \pm j1\,000\ \text{s}^{-1}$, y un cero en el origen. Si $C = 1\ \mu\text{F}$: (*a*) Determinar L y R; (*b*) calcular $\mathbf{Z}$ en $\omega = 1\,000$ rad/s.

10. Diseñar un circuito resonante en paralelo para un radio de AM, de manera que un inductor variable ajuste la frecuencia resonante a lo largo de la banda de transmisión de AM (de 535 a 1 605 kHz) con $Q_0 = 45$ en un extremo de la banda, y $Q_0 \leq 45$ a lo largo de la banda. Sea $R = 20\ \text{k}\Omega$, y especificar los valores de C, $L_{mín}$ y $L_{máx}$.

11. (*a*) Determinar $\mathbf{Y}_{ent}$ para la red de la figura 16.49. (*b*) Determinar ω_0 y $\mathbf{Z}_{ent}(j\omega_0)$ para la red.

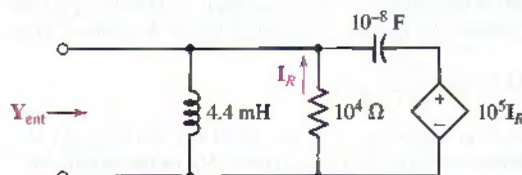


FIGURA 16.49

12. Determinar la frecuencia de resonancia para $t > 0$ para la red que se muestra en la figura 16.50.

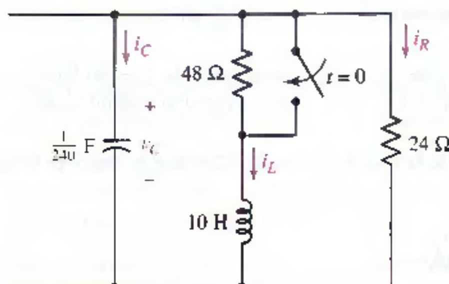


FIGURA 16.50

13. Determinar la frecuencia resonante para $t > 0$ de la red que se muestra en la figura 16.51.

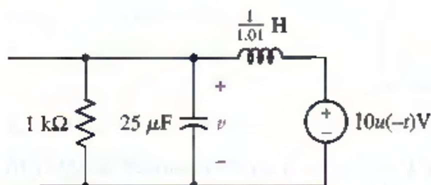


FIGURA 16.51

14. (*a*) En el circuito de la figura 16.52, sea $L = 1$ mH, $C = 1$ mF y R tal que $\alpha = 100\ \text{s}^{-1}$. Determinar la frecuencia resonante y la impedancia $\mathbf{Z}_{ent}$ a la frecuencia resonante. (*b*) Verificar la respuesta utilizando una simulación en PSpice. (Sugerencia: utilizar la fuente VAC e incluir una resistencia con valor despreciable en serie a fin de evitar que el inductor ponga en cortocircuito a la fuente durante la polarización en CD llevada a cabo de manera automática).

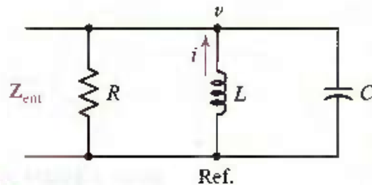


FIGURA 16.52

15. (*a*) En el circuito de la figura 16.52, sea $L = 1$ mH, R tal que $\alpha = 50\ \text{s}^{-1}$ y C tal que $\omega_d = 5\,000$ rad/s. Determinar la frecuencia resonante y la impedancia $\mathbf{Z}_{ent}$ a la frecuencia resonante. (*b*) Verificar la respuesta utilizando una simulación en PSpice. (Sugerencia: utilizar la fuente VAC e incluir una resistencia con valor despreciable en serie a fin de evitar que el inductor ponga en cortocircuito a la fuente durante la polarización en CD llevada a cabo de manera automática.)

16.2 Ancho de banda y circuitos con alta *Q*

16. Un circuito resonante en paralelo tiene $\omega_0 = 100$ rad/s, $Q_0 = 80$ y $C = 0.2\ \mu$F. (*a*) Determinar R y L. (*b*) Utilizar métodos aproximados para graficar $|\mathbf{Z}|$ en función de ω.

17. Utilizar las relaciones exactas para determinar R, L y C en un circuito resonante en paralelo que tiene $\omega_1 = 103$ rad/s, $\omega_2 = 118$ rad/s y $|\mathbf{Z}(j105)| = 10\ \Omega$.

18. Sea $\omega_0 = 30$ krad/s, $Q_0 = 10$ y $R = 600\ \Omega$ en cierto circuito resonante en paralelo. (*a*) Determinar el ancho de banda. (*b*) Calcular N en $\omega = 28$ krad/s. (*c*) Utilizar métodos aproximados para determinar $\mathbf{Z}_{ent}(j28\,000)$. (*d*) Proporcionar el verdadero valor de $\mathbf{Z}_{ent}(j28\,000)$. (*e*) Establecer el porcentaje de error en el que se incurre utilizando relaciones aproximadas para calcular $|\mathbf{Z}_{ent}|$ y ang $\mathbf{Z}_{ent}$ a 28 krad/s.

19. Un circuito resonante en paralelo, es resonante a 400 Hz con $Q_0 = 8$ y $R = 500\ \Omega$. Si una corriente de 2 mA se aplica al circuito, utilizar métodos aproximados para determinar la frecuencia cíclica de la corriente si: (*a*) la tensión en el circuito tiene una magnitud de 0.5 V; (*b*) la corriente en la resistencia tiene una magnitud de 0.5 mA.

20. Un circuito resonante en paralelo tiene $\omega_0 = 1$ Mrad/s y $Q_0 = 10$. Si $R = 5$ kΩ encontrar: (*a*) L; (*b*) la frecuencia arriba de ω_0 para la cual $|\mathbf{Z}_{ent}| = 2$ kΩ; (*c*) la frecuencia para la cual ang $\mathbf{Z}_{ent} = -30°$.

21. Utilizar buenas aproximaciones en el circuito de la figura 16.53 para: (*a*) determinar ω_0; (*b*) calcular $\mathbf{V}_1$ a la frecuencia resonante; (*c*) obtener $\mathbf{V}_1$ a una frecuencia que está 15 krad/s arriba de la resonancia.

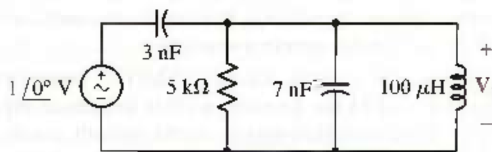


FIGURA 16.53

22. (*a*) Aplicar la definición de resonancia a fin de encontrar ω_0 de la red de la figura 16.54. (*b*) Proporcionar $\mathbf{Z}_{ent}(j\omega_0)$.

23. Un circuito resonante en paralelo se caracteriza por $f_0 = 1\,000$ Hz, $Q_0 = 40$, y $|\mathbf{Z}_{ent}(j\omega_0)| = 2$ kΩ. Utilizar las relaciones aproximadas para determinar: (*a*) $\mathbf{Z}_{ent}$ a 1010 Hz; (*b*) el intervalo de frecuencia sobre el cual las aproximaciones son razonablemente precisas.

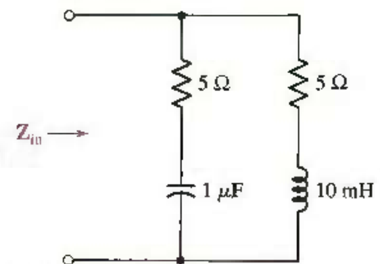


FIGURA 16.54

24. Determinar el ancho de banda de cada una de las curvas de respuesta que se muestran en la figura 16.55.

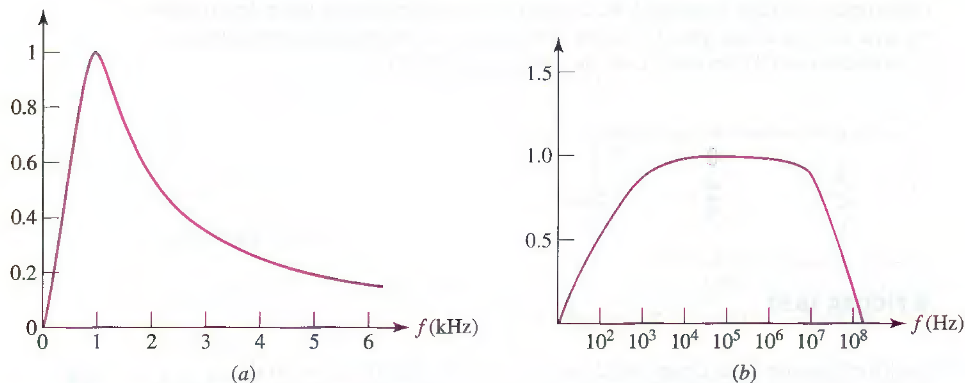


FIGURA 16.55

25. Se sabe que un circuito resonante en paralelo tiene un ancho de banda de 1 MHz y una frecuencia de media potencia $f_1 = 5.5$ kHz. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia superior de media potencia (en Hz)? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia resonante f_0 del circuito? (*c*) ¿Cuál es el factor de calidad del circuito cuando trabaja a su frecuencia de resonancia?

26. Se sabe que un circuito resonante en paralelo tiene un ancho de banda de 1 GHz y una frecuencia de media potencia $f_1 = 75.3$ MHz. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia superior de media potencia (en Hz)? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia resonante f_0 del circuito? (*c*) ¿Cuál es el factor de calidad del circuito cuando trabaja a su frecuencia de resonancia?

27. (*a*) Dibujar la curva de respuesta en tensión de un circuito que tiene una frecuencia inferior de media potencia de 1 000 rad/s, una frecuencia superior de media potencia de 4 000 rad/s y una magnitud de tensión máxima de 10 V. (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia del circuito? (*c*) ¿Cuál es el ancho de banda del circuito? (*d*) ¿Cuál es el factor de calidad del circuito cuando funciona a la frecuencia resonante?

28. (*a*) Si el capacitor de 1 μF de la figura 16.54 se sustituye con un capacitor de 330 pF, encontrar la frecuencia resonante del nuevo circuito. (*b*) Verificar la respuesta utilizando PSpice. (Sugerencia: Utilizar la fuente VAC y simular sobre varias décadas de frecuencia.)

D 29. Diseñar un circuito *RLC* en paralelo que tenga un ancho de banda de 5.5 kHz y una frecuencia inferior de media potencia de 500 Hz. Verificar el diseño con una simulación en PSpice apropiada.

16.3 Resonancia en serie

30. Un circuito serie se construye a partir de dos resistencias de 5 Ω, cuatro inductores de 100 μH y un capacitor de 3.3 μF. (*a*) Calcular la frecuencia resonante del circuito. (*b*) Calcular el factor de calidad del circuito cuando se opera a la frecuencia resonante. (*c*) Determinar la impedancia de entrada a la frecuencia resonante, a 0.1 veces la frecuencia resonante y 10 veces la frecuencia resonante.

31. Si se sabe que un circuito en serie tiene un ancho de banda de 3 MHz, y una frecuencia inferior de media potencia $f_1 = 17$ kHz, determinar (*a*) la frecuencia superior de media potencia (en Hz); (*b*) la frecuencia resonante f_0 del circuito; (*c*) el factor de calidad del circuito cuando se opera a la frecuencia resonante.

32. (*a*) Determinar la impedancia de un circuito *RLC* en serie ($R = 1\ \Omega$, $L = 1$ mH, $C = 2$ mF) cuando opera a la frecuencia resonante. (*b*) Verificar la solución con una simulación PSpice apropiada. (Sugerencia: Una resistencia de gran valor en paralelo con el capacitor evitará la aparición de mensajes de error asociados con la falta de una trayectoria de cd a tierra.)

33. (*a*) Determinar la impedancia en un circuito *RLC* en serie ($R = 1\ \text{k}\Omega$, $L = 1\ \mu$H, $C = 2\ \mu$F) cuando opera a la frecuencia resonante. (*b*) Verificar la solución con una

simulación PSpice apropiada. (Sugerencia: Una resistencia de gran valor en paralelo con el capacitor evitará la aparición de mensajes de error asociados con la falta de una trayectoria de cd a tierra.)

34. (*a*) Aplicar técnicas aproximadas para graficar $|\mathbf{V}_{sal}|$ en función de ω para el circuito de la figura 16.56. (*b*) Calcular el valor exacto de $\mathbf{V}_{sal}$ a $\omega = 9$ rad/s.

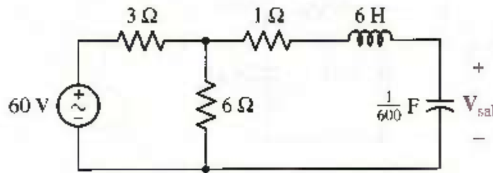


FIGURA 16.56

35. Una red resonante en serie consiste en una resistencia de 50 Ω resistor, un inductor de 4 mH y un capacitor de 0.1 μF. Calcular los valores de: (*a*) ω_0; (*b*) f_0; (*c*) Q_0; (*d*) $\mathcal{B}$; (*e*) ω_1; (*f*) ω_2; (*g*) $\mathbf{V}_{ent}$ a 45 krad/s; (*h*) la razón de las magnitudes de la impedancia del capacitor y la impedancia del resistencia a 45 krad/s.

36. Después de obtener $\mathbf{V}_{ent}(s)$ en la figura 16.57, determinar: (*a*) ω_0; (*b*) Q_0.

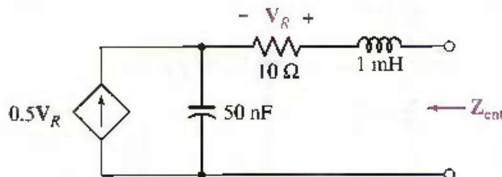


FIGURA 16.57

37. Inspeccionar el circuito de la figura 16.58 y observar la amplitud de la tensión de la fuente. Decidir si estaría dispuesto a poner sus manos desnudas en los extremos del capacitor, si el circuito se construyera realmente en el laboratorio. Graficar $|\mathbf{V}_C|$ en función de ω para justificar su respuesta.

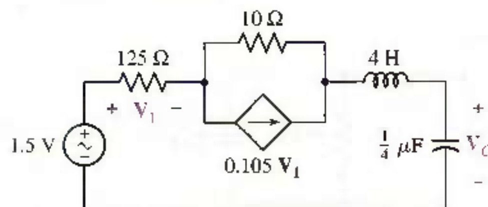


FIGURA 16.58

38. Cierto circuito resonante en serie tiene $f_0 = 500$ Hz, $Q_0 = 10$ y $X_L = 500\,\Omega$ en resonancia. (*a*) Determinar R, L y C. (*b*) Si una fuente $\mathbf{V}_s = 1\underline{/0^\circ}$ V se conecta en serie con el circuito, proporcionar los valores exactos de $|\mathbf{V}_C|$ a las frecuencias $f = 450, 500$ y 550 Hz.

39. Una red de tres elementos tiene una impedancia de entrada $\mathbf{Z}(s)$ que muestra polos en $s = 0$ y el infinito, así como un par de cero en $s = -20\,000 \pm j80\,000\ s^{-1}$. Especificar los valores de los tres elementos, si $\mathbf{Z}_{ent}(-10\,000) = -20 + j0\,\Omega$.

16.4 Otras formas resonantes

40. Efectuar unas cuantas aproximaciones razonables en la red de la figura 16.59 y obtener los valores de ω_0, Q_0, $\mathcal{B}$, $\mathbf{Z}_{ent}(j\omega_0)$, y $\mathbf{Z}_{ent}(j99\,000)$.

41. ¿Qué valor de la resistencia debe conectarse en los extremos de la entrada de la red de la figura 16.59 para provocar que tenga una Q_0 de 50?

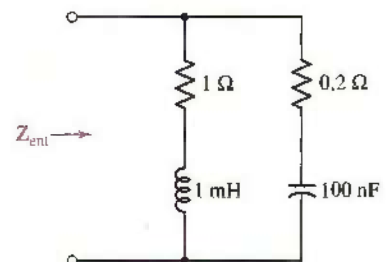
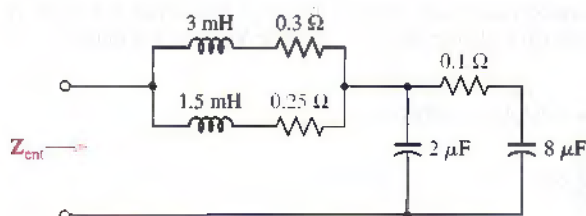


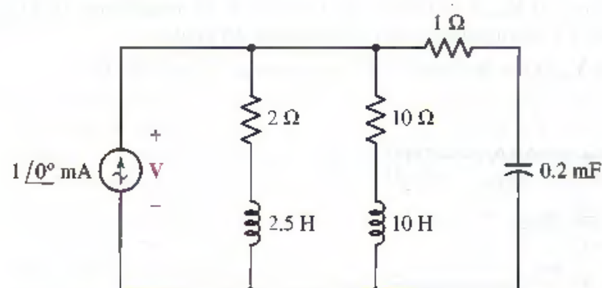
FIGURA 16.59

42. Observar la red de la figura 16.60 y utilizar técnicas aproximadas para determinar la magnitud mínima de $\mathbf{Z}_{ent}$ y la frecuencia a la cual ocurre.



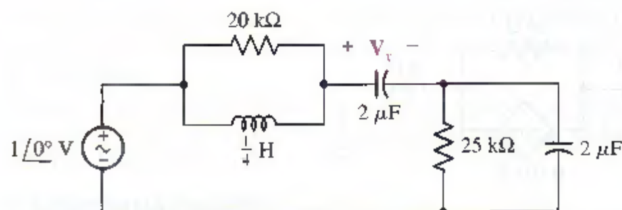
■ **FIGURA 16.60**

43. En el circuito de la figura 16.61: (*a*) preparar una curva de respuesta aproximada de $|\mathbf{V}|$ en función de ω, y (*b*) calcular el valor exacto de $\mathbf{V}$ en $\omega = 50$ rad/s.



■ **FIGURA 16.61**

44. (*a*) Utilizar métodos aproximados para calcular $|\mathbf{V}_x|$ a $\omega = 2\,000$ rad/s para el circuito de la figura 16.62. (*b*) Obtener el valor exacto de $|\mathbf{V}_x(j2\,000)|$.



■ **FIGURA 16.62**

45. Se construye una combinación en paralelo de una resistencia de 5 kΩ y un capacitor de 1 μF. Determinar un equivalente conectado en serie si la frecuencia de operación ω es (*a*) 10^3 rad/s; (*b*) 10^4 rad/s; (*c*) 10^5 rad/s.

46. Se construye una combinación en serie de una resistencia de 5 kΩ y un capacitor de 1 μF. Determinar un equivalente conectado en paralelo si la frecuencia de operación ω es (*a*) 10^3 rad/s; (*b*) 10^4 rad/s; (*c*) 10^5 rad/s.

47. Se construye una combinación en serie de una resistencia de 470 Ω y un inductor de 3.3 μH. Determinar un equivalente conectado en serie si la frecuencia de operación ω es (*a*) 10^3 rad/s; (*b*) 10^4 rad/s; (*c*) 10^5 rad/s.

48. Se construye una combinación en paralelo de una resistencia de 470 Ω y un inductor de 3.3 μH. Determinar un equivalente conectado en paralelo si la frecuencia de operación ω es (*a*) 10^3 rad/s; (*b*) 10^4 rad/s; (*c*) 10^5 rad/s.

49. (*a*) En el circuito de la figura 16.63, aplicar métodos aproximados para calcular $|\mathbf{V}_x|$ a $f = 1.6$ MHz. (*b*) Calcular el valor exacto de $|\mathbf{V}_x(j10 \times 10^6)|$. (*c*) Verificar los resultados con una simulación PSpice apropiada.

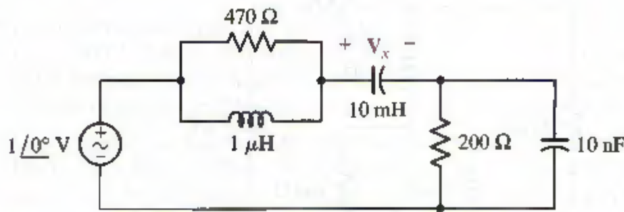
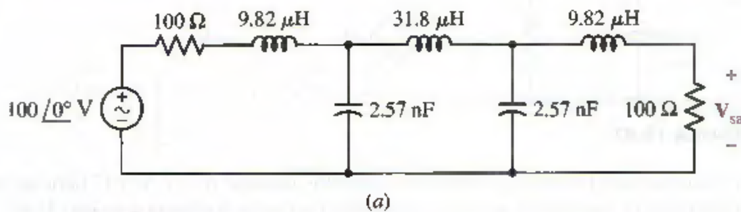


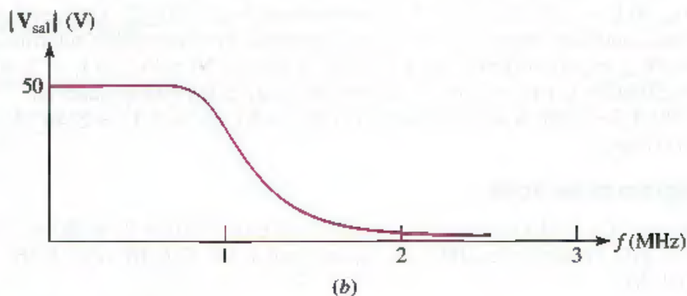
FIGURA 16.63

16.5 Escalamiento (o ajuste)

50. El filtro que se muestra en la 16.64*a* tiene la curva de respuesta que se indica en la figura 16.64*b*. (*a*) Ajustar el filtro de manera que opere entre una fuente de 50 Ω y una carga de 50 Ω además de tener una frecuencia de corte de 20 kHz. (b) Dibujar la nueva curva de respuesta.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 16.64

51. (*a*) Determinar $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$ de la red de la figura 16.65. (*b*) Escribir la expresión de $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$ después de que se haya ajustado mediante $K_m = 2$, $K_f = 5$. (*c*) Ajustar los elementos en la red mediante $K_m = 2$, $K_f = 5$, y dibujar la nueva red.

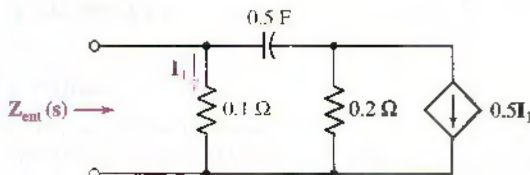


FIGURA 16.65

52. (*a*) Utilizar aproximaciones apropiadas a fin de determinar ω_0 y Q_0 en el circuito de la figura 16.66. (*b*) Ajustar la red a la derecha de la fuente, de manera que sea resonante a 1 Mrad/s. (*c*) Especificar ω_0 y B del circuito ajustado.

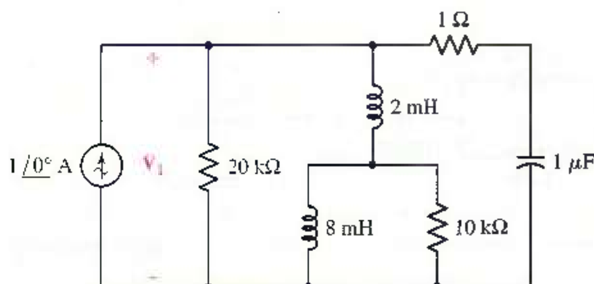


FIGURA 16.66

53. (*a*) Dibujar la nueva configuración de la figura 16.67, después de que la red se ajuste mediante $K_m = 250$ y $K_f = 400$. (*b*) Determinar el equivalente de Thévenin de la red ajustada en $\omega = 1$ krad/s.

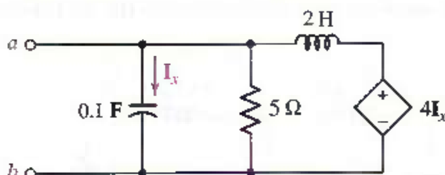


FIGURA 16.67

54. Una red compuesta en su totalidad por elementos idealesl R's, L's, y C tiene un par de terminales de entrada al que se conecta una fuente de corriente senoidal $\mathbf{I}_s$ así como un par de terminales de salida en circuito abierto en donde se define una tensión $\mathbf{V}_{sal}$. Si $\mathbf{I}_s = 1\underline{/0°}$ A en $\omega = 50$ rad/s, entonces $\mathbf{V}_{sal} = 30\underline{/25°}$ V. Especificar $\mathbf{V}_{sal}$ para cada condición descrita de la manera siguiente. Si es imposible determinar el valor de $\mathbf{V}_{sal}$, escribir OTSK.[5] (*a*) $\mathbf{I}_s = 2\underline{/0°}$ A en $\omega = 50$ rad/s; (*b*) $\mathbf{I}_s = 2\underline{/40°}$ A en $\omega = 50$ rad/s; (*c*) $\mathbf{I}_s = 2\underline{/40°}$ A en 200 rad/s; (*d*) la red está ajustada en $K_m = 30$, $\mathbf{I}_s = 2\underline{/40°}$ A, $\omega = 50$ rad/s; (*e*) $K_m = 30$, $K_f = 4$, $\mathbf{I}_s = 2\underline{/40°}$ A, $\omega = 200$ rad/s.

16.6 Diagramas de Bode

55. Determinar H_{dB} si $\mathbf{H(s)}$ es igual a: (*a*) 0.2; (*b*) 50; (*c*) $12/(\mathbf{s}+2) + 26/(\mathbf{s}+20)$ para $\mathbf{s} = j10$. Proporcionar $|\mathbf{H(s)}|$ si H_{dB} es igual a: (*d*) 37.6 dB; (*e*) −8 dB; (*f*) 0.01 dB.

56. Dibujar la gráfica de amplitud de Bode de (*a*) $20(\mathbf{s}+1)/(\mathbf{s}+100)$; (*b*) $2\,000\mathbf{s}(\mathbf{s}+1)/(\mathbf{s}+100)^2$; (*c*) $\mathbf{s} + 45 + 200/\mathbf{s}$. (*d*) Verificar sus dibujos utilizando MATLAB.

57. De acuerdo con la figura 16.68, elaborar los diagramas de Bode de amplitud y de fase de la función de transferencia, $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V}_C/\mathbf{I}_s$.

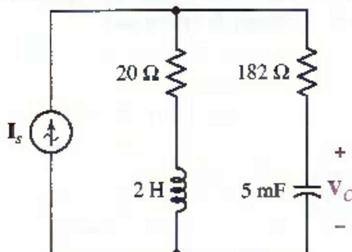


FIGURA 16.68

(5) Sólo las sombras conocidas.

58. (*a*) Empleando un origen en $\omega = 1$, $H_{dB} = 0$, construir la gráfica de amplitud de Bode de $\mathbf{H(s)} = 5 \times 10^8 s(s + 100)/[(s + 20)(s + 1\,000)^3]$. (*b*) Proporcionar las coordenadas para todas las esquinas y ordenadas al origen sobre la gráfica de Bode. (*c*) Proporcionar el valor exacto de $20 \log |\mathbf{H}(j\omega)|$ para cada frecuencia de esquina del inciso *b*.

59. (*a*) Construir una gráfica de fase de Bode de $\mathbf{H(s)} = 5 \times 10^8 s(s + 100)/[(s + 20)(s + 1\,000)^3]$. Ubicar el origen en $\omega = 1$, ang $= 0°$. (*b*) Indicar las coordenadas para todos los puntos sobre la gráfica de fase en las que cambie la pendiente. (*c*) Indicar el valor exacto de ang $\mathbf{H}(j\omega)$ para cada frecuencia listada en el inciso *b*.

60. (*a*) Construir un diagrama de magnitud de Bode de la función de transferencia $\mathbf{H(s)} = 1 + 20/s + 400/s^2$. (*b*) Comparar el diagrama de Bode y los valores exactos en $\omega = 5$ y 100 rad/s. (*c*) Verificar el diagrama de Bode con MATLAB.

61. (*a*) Determinar $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V}_R/\mathbf{V}_s$ para el circuito de la figura 16.69. (*b*) Dibujar los diagrama de amplitud de Bode y el de fase de **H**(s). (*c*) Calcular los valores exactos de H_{dB} y ang $\mathbf{H}(j\omega)$ en $\omega = 20$ rad/s.

62. Construir un diagrama en amplitud de Bode de la función de transferencia $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ de la red que se muestra en la figura 16.70.

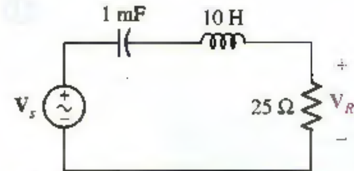


FIGURA 16.69

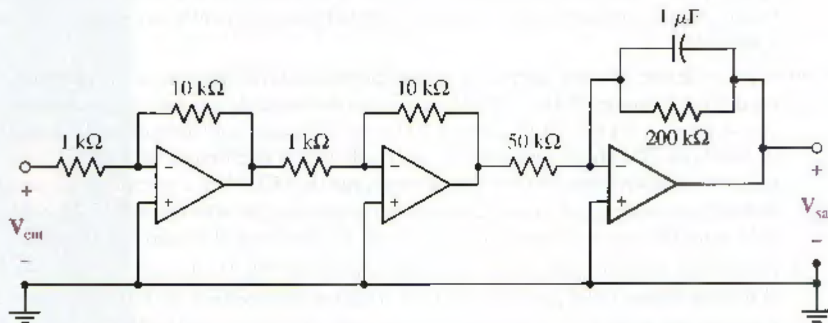


FIGURA 16.70

63. Para la red de la figura 16.71: (*a*) Calcular $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$; (*b*) Dibujar el diagrama en amplitud de Bode de H_{dB}; (*c*) dibujar el diagrama de fase de Bode de $\mathbf{H}(j\omega)$.

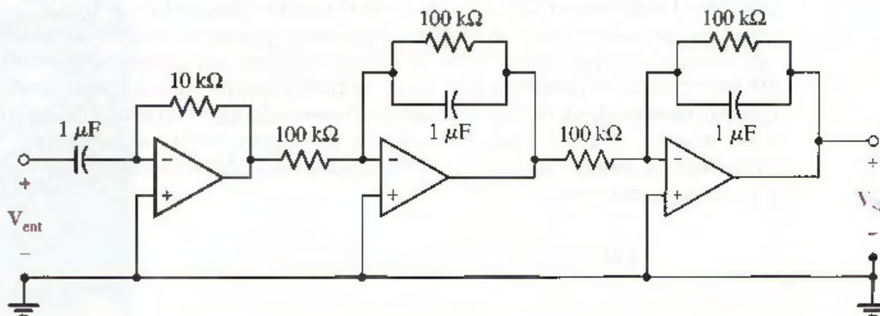


FIGURA 16.71

16.7 Filtros

64. El intervalo de frecuencia de audio del delfín nariz de botella se extiende desde aproximadamente 250 Hz hasta 150 kHz. Se cree que se usan, sobre todo en las comunicaciones sociales, frecuencias de entre 250 Hz y ~50 kHz y que los "clicks" (chasquidos) con frecuencias mayores de ~40 kHz se emplean principalmente para localizaciones por medio del eco. Diseñar un circuito para amplificar de manera

selectiva las conversaciones sociales de los delfines. El método para construir el micrófono es una fuente de tensión senoidal con amplitud pico menor de 15 mV en serie con una resistencia de 1 Ω. La tensión entregada al audífono de 1 kΩ debe tener un máximo aproximado de 1 V.

65. Diseñar un circuito con filtro que elimine el intervalo completo de frecuencias audibles para el oído humano (de 20 Hz a 20 kHz), pero que permita el paso de señales de frecuencias inferior y superior. Verificar el diseño con PSpice.

66. Diseñar un circuito con filtro que elimine toda señal con una frecuencia mayor o igual a 1 kHz. Verificar el diseño utilizando PSpice.

67. Un micrófono que es muy sensible a las altas frecuencias se utiliza para detectar ciertos tipos de fallas inminentes de motores de avión, aunque también capta ruido de baja frecuencia de los sistemas hidráulicos de las aletas del alerón, lo cual provoca falsas alarmas. Diseñar un circuito con filtro para eliminar las señales de ruido mientras se amplifican de manera selectiva las señales de alta frecuencia en por lo menos un factor de 100. La señal de ruido de baja frecuencia tiene su energía pico en la vecindad de 20 Hz y cae hasta menos de 1% de su máximo en 1 kHz. Las señales de falla del motor se inician en la vecindad de 25 kHz.

68. Completar el diseño que se explicó en la aplicación práctica. (*a*) Iniciar diseñando una etapa de intervalo intermedio adecuada. (*b*) Simular la respuesta en frecuencia de su circuito variando la resistencia de retroalimentación entre sus valores mínimo y máximo.

69. A pesar de que se suele aceptar que la respuesta auditiva humana se encuentra dentro del intervalo de 20 Hz a 20 kHz, el ancho de banda de muchos sistemas telefónicos se limita a 3 kHz. Diseñar un circuito con filtro que convierta el habla de ancho de banda de 20 kHz en un habla de "ancho de banda telefónica" de 3 kHz. La entrada es un micrófono con una tensión máxima de 150 mV y, esencialmente, una resistencia en serie igual a cero; la salida corresponde a un altavoz de 8 Ω. El habla debe amplificarse al menos por un factor de 10. Verificar el diseño con PSpice.

70. Diseñar un circuito que elimine las componentes de 50n Hz de una señal de antena, si *n* es un entero en el intervalo de 1 a 4. Una buena topología de filtro "de muesca" (es decir, un filtro que "elimina o bloquea" una frecuencia particular) está dada por el circuito de la figura 16.39, pero con la salida tomada en este caso a través de la combinación en serie del inductor-capacitor, y no a través de la resistencia. El modelo de la señal de la antena es una fuente variable en el tiempo de amplitud máxima igual a 1 V, con resistencia en serie igual a cero.

71. Una pieza sensible de equipo de monitoreo se ve afectada seriamente por el ruido inducido en la línea de transmisión eléctrica de 60 Hz que contamina las señales entrantes. La naturaleza de las señales evita el uso de cualquier tipo de filtros pasabajas, pasaaltas o pasabandas para solucionar el problema. Diseñar un filtro "de muestra" (bloqueo) que elimine de manera selectiva cualesquiera señales a 60 Hz provenientes de la entrada del equipo. Se podría suponer que el equipo tiene una resistencia equivalente de Thévenin esencialmente infinita. Una buena topología del filtro "muesca" se indica mediante el circuito de la figura 16.39, aunque con la salida tomada ahora a través de la combinación en serie del inductor-capacitor, y no a través de la resistencia.

CAPÍTULO

17 Redes de dos puertos

CONCEPTOS CLAVE

Distinción entre redes de uno y de dos puertos.

Parámetros de admitancia (**y**).

Parámetros de impedancia (**z**).

Parámetros híbridos (**h**).

Parámetros de transmisión (**t**).

Métodos de transformación entre parámetros **y**, **z**, **h** y **t**.

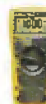
Técnicas de análisis de circuitos utilizando parámetros de red.

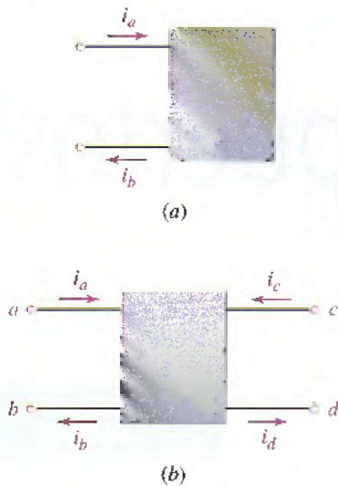
INTRODUCCIÓN

Una red general que cuenta con dos pares de terminales, uno denominado "terminales de entrada" y el otro "terminales de salida", es un bloque constitutivo muy importante de los sistemas electrónicos, de comunicación, de control automático, de transmisión y distribución u otros sistemas en los que la señal o la energía (ambas eléctricas) ingresan por las terminales de entrada, donde la red actúa sobre ellas y se va por las terminales de salida. El par de terminales de salida se debería conectar perfectamente con el par de terminales de entrada de otra red. Cuando se estudió el concepto de las redes equivalentes de Thévenin y Norton en el capítulo 5, se presentó la idea de que no siempre es necesario conocer las funciones detalladas de una parte de un circuito. Este capítulo amplía conceptos de este tipo a situaciones en las que incluso no se conocen los detalles de las funciones internas del circuito. Equipados sólo con el conocimiento de que el circuito es lineal, y con la capacidad de medir tensiones y corrientes, se verá dentro de poco que es posible determinar las características de redes de esta clase con un conjunto de parámetros que permita predecir cómo interactuará la red con otras redes.

17.1 REDES DE UN PUERTO

Un par de terminales en las que es posible que entre o salga una señal de una red recibe el nombre de ***puerto***, por lo que la red que sólo cuenta con un par de este tipo de terminales se conoce como ***red de un puerto*** o simplemente de *un puerto*. Quizá no se puedan realizar conexiones con cualesquiera otros nodos internos al puerto único y, por lo tanto, es evidente que i_a debe ser igual a i_b en el puerto único que se muestra en la figura 17.1*a*.





■ **FIGURA 17.1** (*a*) Red de un puerto. (*b*) Red de dos puertos.

Cuando se presenta más de un par de terminales, la red se conoce como ***red multipuerto***. La red de dos puertos a la cual se dedica en gran medida este capítulo se ilustra en la figura 17.1*b*. Las corrientes en los dos hilos de conexión que conforman cada puerto deben ser iguales y, por ello, se concluye que $i_a = i_b$ e $i_c = i_d$ en los puertos de la figura 17.1*b*. Las fuentes y las cargas deben conectarse en forma directa en las dos terminales de un puerto si se van a utilizar los métodos de este capítulo. En otras palabras, se conecta cada puerto solamente a una red de un puerto o a un puerto de otra red multipuerto. Por ejemplo, ningún dispositivo se debería conectar entre las terminales ***a*** y ***c*** de la red de dos puertos de la figura 17.1*b*. Si se requiere analizar un circuito de estas características, deberán escribirse ecuaciones de lazo general o nodales.

Los métodos especiales de análisis desarrollados para las redes de dos puertos, o simplemente dos puertos, subrayan las relaciones de corriente y de tensión en las terminales de las redes y pasan por alto la naturaleza específica de las corrientes y de las tensiones dentro de las redes. El estudio introductorio servirá para que el lector se familiarice con varios de los parámetros importantes y de uso para la simplificación y la sistematización del análisis de redes lineales de dos puertos.

Una parte del estudio introductorio de las redes de uno y de dos puertos se lleva a cabo de mejor manera mediante el uso de una notación de red generalizada y la nomenclatura abreviada para determinantes que se presentan en el apéndice 2. De tal modo, si se escribe un conjunto de ecuaciones de lazo de una red pasiva,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{13}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{1N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{23}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{2N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{Z}_{31}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{32}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{33}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{3N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \mathbf{Z}_{N1}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{N2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{N3}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{NN}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_N \end{aligned} \qquad [1]$$

entonces el coeficiente de cada corriente será una impedancia $\mathbf{Z}_{ij}(\mathbf{s})$, y el determinante del circuito, o determinante de los coeficientes, es:

$$\Delta_{\mathbf{Z}} = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix} \qquad [2]$$

donde se supusieron N lazos, las corrientes aparecen en el orden de los subíndices en cada ecuación, y el orden de las ecuaciones es el mismo que el de las corrientes. Se supone también que se aplica la LKT, por lo que el signo de cada término $\mathbf{Z}_{ii}$ $(\mathbf{Z}_{11}, \mathbf{Z}_{22}, \ldots, \mathbf{Z}_{NN})$ es positivo; el signo de cualquier $\mathbf{Z}_{ij}$ $(i \neq j)$ o término mutuo puede ser positivo o negativo, según las direcciones de referencia asignadas a $\mathbf{I}_i$ e $\mathbf{I}_j$.

Si hay fuentes dependientes dentro de la red, entonces es posible que no todos los coeficientes de las ecuaciones de lazo deberían ser resistencias o impedancias. Aun así, se seguirá refiriendo al determinante del circuito como $\Delta_{\mathbf{Z}}$.

El uso de la notación menor (apéndice 2) permite que la impedancia de entrada o del punto de accionamiento en las terminales de una red *de un puerto* se exprese de manera muy concisa. El resultado también se aplica a una red de *dos puertos*, si uno de ellos termina en una impedancia pasiva, incluyendo un circuito abierto o en cortocircuito.

Supóngase que la red de un puerto de la figura 17.2 está compuesta en su totalidad por elementos pasivos y fuentes dependientes; también se supone linealidad. Una fuente ideal de tensión $\mathbf{V}_1$ se conecta al puerto, y la fuente de corriente se identifica como la corriente en el lazo 1. Aplicando el procedimiento de la regla de Cramer, se tiene

La regla de Cramer se estudia en el apéndice 2.

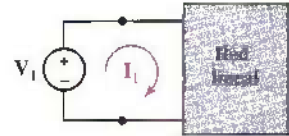


FIGURA 17.2 Fuente ideal de tensión $\mathbf{V}_1$ conectada a un solo puerto de una red lineal de un puerto que no contiene fuentes independientes; $\mathbf{Z}_{ent} = \Delta_Z/\Delta_{11}$.

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ 0 & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ 0 & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}$$

o, de modo más conciso,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1 \Delta_{11}}{\Delta_Z}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{Z}_{ent} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} \qquad [3]$$

EJEMPLO 17.1

Calcular la impedancia de entrada de la red resistiva de un puerto que se muestra en la figura 17.3.

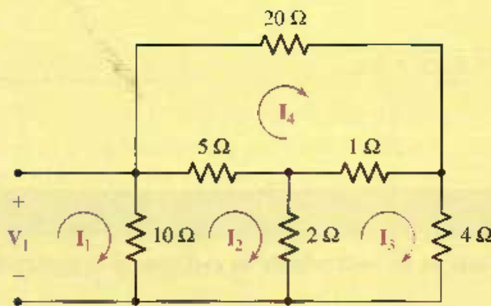


FIGURA 17.3 Ejemplo de una red de un puerto que contiene elementos resistivos solamente.

Se asignan primero las cuatro corrientes de malla como se indica y se escriben, bajo inspección, las ecuaciones de malla correspondientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 \\ 0 &= -10\mathbf{I}_1 + 17\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3 - 5\mathbf{I}_4 \\ 0 &= \qquad\quad - 2\mathbf{I}_2 + 7\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4 \\ 0 &= \qquad\quad - 5\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 + 26\mathbf{I}_4 \end{aligned}$$

(Continúa en la siguiente página)

El determinante del circuito está dado entonces por

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 26 \end{vmatrix}$$

y tiene un valor de 9 680 Ω^4. Eliminando el primer renglón y la primera columna, se tiene

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ -5 & -1 & 26 \end{vmatrix} = 2\,778\,\Omega^3$$

Por lo tanto, la ecuación [3] proporciona el valor de la impedancia de entrada:

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{9\,680}{2\,778} = 3.485\ \Omega$$

PRÁCTICA

17.1 Calcular la impedancia de entrada de la red que se muestra en la figura 17.4 si se forma en una red de un puerto al cortarla en las terminales: (*a*) *a* y *a'*; (*b*) *b* y *b'*; (*c*) *c* y *c'*.

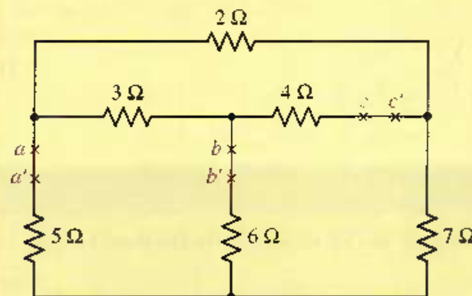


FIGURA 17.4

Respuestas: 9.47 Ω; 10.63 Ω; 7.58 Ω.

EJEMPLO 17.2

Calcular la impedancia de entrada de la red que se muestra en la figura 17.5.

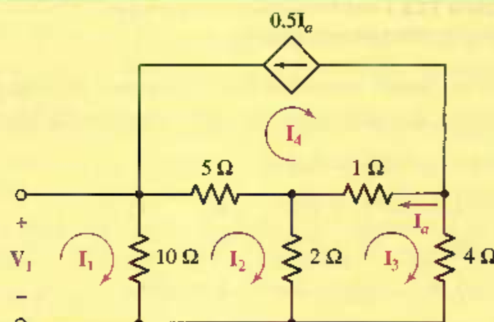


FIGURA 17.5 Red de un puerto que contiene una fuente dependiente.

Las cuatro ecuaciones de malla se escriben en términos de las cuatro corrientes de malla asignadas:

$$\begin{aligned} 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 \qquad\qquad\qquad &= \mathbf{V}_1 \\ -10\mathbf{I}_1 + 17\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3 - 5\mathbf{I}_4 &= 0 \\ -\ 2\mathbf{I}_2 + 7\mathbf{I}_3 - \ \mathbf{I}_4 &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{I}_4 = -0.5\mathbf{I}_a = -0.5(\mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_3)$$

o

$$-0.5\mathbf{I}_3 + 1.5\mathbf{I}_4 = 0$$

Por lo tanto, se escribe

$$\Delta_\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 590\ \Omega^3$$

mientras que

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 159\ \Omega^2$$

lo cual da como resultado

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \tfrac{590}{159} = 3.711\ \Omega$$

También se debe elegir un procedimiento similar con ecuaciones nodales, lo que da como resultado la admitancia se entrada

$$\mathbf{Y}_{\text{ent}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{\text{ent}}} = \frac{\Delta_\mathbf{Y}}{\Delta_{11}} \qquad [4]$$

donde Δ_{11} se refiere en este caso al menor de $\Delta_\mathbf{Y}$.

PRÁCTICA

17.2 Escribir un conjunto de ecuaciones nodales para el circuito de la figura 17.6, calcular $\Delta_\mathbf{Y}$, y encontrar después la admitancia de entrada que se observa entre: (*a*) el nodo 1 y el nodo de referencia; (*b*) el nodo 2 y la referencia.

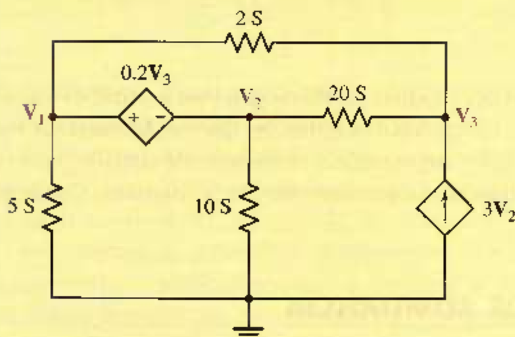


FIGURA 17.6

Respuesta: 10.68 S; 13.16 S.

EJEMPLO **17.3**

Aplicar la ecuación [4] para determinar de nuevo la impedancia de entrada de la red de la figura 17.7.

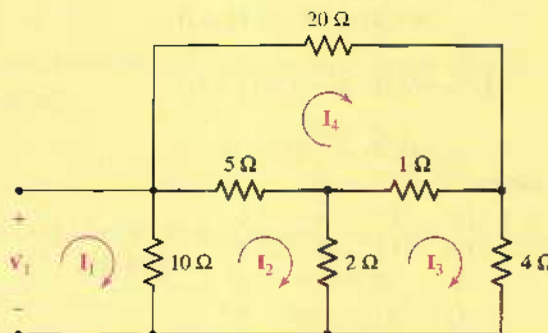


FIGURA 17.7 Circuito del ejemplo 17.1 reproducido por conveniencia.

Se ordenan primero las tensiones de nodo $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_3$ de izquierda a derecha, se elige la referencia en el nodo inferior y se escribe, con detenimiento, la matriz de admitancia del sistema:

$$\Delta_{\mathbf{Y}} = \begin{vmatrix} 0.35 & -0.2 & -0.05 \\ -0.2 & 1.7 & -1 \\ -0.05 & -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 0.3473 \text{ S}^3$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1.7 & -1 \\ -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 1.21 \text{ S}^2$$

por lo que

$$\mathbf{Y}_{\text{ent}} = \frac{0.3473}{1.21} = 0.2870 \text{ S}$$

lo cual corresponde a

$$\mathbf{Y}_{\text{ent}} = \frac{1}{0.287} = 3.484 \ \Omega$$

que concuerda con la respuesta anterior dentro del error de redondeo esperado (sólo se retuvieron cuatro dígitos a lo largo de los cálculos).

Los ejercicios 8 y 9 al final del capítulo proporcionan puertos únicos que se construyen con amplificadores operacionales e ilustran que las resistencias *negativas* podrían obtenerse de redes cuyos únicos elementos de circuito pasivos son resistencias, y que simularían los inductores sólo con resistencias y con capacitores.

17.2 PARÁMETROS DE ADMITANCIA

A continuación se enfocará la atención en las redes de dos puertos. Se supondrá en todo lo que sigue que la red está compuesta por elementos lineales y que no contiene fuentes independientes; sin embargo, *se* permiten las fuentes dependientes. También se impondrán otras condiciones a la red en algunos casos especiales.

Se considerarán los dos puertos como se indica en la figura 17.8; la tensión y la corriente en las terminales de entrada son $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$, además $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ se especifican en el puerto de salida. Las direcciones de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ suelen elegirse como si *entraran* a la red en los conductores superiores (y salen de los conductores inferiores). Debido a que la red es lineal y no contiene fuentes independientes dentro de ella, $\mathbf{I}_1$ se debe considerar como la superposición de dos componentes, una ocasionada por $\mathbf{V}_1$ y la otra por $\mathbf{V}_2$. Cuando se aplica el mismo argumento a $\mathbf{I}_2$, se empezaría con el siguiente conjunto de ecuaciones:

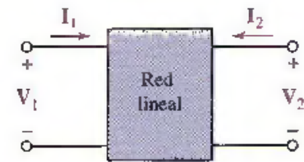


FIGURA 17.8 El dos-puertos general con tensiones y corrientes de terminal específicas. El dos-puertos está compuesto por elementos lineales que tal vez induyan fuentes dependientes, pero sin ninguna fuente independiente.

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \qquad [5]$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \qquad [6]$$

donde las $\mathbf{y}$ no son más que constantes de proporcionalidad, o coeficientes desconocidos, en el presente. Sin embargo, resulta claro que sus unidades de dimensión deben ser A/V o S. Por lo tanto, reciben el nombre de parámetros $\mathbf{y}$ y se definen mediante las ecuaciones [5] y [6].

Los parámetros $\mathbf{y}$ así como otros conjuntos de parámetros que se definirán después en este capítulo, se representan en forma concisa como matrices. En este caso, se define la matriz columna $\mathbf{I}$, (2×1)

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \qquad [7]$$

la matriz cuadrada (2×2) de los parámetros $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \qquad [8]$$

y la matriz columna $\mathbf{V}$, (2×1):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \qquad [9]$$

La notación adoptada en este texto para representar una matriz es estándar, pero también puede confundirse fácilmente con la notación anterior para los fasores o las cantidades complejas generales. La naturaleza de cualesquiera de estos símbolos debe ser clara según el contexto en el que se usan.

Por lo tanto, se puede escribir la ecuación matricial $\mathbf{I} = \mathbf{yV}$, o

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

y la multiplicación de matrices del lado derecho de la ecuación matricial, da la igualdad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Estas matrices (2×1) deben ser iguales, elemento por elemento; de ese modo se llega a las ecuaciones definidas [5] y [6].

La manera más útil e informativa de relacionar un significado físico con los parámetros $\mathbf{y}$ es a través de una inspección directa de las ecuaciones [5] y [6]. Considerar la ecuación [5], por ejemplo; si se deja que $\mathbf{V}_2$ sea cero, se ve entonces que $\mathbf{y}_{11}$ debe determinarse mediante la proporción (o razón) entre $\mathbf{I}_1$ y $\mathbf{V}_1$. Por lo tanto, se describe $\mathbf{y}_{11}$ como la admitancia que se mide en las terminales de entrada con las terminales de salida en *cortocircuito* ($\mathbf{V}_2 = 0$). Debido a que no es posible que haya duda en cuanto a las terminales que están en cortocircuito, $\mathbf{y}_{11}$ se describe mejor como la *admitancia de entrada en cortocircuito*. De manera alterna, se podría describir $\mathbf{y}_{11}$ como el recíproco de la impedancia de entrada medida con las terminales de salida en cortocircuito, aunque evidentemente resulta más directo una

descripción como una admitancia. No es el *nombre* del parámetro que es lo importante. Más bien, son las condiciones que deben aplicarse a las ecuaciones [5] o [6] y, por consiguiente, a la red, lo que tiene mayor sentido; cuando se determinan las condiciones, el parámetro se obtiene de manera directa a partir del análisis del circuito (o mediante experimentos sobre el circuito físico). Cada uno de los parámetros y se podría escribir como una proporción (o razón) corriente-tensión con $\mathbf{V}_1 = 0$ (las terminales de entrada en cortocircuito) o $\mathbf{V}_2 = 0$ (las terminales de salida en cortocircuito):

$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \qquad [10]$$

$$\mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0} \qquad [11]$$

$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \qquad [12]$$

$$\mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0} \qquad [13]$$

Puesto que cada parámetro es una admitancia que se obtiene poniendo en cortocircuito el puerto de salida o el de entrada, los parámetros y se conocen como ***parámetros de admitancia en cortocircuito***. El nombre específico de $\mathbf{y}_{11}$ es ***admitancia de entrada en cortocircuito***; el de $\mathbf{y}_{22}$ admitancia de salida en cortocircuito; y los de $\mathbf{y}_{12}$ y $\mathbf{y}_{21}$ admitancias de transferencia en cortocircuito.

EJEMPLO 17.4

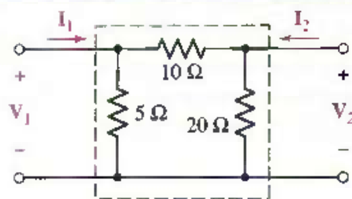


FIGURA 17.9 Dos puertos resistivos.

Determinar los cuatro parámetros de admitancia en cortocircuito de los dos puertos resistivos de la figura 17.9.

Los valores de los parámetros se establecen con facilidad aplicando las ecuaciones [10] a [13], que se obtuvieron de manera directa a partir de las ecuaciones de definición (o definidas) [5] y [6]. Para determinar $\mathbf{y}_{11}$ se pone en cortocircuito la salida y se encuentra la proporción (o razón) entre $\mathbf{I}_1$ y $\mathbf{V}_1$. Lo anterior se efectúa si $\mathbf{V}_1 = 1$ V, pues en ese caso $\mathbf{y}_{11} = \mathbf{I}_1$. Por inspección de la figura 17.9, resulta claro que 1 V aplicado a la entrada, con la salida en cortocircuito, ocasionará una corriente de entrada de $(\frac{1}{5} + \frac{1}{10})$, o 0.3 A. Por consiguiente,

$$\mathbf{y}_{11} = 0.3 \text{ S}$$

Para determinar $\mathbf{y}_{12}$ se ponen en cortocircuito las terminales de entrada y se aplica 1 V en las terminales de salida. La corriente de entrada circula por el cortocircuito y es $\mathbf{I}_1 = -\frac{1}{10}$ A. Por lo tanto,

$$\mathbf{y}_{12} = -0.1 \text{ S}$$

Mediante métodos similares;

$$\mathbf{y}_{21} = -0.1 \text{ S} \qquad \mathbf{y}_{22} = 0.15 \text{ S}$$

Por lo tanto, las ecuaciones que describen este dos-puertos en términos de los parámetros de admitancia son

$$\mathbf{I}_1 = 0.3\mathbf{V}_1 - 0.1\mathbf{V}_2 \qquad [14]$$

$$\mathbf{I}_2 = -0.1\mathbf{V}_1 + 0.15\mathbf{V}_2 \qquad [15]$$

y

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.15 \end{bmatrix} \quad \text{(todo S)}$$

Sin embargo, no se requiere encontrar estos parámetros uno por uno mediante las ecuaciones [10] y [13]. Se podrían determinar al mismo tiempo.

EJEMPLO 17.5

Asignar las tensiones de nodo $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ en el dos-puertos de la figura 17.9 y escribir las expresiones de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ en términos de ellos.

Se tiene

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{5} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{10} = 0.3\mathbf{V}_1 - 0.1\mathbf{V}_2$$

y

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{10} + \frac{\mathbf{V}_2}{20} = -0.1\mathbf{V}_1 + 0.15\mathbf{V}_2$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones [14] y [15], y los cuatro parámetros y pueden leerse *de manera directa* a partir de ellas.

PRÁCTICA

17.3 Aplicando las fuentes de 1 V y los cortocircuitos apropiados al circuito de la figura 17.10, encontrar: (*a*) $\mathbf{y}_{11}$; (*b*) $\mathbf{y}_{21}$; (*c*) $\mathbf{y}_{22}$; (*d*) $\mathbf{y}_{12}$.

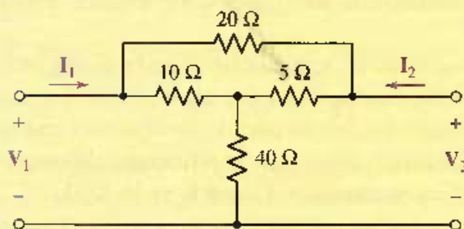


FIGURA 17.10

Respuestas: 0.1192 S; −0.1115 S; 0.1269 S; −0.1115 S.

En general, resulta más fácil utilizar las ecuaciones [10], [11], [12] o [13] cuando sólo se desea un parámetro. Sin embargo, si se necesitan todos, suele ser más fácil asignar $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ a los nodos de entrada y salida, asignar otras tensiones de nodo de referencia a cualesquiera nodos interiores, y después buscar la solución general.

Para observar el uso que podría darse a tal sistema de ecuaciones, es necesario terminar ahora cada puerto con alguna red específica de un puerto. Considerar

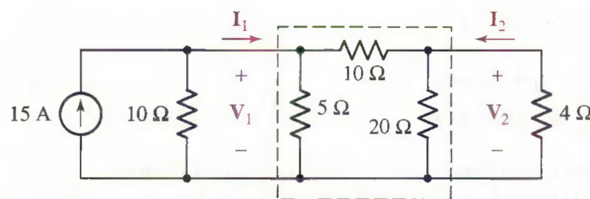


FIGURA 17.11 Red resistiva de dos puertos de la figura 17.9, que terminan en redes específicas de un puerto.

la red simple de dos puertos del ejemplo 17.4 que se muestra en la figura 17.11 con una fuente de corriente práctica conectada al puerto de entrada y una carga resistiva al puerto de salida. En este caso debe existir una relación entre $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$ que es independiente de la red de dos puertos. Se podría determinar esta relación únicamente a partir de este circuito externo. Si se aplica LKC (o se escribe una ecuación nodal) a la entrada

$$\mathbf{I}_1 = 15 - 0.1\mathbf{V}_1$$

En la salida, la ley de Ohm origina

$$\mathbf{I}_2 = -0.25\mathbf{V}_2$$

Al sustituir estas expresiones para $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ en las ecuaciones [14] y [15], se tiene

$$15 = 0.4\mathbf{V}_1 - 0.1\mathbf{V}_2$$
$$0 = -0.1\mathbf{V}_1 + 0.4\mathbf{V}_2$$

de las cuales se obtiene

$$\mathbf{V}_1 = 40 \text{ V} \qquad \mathbf{V}_2 = 10 \text{ V}$$

Las corrientes de entrada y salida se determinan también con facilidad:

$$\mathbf{I}_1 = 11 \text{ A} \qquad \mathbf{I}_2 = -2.5 \text{ A}$$

y se conocen de ese modo las características terminales completas de ambos puertos resistivos.

Las ventajas del análisis del dos-puertos no se muestran en toda su magnitud en un ejemplo tan simple, aunque debe resultar claro que una vez que se determinan los parámetros y para el dos-puertos más complicado, se establece con facilidad el desempeño del dos-puertos para condiciones de terminales diferentes; sólo se requiere relacionar $\mathbf{V}_1$ con $\mathbf{I}_1$ en la entrada y $\mathbf{V}_2$ con $\mathbf{I}_2$ en la salida.

En el ejemplo que se acaba de terminar, se encontró que $\mathbf{y}_{12}$ y $\mathbf{y}_{21}$ eran ambas iguales a -0.1 S. No es difícil demostrar que la igualdad se obtiene también si están contenidas tres impedancias generales $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ y $\mathbf{Z}_C$ en esta red en Π. Resulta un poco más difícil determinar las condiciones específicas necesarias para que $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$, aunque el uso de la notación de determinantes proporciona cierta ayuda. Se verá si las relaciones de las ecuaciones [10] y [13] pueden expresarse en términos del determinante de la impedancia y sus menores.

Debido a que el interés se concentra en el dos-puertos y no en las redes específicas con las que terminan, se dejará que $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ se representen mediante dos fuentes de tensión ideales. La ecuación [10] se aplica si $\mathbf{V}_2 = 0$ (poniendo por ello en cortocircuito la salida) y se calcula la admitancia de entrada. Sin embargo, la red en este caso es simplemente un puerto, y la impedancia de entrada de un puerto se determinó en la sección 17.1. Se elige el lazo **1** para incluir las terminales de entrada y se deja que $\mathbf{I}_1$ sea la corriente del lazo; se identifica $(-\mathbf{I}_2)$ como la corriente de lazo **2** y se asignan las corrientes del lazo restantes

de cualquier manera conveniente. Por lo tanto,

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}}|_{\mathbf{V}_2=0} = \frac{\Delta_\mathbf{Z}}{\Delta_{11}}$$

y, por ello,

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_\mathbf{Z}}$$

De manera similar,

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_\mathbf{Z}}$$

Para determinar $\mathbf{y}_{12}$, sea $\mathbf{V}_1 = 0$ y se determina $\mathbf{I}_1$ como una función de $\mathbf{V}_2$. Se descubrirá que $\mathbf{I}_1$ está dada por la razón

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ -\mathbf{V}_2 & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ 0 & \mathbf{Z}_{32} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \mathbf{Z}_{N2} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}$$

De tal modo,

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{(-\mathbf{V}_2)\Delta_{21}}{\Delta_\mathbf{Z}}$$

y

$$\mathbf{y}_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_\mathbf{Z}}$$

De manera similar, se puede demostrar que

$$\mathbf{y}_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_\mathbf{Z}}$$

La igualdad de $\mathbf{y}_{12}$ y $\mathbf{y}_{21}$ depende entonces de la igualdad de los dos menores de $\Delta_\mathbf{Z}$, sea Δ_{12} y Δ_{21}. Ambos menores se determinan mediante

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \mathbf{Z}_{14} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{Z}_{34} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \mathbf{Z}_{42} & \mathbf{Z}_{43} & \mathbf{Z}_{44} & \cdots & \mathbf{Z}_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \mathbf{Z}_{N4} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}$$

y

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{23} & \mathbf{Z}_{24} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{Z}_{34} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \mathbf{Z}_{41} & \mathbf{Z}_{43} & \mathbf{Z}_{44} & \cdots & \mathbf{Z}_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N3} & \mathbf{Z}_{N4} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}$$

Su igualdad se muestra cuando se intercambian primero los renglones y las columnas de un menor (por ejemplo, Δ_{21}), que es una operación que cualquier libro de álgebra elemental demuestra que es válida, y se sustituye después toda impedancia mutua $\mathbf{Z}_{ij}$ por $\mathbf{Z}_{ji}$. Por lo tanto, se establece

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} \qquad \mathbf{Z}_{23} = \mathbf{Z}_{32} \qquad \text{etc.}$$

Esta igualdad de $\mathbf{Z}_{ij}$ y $\mathbf{Z}_{ji}$ resulta evidente para los tres elementos pasivos familiares: la resistencia, el capacitor y el inductor; también es válida para la inductancia mutua. Sin embargo, *no* es cierta para *todo* tipo de dispositivo que tal vez se desee incluir dentro de una red de dos puertos. De manera específica, no es válida en general en el caso de una fuente dependiente, ni en el de un sistema giratorio, en el de un modelo útil de los dispositivos del efecto Hall, ni en el de secciones de guías de onda que contienen ferritas. En un intervalo estrecho de frecuencias radianes, el sistema giratorio proporciona un desplazamiento (corrimiento) de fase adicional de 180° de una señal que pasa de la salida a la entrada con respecto a la señal en la dirección directa, y por lo cual $\mathbf{y}_{12} = -\mathbf{y}_{21}$. Sin embargo, un tipo común de elemento pasivo que lleva a la desigualdad de $\mathbf{Z}_{ij}$ y $\mathbf{Z}_{ji}$ es un elemento no lineal.

PRECAUCIÓN

Cualquier dispositivo para el que $\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{Z}_{ji}$ se le conoce como *elemento bilateral*, de modo que un circuito que contiene sólo elementos bilaterales se denominará *circuito bilateral*. Por lo tanto, se ha demostrado que una propiedad importante de un dos-puertos bilateral es:

$$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$$

así que esta propiedad se enaltece estableciéndola como el *teorema de reciprocidad:*

Una manera simple de enunciar el teorema consiste en afirmar que el intercambio de una fuente ideal de tensión y un amperímetro ideal en cualquier circuito pasivo, lineal y bilateral no variará la lectura de dicho instrumento.

> En cualquier red bilateral real pasiva, si la fuente de tensión simple $\mathbf{V}_x$ en la rama x produce la respuesta en corriente $\mathbf{I}_y$ en la rama y, entonces la eliminación de la fuente de tensión de la rama x y su inserción en la rama y produciría la respuesta en corriente $\mathbf{I}_y$ en la rama x.

Si se hubiera trabajado con el determinante de la admitancia del circuito y se hubiera demostrado que los menores Δ_{21} y Δ_{12} del determinante de la admitancia $\Delta_\mathbf{Y}$ eran iguales, entonces se habría obtenido el teorema de reciprocidad en su forma dual:

En otras palabras, el intercambio de una fuente ideal de corriente y de un voltímetro ideal, en cualquier circuito pasivo, lineal y bilateral, no alterará la lectura de dicho instrumento.

> En cualquier red bilateral pasiva, si la fuente de corriente sencilla $\mathbf{I}_x$ entre los nodos x y x' causa la respuesta de tensión $\mathbf{V}_y$ entre los nodos y y y', entonces la eliminación (o remoción) de la fuente de corriente de los nodos x y x' y su inserción entre los nodos y y y' ocasionaría la respuesta en tensión $\mathbf{V}_y$ entre los nodos x y x'.

En la sección 17.3 se hará énfasis en el dos-puertos que contiene fuentes dependientes.

PRÁCTICA

17.4 En el circuito de la figura 17.10, sean $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ representantes de fuentes ideales de corriente. Asignar la tensión de nodo $\mathbf{V}_1$ a la entrada, $\mathbf{V}_2$ a la salida y $\mathbf{V}_x$ desde el nodo central hasta el nodo de referencia. Escribir tres ecuaciones nodales, eliminar $\mathbf{V}_x$ para obtener dos ecuaciones y luego volver a reordenar en la forma de las ecuaciones [5] y [6], de manera que la totalidad de los cuatro parámetros y pueda leerse en forma directa en las ecuaciones.

17.5 Determinar los parámetros **y** del dos-puertos que se muestra en la figura 17.12.

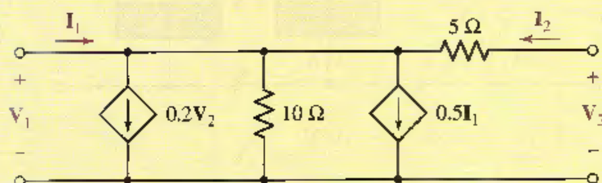


FIGURA 17.12

Respuestas: 17.4: $\begin{bmatrix} 0.1192 & -0.1115 \\ -0.1115 & 0.1269 \end{bmatrix}$ (todo S). 17.5: $\begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$ (todo S).

17.3 ALGUNAS REDES EQUIVALENTES

Cuando se analizan circuitos electrónicos, suele ser necesario sustituir el dispositivo activo (y quizá parte de su circuitería pasiva asociada) por un dos-puertos equivalente que contenga sólo tres o cuatro impedancias. Quizá la validez del equivalente se restrinja a amplitudes de señal pequeñas y a una sola frecuencia, o tal vez a un intervalo limitado de frecuencias. El equivalente también es una aproximación lineal de un circuito no lineal. Sin embargo, si se trabaja con una red que contiene varios elementos tales como resistencias, capacitores e inductores, más un transistor denominado 2N3823, entonces no se puede analizar el circuito mediante cualesquiera de las técnicas estudiadas con anterioridad; el transistor debe sustituirse primero por un modelo lineal, de igual modo que se reemplazó el amp op por un modelo lineal en el capítulo 6. Los parámetros **y** proporcionan uno de estos modelos en la forma de una red de dos puertos que se usa a menudo a frecuencias elevadas. Otro modelo lineal común de un transistor aparece en la sección 17.5.

Las dos ecuaciones que determinan los parámetros de admitancia en cortocircuito

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \qquad [16]$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \qquad [17]$$

tienen la forma de un par de ecuaciones nodales escritas para un circuito con dos nodos de no referencia. La determinación de un circuito equivalente que origine las ecuaciones [16] y [17] se dificulta más por la desigualdad, en general, de $\mathbf{y}_{12}$ y $\mathbf{y}_{21}$; ayuda el hecho de recurrir a un pequeño truco para obtener un par de ecuaciones que poseen iguales coeficientes mutuos. Sumar y restar $\mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_1$ (el término que se desea ver presente en el lado derecho de la ecuación [17]):

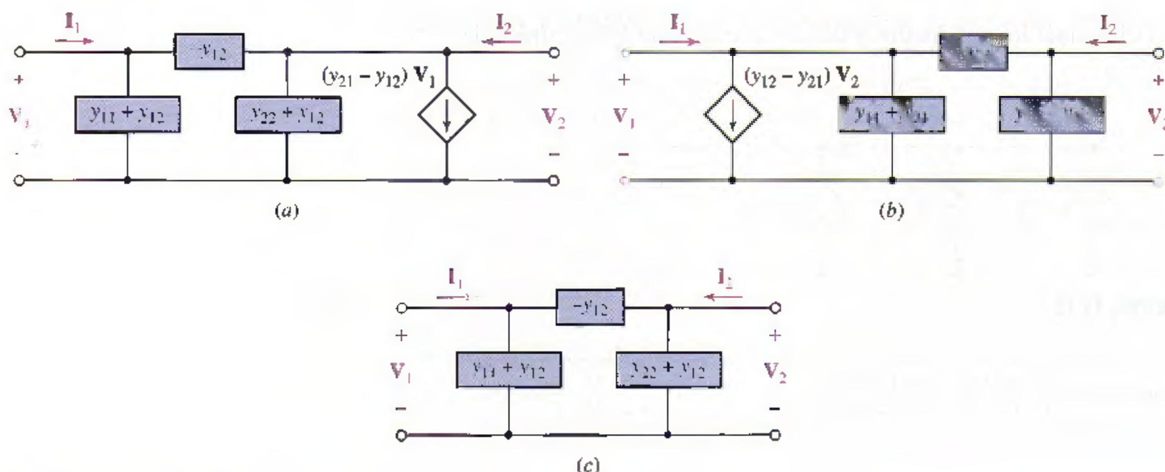
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 + (\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1 \qquad [18]$$

o

$$\mathbf{I}_2 - (\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1 = \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \qquad [19]$$

Los lados derecho de las ecuaciones [16] y [19] presentan ahora la simetría propia de un circuito bilateral; el lado izquierdo de la ecuación [19] se interpretaría como la suma algebraica de dos fuentes de corriente, una independiente $\mathbf{I}_2$ que entra al nodo **2**, y la otra dependiente $(\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1$ que sale del nodo **2**.

Después de esto "se leerá" la red equivalente de las ecuaciones [16] y [19]. Se proporciona primero un nodo de referencia y después un nodo marcado $\mathbf{V}_1$ y



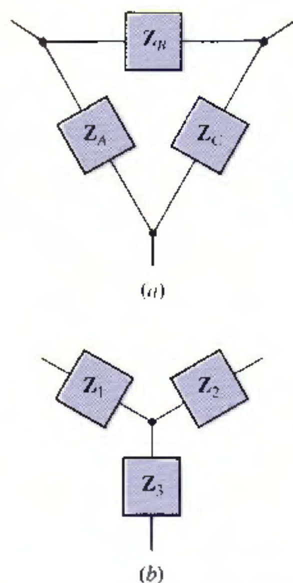
■ **FIGURA 17.13** (*a, b*) El dos-puertos equivalente a cualquier par de puertos lineales generales. La fuente dependiente en la parte *a* depende de V_1, y la correspondiente a la parte *b* depende de V_2. (c) Equivalente de una red bilateral.

otro como V_2. De acuerdo con la ecuación [16] se estableció que la corriente I_1 fluye hacia el nodo **1**, se proporcionó una admitancia mutua $(-y_{12})$ entre los nodos **1** y **2**, y se provee una admitancia de $(y_{11} + y_{12})$ entre el nodo **1** y el nodo de referencia. Con $V_2 = 0$, la proporción entre I_1 y V_1 es entonces y_{11}, como debe ser. Considerar ahora la ecuación [19]; se provoca que la corriente I_2 fluya hacia el segundo nodo, que la corriente $(y_{21} - y_{12})V_1$ salga del nodo, se observa que la admitancia propia $(-y_{12})$ existe entre los nodos, y se completa el circuito mediante la instalación de la admitancia $(y_{22} + y_{12})$ desde el nodo **2** hasta el de referencia. El circuito terminado se muestra en la figura 17.13*a*.

Otra forma de una red equivalente se obtiene al restar y sumar $y_{21}V_2$ en la ecuación [16]; este circuito equivalente se ilustra en la figura 17.13*b*.

Si el dos-puertos es bilateral, entonces $y_{12} = y_{21}$, y cualquiera de los equivalentes se reduce a una simple red pasiva en Π. Desaparece la fuente dependiente. Este equivalente del dos-puertos bilateral se ilustra en la figura 17.13*c*.

Son varios los usos que se les puede dar a estos circuitos equivalentes. En primer lugar, se logra mostrar que *existe* un equivalente de cualquier dos-puertos lineal complicado. No importa cuántos nodos o lazos estén contenidos dentro de la red; el equivalente no es más complejo que los circuitos de la figura 17.13. Uno de éstos quizá sea mucho más simple de usar que el circuito dado, si sólo interesan las características terminales de la red dada.



■ **FIGURA 17.14** La red en Δ de tres terminales (*a*) y la red en Y de tres terminales (*b*) son equivalentes, si las seis impedancias satisfacen las condiciones de la transformación Y-Δ (o Π-T) ecuaciones de la [20] a la [25].

La red de tres terminales de la figura 17.14*a* se conoce a menudo como un Δ de impedancias, en tanto que la que aparece en la figura 17.14*b* se conoce como un Y. Se podría sustituir una red por la otra, si se satisfacen ciertas relaciones específicas entre las impedancias; asimismo, se establecerían estas interrelaciones mediante el uso de los parámetros **y**. Se observa que

$$y_{11} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_1 + Z_2Z_3/(Z_2 + Z_3)}$$

$$y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{Z_B} = \frac{-Z_3}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$

$$y_{22} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_2 + Z_1Z_3/(Z_1 + Z_3)}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ y $\mathbf{Z}_C$ en términos de $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$:

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} \qquad [20]$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_3} \qquad [21]$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1} \qquad [22]$$

o, en el caso de las relaciones inversas:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \qquad [23]$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \qquad [24]$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{Z}_A}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \qquad [25]$$

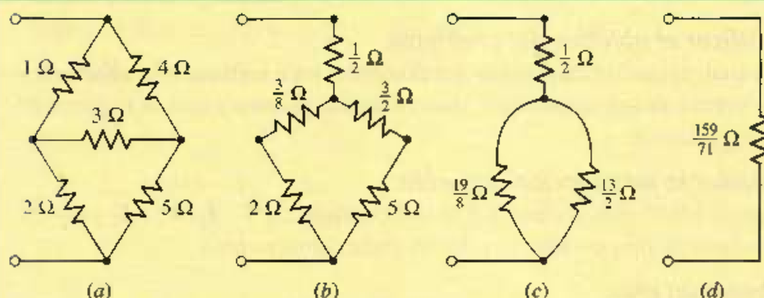
El lector seguramente recordará estas útiles relaciones del capítulo 5, donde se describió su deducción.

Estas ecuaciones permiten transformar con facilidad las redes equivalentes Y y Δ, proceso que se conoce como transformación Y-Δ (o transformación Π-T si las redes se dibujan en las formas de esas letras). Al ir de Y a Δ —o sea de la ecuación [20] a la [22]—, se encuentra primero el valor del numerador común como la suma de los productos de las impedancias en Y tomadas de dos en dos. Cada impedancia en Δ se determina después dividiendo el numerador entre la impedancia de ese elemento en Y que no tiene nodo común con el elemento Δ deseado. De manera inversa, dada Δ se obtiene primero la suma de las tres impedancias alrededor de Δ; luego se divide el producto de las dos impedancias Δ que tienen un nodo común con el elemento Y deseado entre esa suma.

A menudo, tales transformaciones resultan útiles para simplificar redes pasivas, en particular las resistivas, lo cual evita la necesidad de cualquier análisis de malla o nodal.

EJEMPLO 17.6

Calcular la resistencia de entrada del circuito que se presenta en la figura 17.15*a*.



■ **FIGURA 17.15** (*a*) Red resistiva cuya resistencia de entrada se desea. Este ejemplo se repite en el capítulo 5. (*b*) La configuración Δ superior se sustituye por una Y equivalente. (*c*, *d*) Las combinaciones en serie y en paralelo proporcionan la resistencia de entrada equivalente de $\frac{159}{71}$ Ω.

(Continúa en la siguiente página)

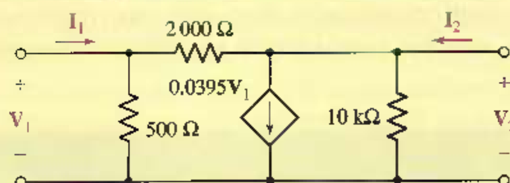
Se efectúa primero la transformación Δ-Y en la conexión Δ superior de la figura 17.15*a*. La suma de las tres resistencias que forman esta Δ es $1 + 4 + 3 = 8\ \Omega$. El producto de las dos resistencias conectadas al nodo superior es $1 \times 4 = 4\ \Omega^2$. De esta forma, la resistencia superior de la Y es $\frac{4}{8}$, o $\frac{1}{2}\ \Omega$. Al repetir este procedimiento para las otras dos resistencias, se obtiene la red de la figura 17.15*b*.

A continuación se realizan las combinaciones en serie y en paralelo indicadas, con lo que se obtiene en sucesión las figuras 17.15*c* y *d*. De ese modo, la resistencia de entrada del circuito en la figura 17.15*a* se determina que es igual a $\frac{159}{71}$, o 2.24 Ω.

A continuación se abordará un ejemplo un poco más complicado, el cual se ilustra en la figura 17.16. Se observa que el circuito contiene una fuente dependiente y, por ello, no se aplica la transformación Y-Δ.

EJEMPLO 17.7

Se podría considerar que el circuito de la figura 17.16 es un equivalente lineal aproximado de un amplificador de transistores, en el que la terminal del emisor es el nodo inferior; la terminal de la base corresponde al nodo de entrada superior, y la terminal del colector representa el nodo de salida superior. Se conecta una resistencia de 2 000 Ω entre el colector y la base para cierta aplicación especial, lo cual permite que el análisis del circuito sea más difícil. Determinar los parámetros (y) de este circuito.



■ **FIGURA 17.16** Circuito equivalente lineal de un transistor en la configuración de emisor común, con retroalimentación resistiva entre el colector y la base.

Identificar el objetivo del problema.

Utilizando el camino específico del problema para facilitar el análisis, uno se da cuenta de que se presenta una red de dos puertos y que se requiere de los parámetros **y**.

Recopilar la información conocida.

La figura 17.16 muestra una red de dos puertos con $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ ya indicadas y se proporciona el valor de cada componente.

Elaborar un plan.

Son varias las formas en las que se podría considerar este circuito. Si se acepta que tiene la forma del circuito equivalente de la figura 17.13*a*, entonces se podrían determinar de inmediato los valores de los parámetros **y**.

Si el reconocimiento no es inmediato, entonces los parámetros **y** del dos-puertos se determinarían aplicando las relaciones de las ecuaciones [10] a [13]. También se podría evitar cualquier uso de los métodos del análisis de dos puertos y escribir de manera directa las ecuaciones del circuito, en la forma que se presenta. Esta opción parece ser la mejor en este caso.

Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.
Por inspección, se determina que $-\mathbf{y}_{21}$ corresponde a la admitancia de la resistencia de 2 kΩ, $\mathbf{y}_{11} + \mathbf{y}_{12}$ a la admitancia de la resistencia de 500 Ω que la ganancia de la fuente de corriente dependiente corresponde a $\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12}$, y, por último, $\mathbf{y}_{22} + \mathbf{y}_{12}$ a la admitancia de la resistencia de 10 kΩ. Por consiguiente, se podría escribir

$$\mathbf{y}_{12} = -\tfrac{1}{2000}$$

$$\mathbf{y}_{11} = \tfrac{1}{500} - \mathbf{y}_{12}$$

$$\mathbf{y}_{21} = 0.0395 + \mathbf{y}_{12}$$

$$\mathbf{y}_{22} = \tfrac{1}{10\,000} - \mathbf{y}_{12}$$

Determinar si se requiere información adicional.
Con las ecuaciones escritas como están, se observa que luego de que se calcula $\mathbf{y}_{12}$ también se podrían obtener los parámetros **y** restantes.

Buscar la solución.
Al introducir los datos en una calculadora, se obtiene

$$\mathbf{y}_{12} = -\tfrac{1}{2000} = -0.5 \text{ mS}$$

$$\mathbf{y}_{11} = \tfrac{1}{500} - \left(-\tfrac{1}{2000}\right) = 2.5 \text{ mS}$$

$$\mathbf{y}_{22} = \tfrac{1}{10\,000} - \left(-\tfrac{1}{2000}\right) = 0.6 \text{ mS}$$

y

$$\mathbf{y}_{21} = 0.0395 + \left(-\tfrac{1}{2000}\right) = 39 \text{ mS}$$

Entonces deben aplicarse las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{I}_1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad [26]$$

$$\mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2 \qquad [27]$$

donde se utilizan ahora unidades de mA, V y mS o kΩ.

Verificar la solución. ¿Es razonable o esperada?
Escribiendo en forma directa las dos ecuaciones nodales del circuito, se encuentra que

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{2} + \frac{\mathbf{V}_1}{0.5} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{I}_1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2$$

y

$$-39.5\mathbf{V}_1 + \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{2} + \frac{\mathbf{V}_2}{10} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$

lo que concuerda con las ecuaciones [26] y [27] que se obtuvieron de manera directa a partir de los parámetros **y**.

A continuación se recurrirá a las ecuaciones [26] y [27] para analizar el desempeño del dos-puertos en la figura 17.16 bajo varias condiciones de operación diferentes. Proporcionar primero una fuente de corriente de $1\underline{/0^\circ}$ mA en la entrada y conectar una carga de 0.5 kΩ (2 mS) en la salida. Por lo tanto, las redes terminadas resultan de un puerto y dan la siguiente información específica que relaciona a $\mathbf{I}_1$ con $\mathbf{V}_1$ y a $\mathbf{I}_2$ con $\mathbf{V}_2$:

$$\mathbf{I}_1 = 1(\text{para cualquier } \mathbf{V}_1) \qquad \mathbf{I}_2 = -2\mathbf{V}_2$$

Se tienen ahora cuatro ecuaciones con cuatro variables, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. Al sustituir las dos relaciones de un puerto en las ecuaciones [26] y [27], se obtienen dos ecuaciones que relacionan a $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$:

$$1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad 0 = 39\mathbf{V}_1 + 2.6\mathbf{V}_2$$

Resolviendo, se observa que

$$\mathbf{V}_1 = 0.1 \text{ V} \quad \mathbf{V}_2 = -1.5 \text{ V}$$
$$\mathbf{I}_1 = 1 \text{ mA} \quad \mathbf{I}_2 = 3 \text{ mA}$$

Estos cuatro valores se aplican al dos-puertos que opera con una entrada establecida ($\mathbf{I}_1 = 1$ mA) y una carga específica ($R_L = 0.5$ kΩ).

A menudo, el desempeño de un amplificador se describe mediante la indicación de unos cuantos valores específicos. Se calcularán cuatro de dichos valores para este dos-puertos con sus terminaciones. Se definirá y se evaluará la ganancia de tensión, la ganancia de corriente, la ganancia de potencia y la impedancia de entrada.

La *ganancia de tensión* $\mathbf{G}_V$ es

$$\mathbf{G}_V = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}$$

De acuerdo con los resultados numéricos, resulta fácil ver que $\mathbf{G}_V = -15$.

La *ganancia de corriente* $\mathbf{G}_I$ se define como

$$\mathbf{G}_I = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}$$

y se tiene

$$\mathbf{G}_I = 3$$

Se define y se calcula la *ganancia de potencia* G_P para una excitación senoidal supuesta. Se tiene

$$G_P = \frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{ent}}} = \frac{\text{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^*\right]}{\text{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*\right]} = 45$$

El dispositivo podría recibir el nombre de amplificador de tensión, de corriente o de potencia, puesto que todas las ganancias son mayores que la unidad. Si se eliminara la resistencia de 2 kΩ la ganancia de potencia aumentaría hasta 354.

Muchas veces se requieren las impedancias de entrada y de salida del amplificador para que pueda conseguirse la transferencia de potencia máxima hacia o desde un dos-puertos adyacente. En esta caso se define la *impedancia de entrada* $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$ como la proporción (o razón) entre la tensión y la corriente ambas de entrada

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = 0.1 \text{ k}\Omega$$

Ésta es la impedancia que se presenta en la fuente de corriente cuando se conecta la carga de 500 Ω en la salida. (Con la salida en cortocircuito, la impedancia de entrada es necesariamente $1/\mathbf{y}_{11}$, o sea 400 Ω.)

Debe observarse que la impedancia de entrada *no puede* determinarse sustituyendo toda fuente por su impedancia interna y combinando después las resistencias o las conductancias. En un circuito dado, un procedimiento de este tipo produciría un valor de 416 Ω. El error, desde luego, proviene de considerar a la fuente *dependiente* como una fuente *independiente*. Si se supone que la impedancia de entrada es numéricamente igual a la tensión de entrada producida por una corriente de entrada de 1 A, la aplicación de la fuente de 1 A origina cierta tensión de entrada $\mathbf{V}_1$ y la magnitud de la fuente dependiente $(0.0395\mathbf{V}_1)$ no puede valer cero. Se debe recordar que cuando se obtiene la impedancia equivalente de Thévenin de un circuito con una fuente dependiente, junto con una o más fuentes independientes, se deben sustituir las fuentes independientes por cortocircuitos o circuitos abiertos, aunque una fuente dependiente no puede suprimirse. Desde luego, si la tensión o la corriente de la que depende la fuente dependiente es cero, estará inactiva; en ocasiones, un circuito se simplifica al reconocer una ocurrencia de este tipo.

Además de $\mathbf{G}_V$, $\mathbf{G}_I$, G_P y $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$, hay otro parámetro de desempeño que resulta bastante útil: la *impedancia de salida* $\mathbf{Z}_{\text{sal}}$, la que se determina para una configuración de circuito diferente.

La impedancia de salida es sólo otro término con el que se designa la impedancia de Thévenin que aparece en el circuito equivalente de Thévenin de esa porción de la red enfrentada por la carga. En el circuito, que se supone que es accionado por una fuente de corriente de $1\underline{/0^\circ}$ mA se sustituye, por lo tanto, dicha fuente independiente por un circuito abierto, se deja sola a la fuente dependiente, y se busca la impedancia de *entrada* vista al mirar hacia la izquierda de las terminales de salida (con la carga eliminada). De tal modo, se define

$$\mathbf{Z}_{\text{sal}} = \mathbf{V}_2 \big|_{\mathbf{I}_2=1} \text{ Con todas las demás fuentes independientes desconectadas } y\ R_L \text{ removido}$$

Por lo tanto, eliminar la resistencia de carga, aplicar $1\underline{/0^\circ}$ mA (puesto que se está trabajando en V, mA y kΩ) en las terminales de salida y determinar $\mathbf{V}_2$. Fijando estos requerimientos en las ecuaciones [26] y [27], se obtiene

$$0 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad 1 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$

Al resolver

$$\mathbf{V}_2 = 0.1190 \text{ V}$$

y, de ese modo,

$$\mathbf{Z}_{\text{sal}} = 0.1190 \text{ k}\Omega$$

Un procedimiento alterno podría consistir en encontrar la tensión de salida en circuito abierto y la corriente de salida en cortocircuito. Por lo tanto, la impedancia de Thévenin es la impedancia de salida:

$$\mathbf{Z}_{\text{sal}} = \mathbf{Z}_{\text{th}} = -\frac{\mathbf{V}_{2ca}}{\mathbf{I}_{2cc}}$$

Llevando a cabo este procedimiento, volver a encender primero la fuente independiente de modo que $\mathbf{I}_1 = 1$ mA, y después poner en circuito abierto la carga, de modo que $\mathbf{I}_2 = 0$. Se tiene

$$1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad 0 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$

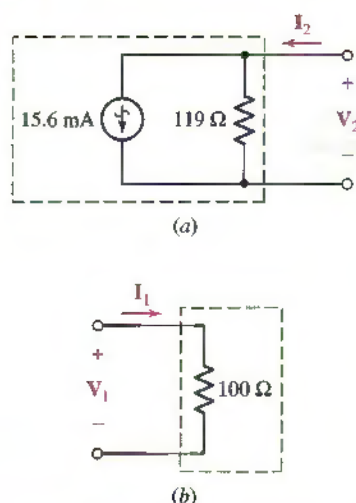


FIGURA 17.17 (*a*) Equivalente de Norton de la red de la figura 17.16 a la izquierda de la terminal de salida, $I_1 = 1\underline{/0^\circ}$ mA. (*b*) Equivalente de Thévenin de esa porción de la red, a la derecha de las terminales de entrada, si $I_2 = -2V_2$ mA.

y de ese modo:

$$\mathbf{V}_{2ca} = -1.857 \text{ V}$$

Enseguida, se aplican las condiciones de cortocircuito, esto es, se deja $\mathbf{V}_2 = 0$ y se iguala de nuevo $\mathbf{I}_1 = 1$ mA. Se encuentra que

$$\mathbf{I}_1 = 1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0 \qquad \mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{I}_{2cc} = 15.6 \text{ mA}$$

Las direcciones tomadas de $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ resultan, en consecuencia, en una impedancia de Thévenin o de salida

$$\mathbf{Z}_{sal} = -\frac{\mathbf{V}_{2ca}}{\mathbf{I}_{2cc}} = -\frac{-1.857}{15.6} = 0.1190 \text{ k}\Omega$$

como antes.

Se cuenta ahora con suficiente información que permite dibujar el equivalente de Thévenin o de Norton del dos-puertos de la figura 17.16, cuando se activa por medio de una fuente de corriente de $1\underline{/0^\circ}$ mA y se termina en una carga de 500 Ω. De tal modo, el equivalente de Norton que se presenta a la carga debe contener una fuente de corriente igual a la corriente en cortocircuito $\mathbf{I}_{2sc}$ en paralelo con la impedancia de salida; este equivalente se muestra en la figura 17.17*a*. Además, el equivalente de Thévenin que se presenta a la fuente de entrada $1\underline{/0^\circ}$ mA debe consistir sólo en la impedancia de entrada, según se observa en la figura 17.17*b*.

Antes de dejar los parámetros y se debe reconocer su utilidad para describir la conexión en paralelo de dos-puertos, como se indica en la figura 17.18. Cuando se define por primera vez un puerto en la sección 17.1, se observa que la corriente que entra y sale de las dos terminales de un puerto tenía que ser igual y que no podrían establecerse conexiones externas que establecieran un puente entre puertos. Al parecer la conexión en paralelo de la figura 17.18 viola esta condición. Sin embargo, si cada pareja de puertos tiene un nodo de referencia que sea común a su puerto de entrada y de salida y si el dos-puertos se conecta en paralelo de manera que tengan un nodo de referencia común, entonces todos los puertos quedan como tales después de la conexión. Por lo tanto, para la red *A*,

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{y}_A\mathbf{V}_A$$

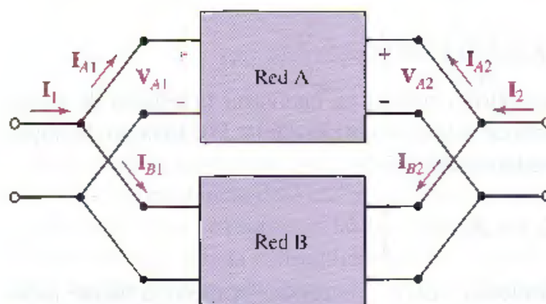


FIGURA 17.18 Conexión en paralelo de dos redes de dos puertos. Si ambas entradas y salidas tienen el mismo nodo de referencia, la matriz de admitancia es $\mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B$.

donde

$$\mathbf{I}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{A1} \\ \mathbf{I}_{A2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{A1} \\ \mathbf{V}_{A2} \end{bmatrix}$$

y en el caso de la red B

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{y}_B \mathbf{V}_B$$

Sin embargo,

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B = \mathbf{V} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{I} = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{I} = (\mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B)\mathbf{V}$$

y se observa que cada parámetro y de la red en paralelo está dado como la suma de los parámetros correspondientes de las redes individuales:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B \qquad [28]$$

Lo anterior puede extenderse a cualquier número de dos-puertos conectados en paralelo.

PRÁCTICA

17.6 Determinar $\mathbf{y}$ y $\mathbf{Z}_{sal}$ de los dos puertos completos de la figura 17.19.

17.7 Utilizar las transformaciones Δ-Yy Y-Δ para determinar R_{ent} de la red que se muestra en (*a*) la figura 17.20*a*; (*b*) la figura 17.20*b*.

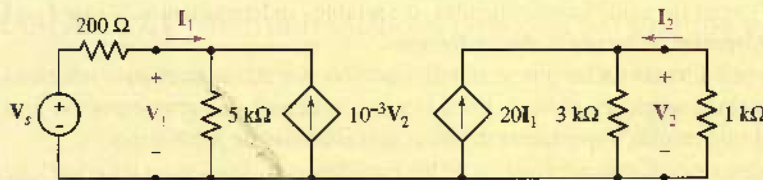


FIGURA 17.19

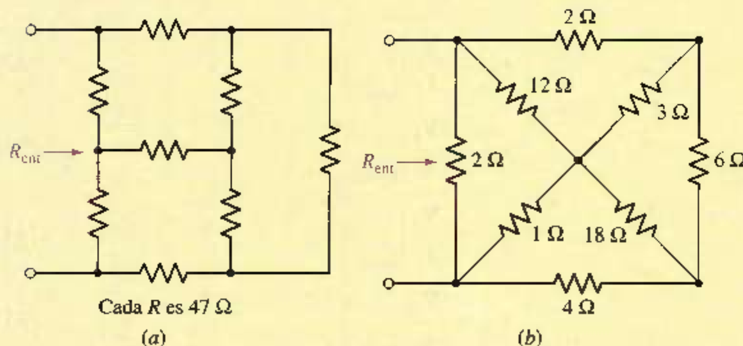


FIGURA 17.20

Respuesta: 17.6: $\begin{bmatrix} 2 \times 10^{-4} & -10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} & 20.3 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$ (S); 51.1 Ω. 17.7: 53.71 Ω, 1.311 Ω.

17.4 PARÁMETROS DE IMPEDANCIA

El concepto de parámetros de dos puertos se presentó en términos de los parámetros de admitancia en cortocircuito. Sin embargo, existen otros conjuntos de parámetros y cada uno se asocia con una clase de redes particular para cuyo uso se proporciona el análisis más simple. Se considerarán otros tres tipos de parámetros, los de impedancia en circuito abierto, que son el tema de esta sección, así como los híbridos y los de transmisión, que se analizan en las secciones siguientes.

Se comienza de nuevo con dos puertos lineales generales que no contienen ninguna fuente independiente: las corrientes y las tensiones se asignan como ya se hizo (figura 17.8). Considerar ahora la tensión $\mathbf{V}_1$ como la respuesta producida por dos fuentes de corriente $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. Por lo tanto, para $\mathbf{V}_1$ se puede escribir

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \qquad [29]$$

y para $\mathbf{V}_2$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \qquad [30]$$

o

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{zI} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \qquad [31]$$

Desde luego, al usar estas ecuaciones no es necesario que $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ sean fuentes de corriente; tampoco se requiere que $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ sean fuentes de tensión. En general, se podría tener, en cualquier extremo, cualesquiera redes que terminen en los de dos puertos. A medida que se escriben las ecuaciones, tal vez se considere que $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ sean las cantidades indicadas, o variables independientes, y que $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ sean incógnitas, o variables dependientes.

Las seis formas en las que se pueden escribir dos ecuaciones para relacionar estas cuatro cantidades definen los diferentes sistemas de parámetros. Se estudian los cuatro más importantes de estos seis sistemas de parámetros.

La descripción más informativa de los parámetros **z**, definida en las ecuaciones [29] y [30], se obtiene igualando a cero cada una de las corrientes. Por lo tanto,

$$\mathbf{z}_{11} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \qquad [32]$$

$$\mathbf{z}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \qquad [33]$$

$$\mathbf{z}_{21} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \qquad [34]$$

$$\mathbf{z}_{22} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \qquad [35]$$

Puesto que resulta una corriente igual a cero de una terminación en circuito abierto, los parámetros **z** se conocen como *parámetros de impedancia en circuito abierto*, los cuales se relacionan con facilidad con los parámetros de admitancia

en cortocircuito al resolver las ecuaciones [29] y [30] para $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{z}_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{vmatrix}}$$

o

$$\mathbf{I}_1 = \left(\frac{\mathbf{z}_{22}}{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}} \right) \mathbf{V}_1 - \left(\frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}} \right) \mathbf{V}_2$$

Utilizando la notación de determinantes y teniendo cuidado de que el subíndice sea una $\mathbf{z}$, se supone que $\Delta_\mathbf{z} \neq 0$ se obtiene

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}_{22}}{\Delta_\mathbf{z}} \qquad \mathbf{y}_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_\mathbf{z}} = -\frac{\mathbf{z}_{12}}{\Delta_\mathbf{z}}$$

y del despeje de $\mathbf{I}_2$, se tiene

$$\mathbf{y}_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_\mathbf{z}} = -\frac{\mathbf{z}_{21}}{\Delta_\mathbf{z}} \qquad \mathbf{y}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}_{11}}{\Delta_\mathbf{z}}$$

De manera similar, los parámetros $\mathbf{z}$ se deben expresar en términos de los parámetros de admitancia. Las transformaciones de esta naturaleza son posibles entre cualquiera de los diversos sistemas de parámetros, y en forma completa se podría obtener una colección de fórmulas ocasionalmente útiles. Las transformaciones entre los parámetros $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ (así como las de los parámetros $\mathbf{h}$ y $\mathbf{t}$ que se consideran en las secciones siguientes) se presentan en la tabla 17.1 como una referencia útil.

TABLA 17.1 Transformaciones entre los parámetros **y**, **z**, **h** y **t**

	y		**z**		**h**		**t**	
y	$\mathbf{y}_{11}$	$\mathbf{y}_{12}$	$\frac{\mathbf{z}_{22}}{\Delta_\mathbf{z}}$	$\frac{-\mathbf{z}_{12}}{\Delta_\mathbf{z}}$	$\frac{1}{\mathbf{h}_{11}}$	$\frac{-\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{11}}$	$\frac{\mathbf{t}_{22}}{\mathbf{t}_{12}}$	$\frac{-\Delta_\mathbf{t}}{\mathbf{t}_{12}}$
	$\mathbf{y}_{21}$	$\mathbf{y}_{22}$	$\frac{-\mathbf{z}_{21}}{\Delta_\mathbf{z}}$	$\frac{\mathbf{z}_{11}}{\Delta_\mathbf{z}}$	$\frac{\mathbf{h}_{21}}{\mathbf{h}_{11}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{h}}{\mathbf{h}_{11}}$	$\frac{-1}{\mathbf{t}_{12}}$	$\frac{\mathbf{t}_{11}}{\mathbf{t}_{12}}$
z	$\frac{\mathbf{y}_{22}}{\Delta_\mathbf{y}}$	$\frac{-\mathbf{y}_{12}}{\Delta_\mathbf{y}}$	$\mathbf{z}_{11}$	$\mathbf{z}_{12}$	$\frac{\Delta_\mathbf{h}}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{\mathbf{t}_{11}}{\mathbf{t}_{21}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{t}}{\mathbf{t}_{21}}$
	$\frac{-\mathbf{y}_{21}}{\Delta_\mathbf{y}}$	$\frac{\mathbf{y}_{11}}{\Delta_\mathbf{y}}$	$\mathbf{z}_{21}$	$\mathbf{z}_{22}$	$\frac{-\mathbf{h}_{21}}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{t}_{21}}$	$\frac{\mathbf{t}_{22}}{\mathbf{t}_{21}}$
h	$\frac{1}{\mathbf{y}_{11}}$	$\frac{-\mathbf{y}_{12}}{\mathbf{y}_{11}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{z}}{\mathbf{z}_{22}}$	$\frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{22}}$	$\mathbf{h}_{11}$	$\mathbf{h}_{12}$	$\frac{\mathbf{t}_{12}}{\mathbf{t}_{22}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{t}}{\mathbf{t}_{22}}$
	$\frac{\mathbf{y}_{21}}{\mathbf{y}_{11}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{y}}{\mathbf{y}_{11}}$	$\frac{-\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{z}_{22}}$	$\mathbf{h}_{21}$	$\mathbf{h}_{22}$	$\frac{-1}{\mathbf{t}_{22}}$	$\frac{\mathbf{t}_{21}}{\mathbf{t}_{22}}$
t	$\frac{-\mathbf{y}_{22}}{\mathbf{y}_{21}}$	$\frac{-1}{\mathbf{y}_{21}}$	$\frac{\mathbf{z}_{11}}{\mathbf{z}_{21}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{z}}{\mathbf{z}_{21}}$	$\frac{-\Delta_\mathbf{h}}{\mathbf{h}_{21}}$	$\frac{-\mathbf{h}_{11}}{\mathbf{h}_{21}}$	$\mathbf{t}_{11}$	$\mathbf{t}_{12}$
	$\frac{-\Delta_\mathbf{y}}{\mathbf{y}_{21}}$	$\frac{-\mathbf{y}_{11}}{\mathbf{y}_{21}}$	$\frac{1}{\mathbf{z}_{21}}$	$\frac{\mathbf{z}_{22}}{\mathbf{z}_{21}}$	$\frac{-\mathbf{h}_{22}}{\mathbf{h}_{21}}$	$\frac{-1}{\mathbf{h}_{21}}$	$\mathbf{t}_{21}$	$\mathbf{t}_{22}$

Para todos los grupos de parámetros: $\Delta_\mathbf{p} = \mathbf{p}_{11}\mathbf{p}_{22} - \mathbf{p}_{12}\mathbf{p}_{21}$.

Si los dos puertos corresponden a una red bilateral, está presente la reciprocidad; es fácil demostrar que lo anterior origina la igualdad de $\mathbf{z}_{12}$ y $\mathbf{z}_{21}$.

Los circuitos equivalentes de nuevo se podrían obtener a partir de la inspección de las ecuaciones [29] y [30]; su construcción se facilita sumando y restando o $\mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_1$ en la ecuación [30], o $\mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_2$ en la ecuación [29]. Cada uno de estos circuitos equivalentes contiene una fuente de tensión dependiente.

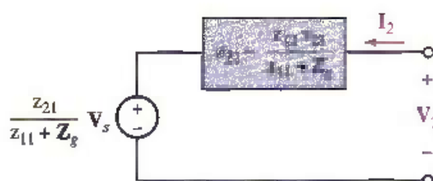
Se dejará la deducción de un equivalente de estas características para algún momento de ocio y se considerará a continuación un ejemplo de naturaleza más general. ¿Se puede construir un equivalente de Thévenin general del dos-puertos, según se observa desde las terminales de salida? Es necesario suponer primero una configuración específica del circuito de entrada y se seleccionará una fuente de tensión independiente $\mathbf{V}_s$ (signo positivo en la parte superior) en serie con una impedancia de generador $\mathbf{Z}_g$. Por lo tanto,

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_1 + \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_g$$

Al combinar este resultado con las ecuaciones [29] y [30], se eliminarán $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$ para obtener

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g}\mathbf{V}_s + \left(\mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g}\right)\mathbf{I}_2$$

El circuito equivalente de Thévenin se puede dibujar en forma directa a partir de esta ecuación, como se observa en la figura 17.21. La impedancia de salida, expresada en términos de los parámetros z está dada por



■ **FIGURA 17.21** Equivalente de Thévenin del dos-puertos general, según se observa desde las terminales de salida, expresado en términos de los parámetros de impedancia en circuito abierto.

$$\mathbf{Z}_{sal} = \mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g}$$

Si la impedancia del generador es cero, se obtiene la expresión más simple

$$\mathbf{Z}_{sal} = \frac{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11}} = \frac{\Delta_\mathbf{z}}{\Delta_{22}} = \frac{1}{\mathbf{y}_{22}} \qquad (\mathbf{Z}_g = 0)$$

Para este caso especial, la *admitancia* de salida es idéntica a $\mathbf{y}_{22}$, como se indica mediante la relación básica de la ecuación [13].

EJEMPLO 17.8

Dado el siguiente conjunto de parámetros de impedancia:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 10^3 & 10 \\ -10^6 & 10^4 \end{bmatrix} \qquad (\text{todo } \Omega)$$

que es representativo de un transistor que funciona en la configuración de emisor común, determinar las ganancias respectivas de tensión, corriente y potencia, así como las impedancias de entrada y salida. Podría considerar el dos-puertos como si lo accionara una fuente de tensión senoidal ideal $\mathbf{V}_s$ en serie con una resistencia de 500 Ω y terminado en una resistencia de carga de 10 kΩ.

Las dos ecuaciones descriptivas del dos-puertos son

$$\mathbf{V}_1 = 10^3\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_2 \qquad [36]$$

$$\mathbf{V}_2 = -10^6\mathbf{I}_1 + 10^4\mathbf{I}_2 \qquad [37]$$

y las ecuaciones de caracterización de las redes de entrada y salida corresponden a

$$\mathbf{V}_s = 500\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1 \qquad [38]$$

$$\mathbf{V}_2 = -10^4\mathbf{I}_2 \qquad [39]$$

A partir de estas últimas cuatro ecuaciones, se pueden obtener, sin ninguna dificultad, las expresiones de $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{I}_1$ $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ en términos de $\mathbf{V}_s$:

$$\mathbf{V}_1 = 0.75\mathbf{V}_s \qquad \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_s}{2\,000}$$

$$\mathbf{V}_2 = -250\mathbf{V}_s \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_s}{40}6$$

A partir de esta información, resulta sencillo determinar la ganancia de tensión,

$$\mathbf{G}_V = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = -333$$

la ganancia de corriente,

$$\mathbf{G}_I = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = 50$$

la ganancia de potencia,

$$G_P = \frac{\text{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^*\right]}{\text{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*\right]} = 16\,670$$

y la impedancia de entrada

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = 1\,500\ \Omega$$

La impedancia de salida se obtiene con referencia a la figura 17.21:

$$\mathbf{Z}_{\text{sal}} = \mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g} = 16.67\ \text{k}\Omega$$

De acuerdo con la predicción del teorema de transferencia de potencia máxima, la ganancia de potencia alcanza un valor máximo cuando $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{\text{sal}}^* = 16.67$ kΩ; ese valor máximo es 17 045.

Los parámetros **y** son útiles cuando dos elementos de dos-puertos se interconectan en paralelo, y de una manera dual, los parámetros **z** simplifican el problema de una conexión en serie de redes, que se ilustra en la figura 17.22. Observar que la conexión en serie *no* es la misma que la conexión en cascada que se explicará después en conexión con los parámetros de transmisión. Si cada uno del de dos puertos tiene un nodo de referencia común para su entrada y salida, y si las referencias se conectan juntas como se indica en la figura 17.22, entonces $\mathbf{I}_1$ fluye a través de los puertos de entrada de las dos redes en serie. Una afirmación similar se cumple para $\mathbf{I}_2$. Por lo tanto, los puertos siguen siendo puertos después de la interconexión. Se concluye que $\mathbf{I} = \mathbf{I}_A = \mathbf{I}_B$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{V} = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B &= \mathbf{z}_A\mathbf{I}_A + \mathbf{z}_B\mathbf{I}_B \\ &= (\mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B)\mathbf{I} = \mathbf{z}\mathbf{I}\end{aligned}$$

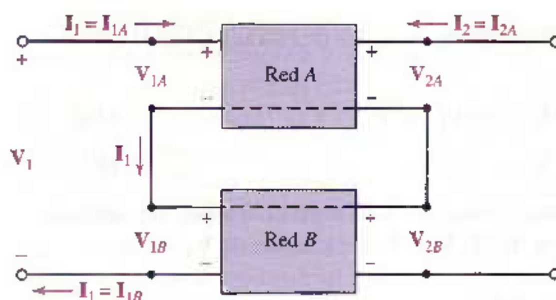


FIGURA 17.22 La conexión en serie de dos redes de dos puertos se realiza conectando entre sí los cuatro nodos de referencia común; en ese caso la matriz $\mathbf{z} = \mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B$.

donde

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B$$

de manera que $\mathbf{z}_{11} = \mathbf{z}_{11A} + \mathbf{z}_{11B}$, etcétera.

PRÁCTICA

17.8 Calcular **z** del dos puertos que se muestra en: (*a*) la figura 17.23*a*; (*b*) la figura 17.23*b*.

17.9 Encontrar **z** del dos-puertos que se muestra en la figura 17.23*c*.

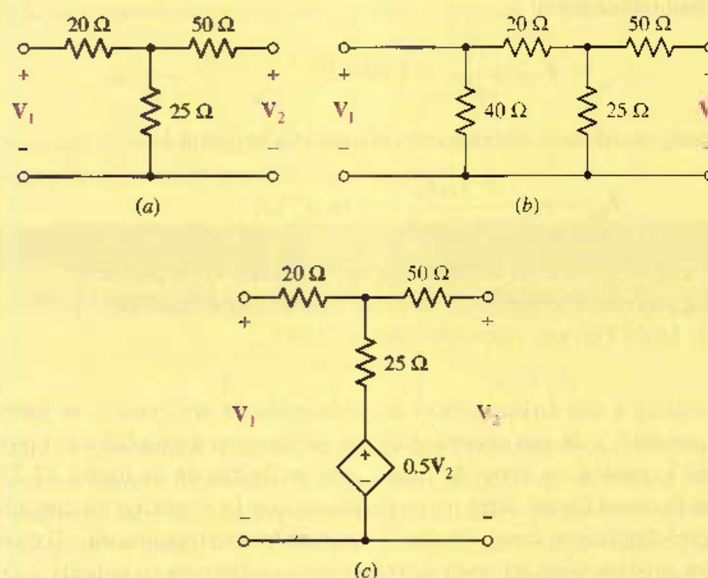


FIGURA 17.23

Respuestas: 17.8: $\begin{bmatrix} 45 & 25 \\ 25 & 75 \end{bmatrix}$ (Ω), $\begin{bmatrix} 21.2 & 11.76 \\ 11.76 & 67.6 \end{bmatrix}$ (Ω). 17.9: $\begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 50 & 150 \end{bmatrix}$ (Ω)6.

APLICACIÓN PRÁCTICA

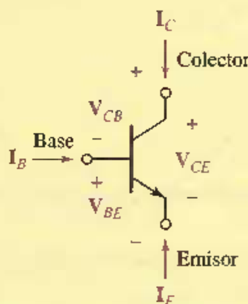
Caracterización de transistores

Por lo general, los valores de los parámetros de los transistores de unión bipolar se indican en términos de parámetros **h**. Inventado a finales de la década de los años de 1940 por investigadores de Bell Laboratories (figura 17.24), el transistor es un dispositivo semiconductor no lineal que constituye la base de casi todos los amplificadores y circuitos lógicos digitales.



■ **FIGURA 17.24** Fotografía de la primera demostración del transistor bipolar de unión ("bjt").
Lucent Technologies Inc./Bell Labs

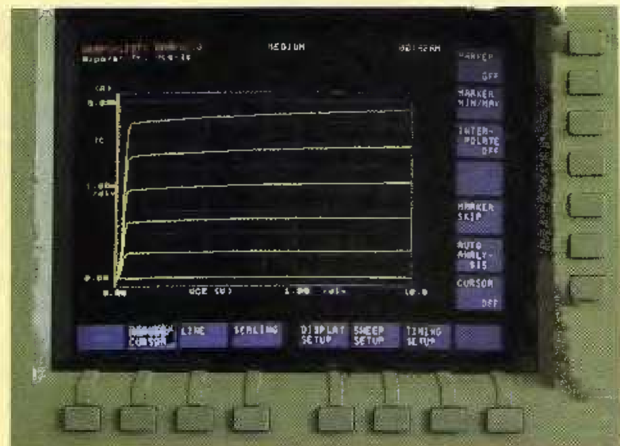
Las tres terminales del transistor se denominan *base* (*b*), *colector* (*c*) y *emisor* (*e*) como se muestra en la figura 17.25, y se nombran de acuerdo con sus funciones en el transporte de portadores de carga dentro del dispositivo. Los parámetros **h** de un transistor de unión bipolar se miden casi siempre con la terminal del emisor conectada a tierra, lo que se conoce también como configuración de *emisor común*; la base se designa entonces como la entrada y el colector como la salida. Sin embargo, como ya se mencionó, el transistor es un dispositivo no lineal, y por ello la definición de los parámetros **h** válida para todas las tensiones y las corrientes no se cumple. Por lo tanto, es una práctica común indicar los parámetros **h** con un valor específico de la corriente de colector I_C y de la tensión del colector-emisor V_{CE}. Otra consecuencia de la no linealidad del dispositivo es que los parámetros **h** en ca y en cd muchas veces difieren bastante en su valor.



■ **FIGURA 17.25** Diagrama de un bjt que muestra las corriente y tensiones definidas de acuerdo con la convención del IEEE.

Existen muchos tipos de instrumentos que se emplean para obtener los parámetros **h** correspondientes a un transistor específico. Un ejemplo es un analizador de parámetros de semiconductor, que se muestra en la figura 17.26. Este instrumento barre la corriente deseada (graficada sobre el eje vertical) en función de una tensión especificada (graficada sobre el eje horizontal). Se genera una "familia" de curvas al variar la corriente de la base en intervalos discretos.

Como ejemplo, el fabricante del transistor de silicio 2N3904 NPN indica los parámetros **h** como se nota en la tabla 17.2; observar que a los parámetros específicos se les da asignaciones alternas (h_{ie}, h_{re}, etc.) por los ingenieros electrónicos. Las mediciones fueron hechas con $I_C = 1.0$ mA, $V_{CE} = 10$ Vdc y $f = 1.0$ kHz.



■ **FIGURA 17.26** Vista del despliegue de un analizador de parámetros de semiconductor HP 4155a, que se usa para medir los parámetros **h** de un transistor de unión bipolar 2N3904.

Sólo por diversión, uno de los autores y un amigo decidieron medir tales parámetros. Luego de tomar un dispositivo económico del anaquel y utilizar el instrumento de la figura 17.20b, encontraron

$$h_{oe} = 3.3\ \mu\text{mhos} \qquad h_{fe} = 109$$
$$h_{ie} = 3.02\ \text{k}\Omega \qquad h_{re} = 4 \times 10^{-3}$$

(Continúa en la siguiente página)

TABLA 17.2 Resumen de los parámetros en ca del 2N3904

Parámetro	Nombre	Especificación	Unidades
h_{ie} (h_{11})	Impedancia de entrada	1.0–10	kΩ
h_{re} (h_{12})	Relación (o razón) de retroalimentación de tensión	$0.5–8.0 \times 10^{-4}$	–
h_{fe} (h_{21})	Ganancia de corriente para pequeña señal	100–400	–
h_{oe} (h_{22})	Admitancia de salida	1.0–40	μmhos

que los primeros tres de estos valores se ubicaron bien dentro de las tolerancias reconocidas por el fabricante, aunque mucho más cerca de los valores mínimos que de los máximos. Sin embargo, el valor de h_{re} fue un orden de magnitud superior ¡que el valor máximo especificado por la hoja de datos del fabricante!, lo cual resultó bastante desconcertante, pues se pensó que todo iba muy bien hasta ese momento.

Luego de reflexionar, se percataron que el arreglo experimental permitía que el dispositivo se calentara durante la medición, ya que estaban barriendo valores por debajo y por arriba de $I_C = 1$ mA. Desafortunadamente, los transistores pueden cambiar sus propiedades de forma muy drástica en función de la temperatura; los valores del fabricante correspondían de manera específica a 25°C. Luego de que se cambió el barrido para minimizar el calentamiento del dispositivo, obtuvieron un valor de 2.0×10^{-4} para h_{re}. Con los circuitos lineales resulta mucho más fácil trabajar, ¡aunque los circuitos no lineales pueden ser mucho más interesantes!

17.5 PARÁMETROS HÍBRIDOS

La dificultad para medir cantidades como los parámetros de impedancia en circuito abierto surgen cuando debe medirse un parámetro como $\mathbf{z}_{21}$. Una corriente senoidal conocida se suministra con facilidad en las terminales de entrada, pero debido al elevado excedente de la impedancia de salida del circuito transistorizado, resulta difícil poner en circuito abierto las terminales de salida, o incluso suministrar las tensiones de polarización de cd necesarias y medir la tensión de salida senoidal. Es mucho más fácil llevar a cabo una medición de corriente en cortocircuito en las terminales de salida.

Los parámetros híbridos se definen escribiendo el par de ecuaciones que relacionan $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ como si $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_2$ fueran las variables independientes:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \quad [40]$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2 \quad [41]$$

o

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{h} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad [42]$$

La naturaleza de los parámetros se aclara poniendo primero $\mathbf{V}_2 = 0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{h}_{11} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} = \text{impedancia de entrada de cortocircuito}$$

$$\mathbf{h}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} = \text{ganancia de corriente de cortocircuito}$$

Si $\mathbf{I}_1 = 0$, se obtiene

$$\mathbf{h}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} = \text{ganancia de tensión inversa de circuito abierto}$$

$$\mathbf{h}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} = \text{admitancia de salida de circuito abierto}$$

Dado que los parámetros representan una impedancia, una admitancia, una ganancia de tensión y una ganancia de corriente, se conocen con el nombre de parámetros "híbridos".

Las designaciones de los subíndices de estos parámetros se simplifican a menudo cuando se aplican a transistores. De tal modo, $\mathbf{h}_{11}$, $\mathbf{h}_{12}$, $\mathbf{h}_{21}$ y $\mathbf{h}_{22}$ se convierten en $\mathbf{h}_i$, $\mathbf{h}_r$, $\mathbf{h}_f$ y $\mathbf{h}_o$, respectivamente, donde los subíndices denotan entrada, inverso, directo y salida.

EJEMPLO 17.9

Determinar h del circuito resistivo bilateral dibujado en la figura 17.27.

Con la salida en cortocircuito ($\mathbf{V}_2 = 0$), la aplicación de una fuente de 1 A en la entrada ($\mathbf{I}_1 = 1$ A) produce una tensión de entrada de 3.4 V ($\mathbf{V}_1 = 3.4$ V); por consiguiente, $\mathbf{h}_{11} = 3.4\ \Omega$. Bajo estas mismas condiciones, la corriente de salida se obtiene con facilidad mediante la división de corriente, $\mathbf{I}_2 = -0.4$ A; de tal modo, $\mathbf{h}_{21} = -0.4$.

Los dos parámetros restantes se obtienen con la entrada en circuito abierto ($\mathbf{I}_1 = 0$). Se aplicará una tensión de 1 V en las terminales de salida ($\mathbf{V}_2 = 1$ V). La respuesta en las terminales de entrada es 0.4 V ($\mathbf{V}_1 = 0.4$ V), y por ello, $\mathbf{h}_{12} = 0.4$. La corriente entregada por esta fuente en las terminales de salida es 0.1 A ($\mathbf{I}_2 = 0.1$ A), y, por lo tanto, $\mathbf{h}_{22} = 0.1$ S.

Por lo tanto, se tiene $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 3.4\ \Omega & 0.4 \\ -0.4 & 0.1\ \text{S} \end{bmatrix}$, que es una consecuencia del teorema de reciprocidad $\mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21}$ en una red bilateral.

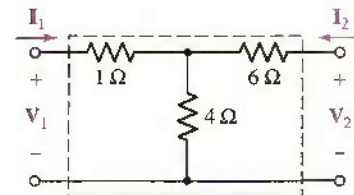


FIGURA 17.27 Red bilateral para la que se calculan los parámetros h: $\mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21}$.

PRÁCTICA

17.10 Determinar **h** del dos-puertos que se muestra en: (*a*) la figura 17.28*a*; (*b*) la figura 17.28*b*.

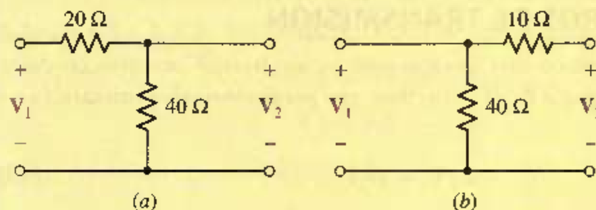


FIGURA 17.28

17.11 Si $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 5\ \Omega & 2 \\ -0.5 & 0.1\ \text{S} \end{bmatrix}$, encuentre (*a*) **y**; (*b*) **z**.

Respuestas: 17.10: $\begin{bmatrix} 20\ \Omega & 1 \\ -1 & 25\ \text{ms} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8\ \Omega & 0.8 \\ -0.8 & 20\ \text{ms} \end{bmatrix}$. 17.11: $\begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$ (S), $\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ (Ω).

El circuito de la figura 17.29 es una traducción directa de las dos ecuaciones de definición [40] y [41]. La primera representa la LKT en torno al lazo de entrada, mientras que la segunda se obtiene a partir de la LKC en el nodo de salida superior. Este circuito es también un circuito equivalente de transistor muy común. Se van a suponer algunos valores razonables para la configuración de emisor común: $\mathbf{h}_{11} = 1\,200\Omega$, $\mathbf{h}_{12} = 2 \times 10^{-4}$, $\mathbf{h}_{21} = 50$, $\mathbf{h}_{22} = 50 \times 10^{-6}$ S, un generador de tensión de $1\underline{/0^\circ}$ mV en serie con 800 Ω, y una carga de 5 kΩ. Para la entrada,

$$10^{-3} = (1\,200 + 800)\mathbf{I}_1 + 2 \times 10^{-4}\mathbf{V}_2$$

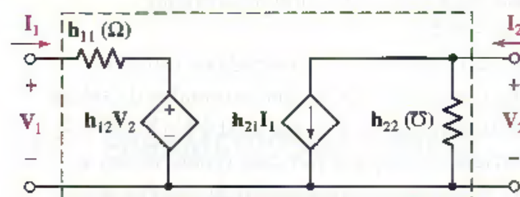
y en la salida:

$$\mathbf{I}_2 = -2 \times 10^{-4}\mathbf{V}_2 = 50\mathbf{I}_1 + 50 \times 10^{-6}\mathbf{V}_2$$

Despejando, se tiene

$$\mathbf{I}_1 = 0.510\ \mu\text{A} \qquad \mathbf{V}_1 = 0.592\text{ mV}$$
$$\mathbf{I}_2 = 20.4\ \mu\text{A} \qquad \mathbf{V}_2 = -102\text{ mV}$$

A través del transistor se tiene una ganancia de corriente de 40, una ganancia de tensión de −172, y una ganancia de potencia de 6 880. La impedancia de entrada del transistor corresponde a 1 160 Ω; unos cuantos cálculos más indican que la impedancia de salida es igual a 22.2 kΩ.



■ **FIGURA 17.29** Los cuatro parámetros h se refieren a un dos-puertos. Las ecuaciones pertinentes son $\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$.

Se podrían agregar en forma directa parámetros híbridos cuando se conectan dos-puertos, en serie a la entrada y en paralelo a la salida, lo cual se conoce como interconexión serie-paralelo, aunque no se usa con mucha frecuencia.

17.6 PARÁMETROS DE TRANSMISIÓN

Los últimos parámetros de dos puertos que se analizarán se conocen como ***parámetros* t**, ***parámetros ABCD*** o simplemente ***parámetros de transmisión***; se definen mediante:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{t}_{11}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{12}\mathbf{I}_2 \qquad [43]$$

y

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{t}_{21}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{22}\mathbf{I}_2 \qquad [44]$$

o

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \qquad [45]$$

donde $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ se definen como es usual (figura 17.8). Los signos negativos que aparecen en las ecuaciones [43] y [44] deben asociarse con la corriente

de salida, como ($-\mathbf{I}_2$). Así, tanto $\mathbf{I}_1$ como $-\mathbf{I}_2$ se dirigen hacia la derecha, o sea la dirección de la transmisión de la energía o de la señal.

Otra nomenclatura que se emplea mucho para este conjunto de parámetros es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_{11} & \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{t}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad [46]$$

Observar que no hay signos negativos en las matrices **t** o **ABCD**.

Considerando de nuevo las ecuaciones [43] a [45], se observa que las cantidades de la izquierda, con frecuencia consideradas como las variables dadas o independientes, son la tensión y la corriente ambas de entrada, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$; las variables dependientes, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$, son las cantidades de salida. Por lo tanto, los parámetros de transmisión proporcionan una relación directa entre la entrada y la salida. Su uso principal se presenta en el análisis de líneas de transmisión y en las redes en cascada.

Se van a determinar los parámetros **t** del dos-puertos resistivo bilateral de la figura 17.30*a*. Como ejemplo de un posible procedimiento para determinar un único parámetro, considerar

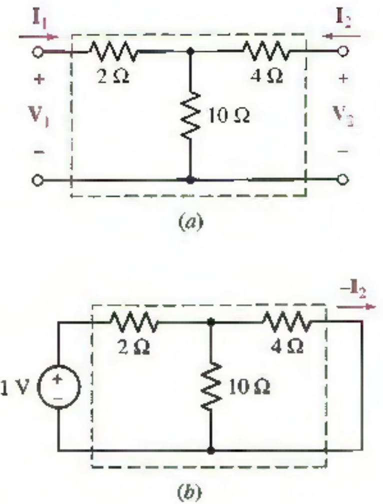
$$\mathbf{t}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{-\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$

Por lo tanto, se pone en cortocircuito la salida ($\mathbf{V}_2 = 0$) y se fija $\mathbf{V}_1 = 1$ V, como en la figura 17.30*b*. Observar que no se puede igualar a uno el denominador al poner la fuente de corriente de 1 A en la salida; en realidad, ya se tiene ahí un cortocircuito. La resistencia equivalente que se presenta a la fuente de 1 V es $R_{\text{eq}} = 2 + (4\|10)\ \Omega$, y en ese caso se utiliza la división de corriente para obtener

$$-\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2 + (4\|10)} \times \frac{10}{10+4} = \frac{5}{34}\ \text{A}$$

De aquí que

$$\mathbf{t}_{12} = \frac{1}{-\mathbf{I}_2} = \frac{34}{5} = 6.8\ \Omega$$



■ **FIGURA 17.30** (*a*) Red resistiva del dos-puertos para la que se va a determinar los parámetros (*b*) para obtener $\mathbf{t}_{12}$, sea $\mathbf{V}_1 = 1$ V con $\mathbf{V}_2 = 0$; entonces $\mathbf{t}_{12} = 1/(-\mathbf{I}_2) = 6.8\ \Omega$.

Si es necesario determinar los cuatro parámetros, se escribe cualquier par conveniente de ecuaciones mediante el empleo de las cuatro cantidades terminales, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. De la figura 17.30*a* se tienen dos ecuaciones de malla

$$\mathbf{V}_1 = 12\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_2 \quad [47]$$

$$\mathbf{V}_2 = 10\mathbf{I}_1 + 14\mathbf{I}_2 \quad [48]$$

Resolviendo la ecuación [48] para $\mathbf{I}_1$, se tiene

$$\mathbf{I}_1 = 0.1\mathbf{V}_2 - 1.4\mathbf{I}_2$$

por lo que $\mathbf{t}_{21} = 0.1$ S y $\mathbf{t}_{22} = 1.4$. Al sustituir la expresión de $\mathbf{I}_1$ en la ecuación [47], se encuentra que

$$\mathbf{V}_1 = 12(0.1\mathbf{V}_2 - 1.4\mathbf{I}_2) + 10\mathbf{I}_2 = 1.2\mathbf{V}_2 - 6.8\mathbf{I}_2$$

además, $\mathbf{t}_{11} = 1.2$ y $\mathbf{t}_{12} = 6.8\ \Omega$, también en este caso.

En el caso de redes recíprocas, el determinante de la matriz **t** es igual a uno:

$$\Delta_\mathbf{t} = \mathbf{t}_{11}\mathbf{t}_{22} - \mathbf{t}_{12}\mathbf{t}_{21} = 1$$

En el ejemplo resistivo de la figura 17.30, $\Delta_t = 1.2 \times 1.4 - 6.8 \times 0.1 = 1$. ¡Bien!

Se termina el análisis del dos-puertos conectando dos de estos dos-puertos en cascada, como se ilustra en las dos redes de la figura 17.31. Las tensiones y corrientes de terminal se indican para cada uno de los dos dos-puertos y las relaciones correspondientes al parámetro **t** son, para la red *A*,

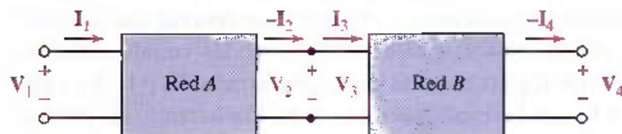


FIGURA 17.31 Cuando las redes *A* y *B* de dos puertos se conectan en cascada, la matriz del parámetro **t** de la red combinada está dada por el producto matricial $\mathbf{t} = \mathbf{t}_A \mathbf{t}_B$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A \begin{bmatrix} \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

y para la red *B*,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_B \begin{bmatrix} \mathbf{V}_4 \\ -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}$$

Al combinar estos resultados, se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A \mathbf{t}_B \begin{bmatrix} \mathbf{V}_4 \\ -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los parámetros **t** de las redes en cascada se calculan mediante el producto de matrices

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A \mathbf{t}_B 6$$



Este producto *no* se obtiene multiplicando los elementos correspondientes en las dos matrices. Si es necesario, repasar el procedimiento correcto para la multiplicación matricial en el apéndice 2.

EJEMPLO 17.10

Determinar los parámetros t de las redes en cascada de la figura 17.32.

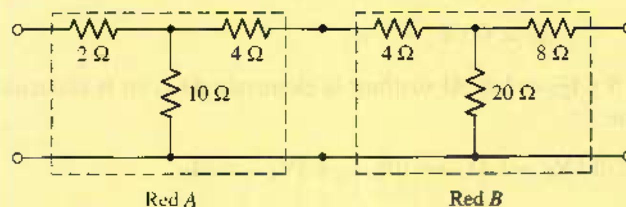


FIGURA 17.32 Conexión en cascada.

La red A corresponde al dos-puertos de la figura 17.32, y, por lo tanto,

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8\ \Omega \\ 0.1\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

mientras que la red B tiene valores de resistencia dos veces mayores, por lo cual

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6\ \Omega \\ 0.05\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

Para la red combinada,

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \\ 0.1 & 1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \\ 0.05 & 1.4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1.2 \times 1.2 + 6.8 \times 0.05 & 1.2 \times 13.6 + 6.8 \times 1.4 \\ 0.1 \times 1.2 + 1.4 \times 0.05 & 0.1 \times 13.6 + 1.4 \times 1.4 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1.78 & 25.84\ \Omega \\ 0.19\ \text{S} & 3.32 \end{bmatrix}$$

PRÁCTICA

17.12 Dada $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 3.2 & 8\ \Omega \\ 0.2\ \text{S} & 4 \end{bmatrix}$, encontrar (*a*) **z**; (*b*) **t** de las dos redes idénticas en cascada; (*c*) **z** de las dos redes idénticas en cascada.

Respuestas: $\begin{bmatrix} 16 & 56 \\ 5 & 20 \end{bmatrix} (\Omega)$; $\begin{bmatrix} 11.84 & 57.6\ \Omega \\ 1.44\ \text{S} & 17.6 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 8.22 & 87.1 \\ 0.694 & 12.22 \end{bmatrix} (\Omega)$.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

La caracterización de redes de dos puertos mediante parámetros **t** brinda la oportunidad de hacer análisis muy simplificados de circuitos en cascada de redes de dos puertos. Como se vio en esta sección, donde, por ejemplo,

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8\ \Omega \\ 0.1\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6\ \Omega \\ 0.05\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

se encuentra que los parámetros **t** que caracterizan a la red en cascada se obtienen con sólo multiplicar $\mathbf{t}_A$ y $\mathbf{t}_B$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A \cdot \mathbf{t}_B$$

Tales operaciones de matrices se efectúan con facilidad con calculadoras científicas o mediante programas de cómputo como MATLAB. La serie de

(Continúa en la siguiente página)

instrucciones de MATLAB, por ejemplo, sería

```
EDU» tA = [1.2 6.8; 0.1 1.4];
EDU» tB = [1.2 13.6; 0.05 1.4];
EDU» t = tA*tB

t =

   1.7800    25.8700
   0.1900     3.3200
```

como se vio en el ejemplo 17.10.

Para introducir matrices en MATLAB, cada una tiene un nombre de variable que reconoce mayúsculas (tA, tB y t en este ejemplo). Los elementos de la matriz se incorporan renglón por renglón, empezando con el superior; los renglones se separan mediante un punto y coma. También en esta situación el lector siempre debe tener cuidado de recordar que el orden de las operaciones resulta crítico cuando se realiza álgebra de matrices. Por ejemplo, tB*tA produce una matriz del todo diferente que la que se busca:

$$\mathbf{t}_B \cdot \mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 2.8 & 27.2 \\ 0.2 & 2.3 \end{bmatrix}$$

En el caso de matrices simples, como las consideradas en este ejemplo, una calculadora científica es apenas práctica (y no más que eso). Sin embargo, las redes en cascada más grandes se manejan con mayor facilidad en una computadora, donde es más conveniente ver todos los arreglos de manera simultánea en la pantalla.

RESUMEN Y REPASO

- Para emplear los métodos de análisis descritos en este capítulo, resulta crítico recordar que cada puerto sólo puede conectarse a una red de un puerto o a un puerto de otra red multipuerto.
- Las ecuaciones de definición para analizar una red de dos puertos en términos de sus parámetros de admitancia (**y**) son:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2$$

  donde

$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \qquad \mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \quad \text{y} \quad \mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

- Las ecuaciones de definición para analizar una red de dos puertos en términos de sus parámetros de impedancia (**z**) son:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

- Las ecuaciones de definición para analizar una red de dos puertos en términos de sus parámetros híbridos (**h**) corresponden a:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$$

- Las ecuaciones de definición para analizar una red de dos puertos en términos de sus parámetros de transmisión (**t**) (denominados también parámetros **ABCD**) son:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{t}_{11}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{12}\mathbf{I}_2 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{I}_1 = \mathbf{t}_{21}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{22}\mathbf{I}_2$$

- Resulta un procedimiento directo hacer conversiones entre los parámetros **h**, **z**, **t** y **y** en función de las necesidades del análisis de circuitos; las transformaciones se resumen en la tabla 17.1.

LECTURAS ADICIONALES

Detalles adicionales acerca de los métodos matriciales en el análisis de circuitos pueden encontrarse en:

R. A. DeCarlo and P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis,* 2a. ed. Nueva York: Oxford University Press, 2001.

El análisis de circuitos transistorizados que utilizan parámetros de red se describe en:

W. H. Hayt, Jr. and G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design,* 2a. ed. Nueva York: Wiley, 1995.

EJERCICIOS

17.1 Redes de un puerto

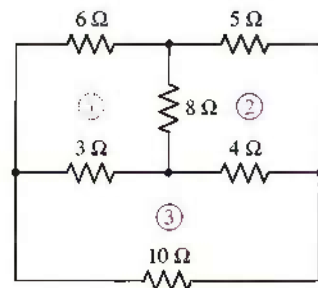
1. Considerar el conjunto de ecuaciones siguientes:

$$4\mathbf{I}_1 - 8\mathbf{I}_2 + 9\mathbf{I}_3 = 12$$
$$5\mathbf{I}_1 \qquad - 7\mathbf{I}_3 = 4$$
$$7\mathbf{I}_1 + 3\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = 0$$

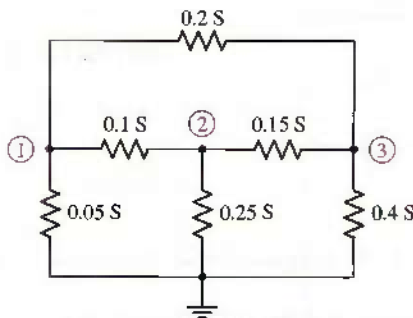
(*a*) Escribir este conjunto de ecuaciones en forma matricial. (*b*) Determinar $\Delta_\mathbf{Z}$. (*c*) Determinar Δ_{11}. (*d*) Calcular $\mathbf{I}_1$. (*e*) Calcular $\mathbf{I}_3$.

2. Calcular $\Delta_\mathbf{Z}$ de la red de la figura 17.33 y luego usarla como ayuda para determinar la potencia generada por la fuente de 100 V cd que se inserta en el exterior de la rama de la malla: (*a*) 1; (*b*) 2; (*c*) 3.

3. Determinar $\Delta_\mathbf{Y}$ de la red de la figura 17.34 y luego utilizar este dato como ayuda para determinar la potencia que genera una fuente de 10 A cd insertada entre el nodo de referencia y el nodo: (*a*) 1; (*b*) 2; (*c*) 3.



■ **FIGURA 17.33**



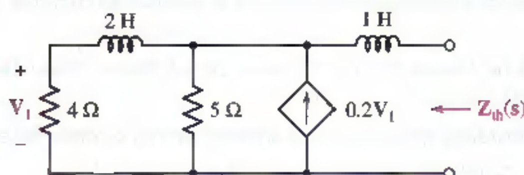
■ **FIGURA 17.34**

4. La matriz de resistencia de cierta red de un puerto es como el de la figura 17.35. Calcular R_{ent} para una fuente insertada solamente en la malla 1.

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \ (\Omega)$$

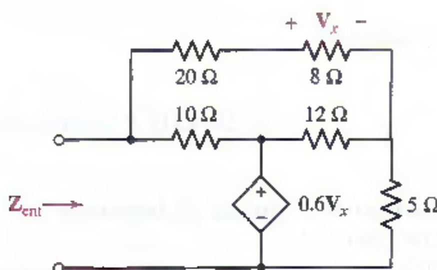
■ **FIGURA 17.35**

5. Obtener la impedancia equivalente de Thévenin $\mathbf{Z}_{th}(\mathbf{s})$ del puerto de la figura 17.36.



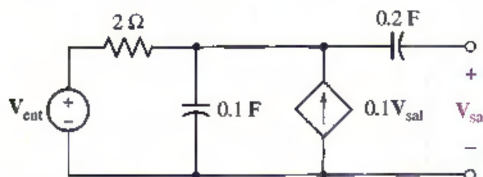
■ **FIGURA 17.36**

6. Determinar $\mathbf{Z}_{ent}$ del puerto presentado en la figura 17.37 (*a*) encontrando $\Delta_{\mathbf{Z}}$; (*b*) encontrando $\Delta_{\mathbf{Y}}$ y $\mathbf{Y}_{ent}$ primero, y después $\mathbf{Z}_{ent}$.

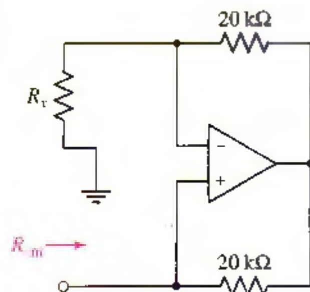


■ **FIGURA 17.37**

7. Encontrar la impedancia de salida de la red de la figura 17.38, como una función de s.



■ **FIGURA 17.38**



■ **FIGURA 17.39**

8. Si el amp op que se ilustra en la figura 17.39 se considera ideal ($R_i = \infty$, $R_o = 0$, y $A = \infty$), determinar R_{ent}.

9. (*a*) Si se supone que los amp op del circuito de la figura 17.40 son ideales ($R_i = \infty$, $R_o = 0$ y $A = \infty$), encuentre $\mathbf{Z}_{ent}$. (*b*) $R_1 = 4\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 10\ \text{k}\Omega$,

$R_3 = 10\ \text{k}\Omega$, $R_4 = 1\ \text{k}\Omega$, y $C = 200$ pF, demostrar que $\mathbf{Z}_{ent} = j\omega L_{ent}$, donde $L_{ent} = 0.8$ mH.

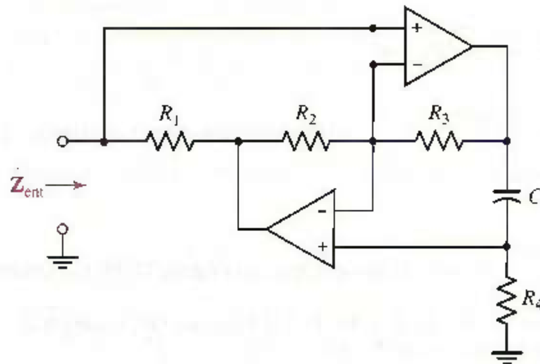


FIGURA 17.40

17.2 Parámetros de admitancia

10. En la red lineal de la figura 17.8, encontrar

(*a*) $\mathbf{I}_2$ si $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.3 \\ 0.3 & -0.02 \end{bmatrix}$ (S) y $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3.5 \end{bmatrix}$ (V);

(*b*) $\mathbf{V}_1$ si $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.15 \\ 0.15 & 0.8 \end{bmatrix}$ (S) e $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.02 \end{bmatrix}$ (A).

11. Determinar $\mathbf{y}_{11}$ y $\mathbf{y}_{12}$ del dos-puertos de la figura 17.41.

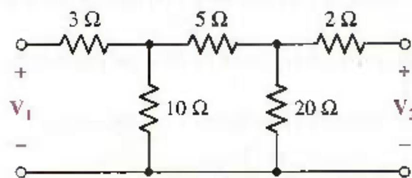


FIGURA 17.41

12. Si el dos-puertos que se presenta en la figura 17.42 tiene los valores de los parámetros $\mathbf{y}_{11} = 10$, $\mathbf{y}_{12} = -5$, $\mathbf{y}_{21} = 50$ y $\mathbf{y}_{22} = 20$, todos en mS, determinar $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ cuando $\mathbf{V}_s = 100$ V, $R_s = 25\ \Omega$, y $R_L = 100\ \Omega$.

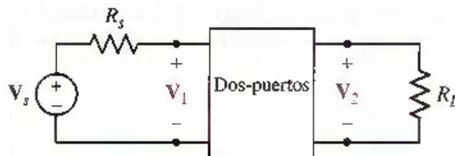


FIGURA 17.42

13. Calcular los parámetros $\mathbf{y}$ de la red de la figura 17.43.

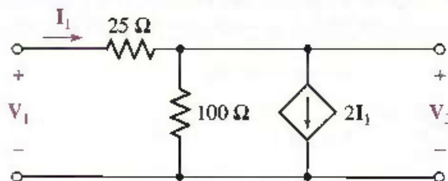


FIGURA 17.43

14. Determinar y del dos-puertos de la figura 17.44.

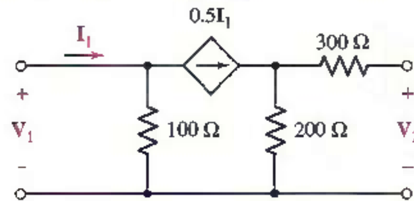


FIGURA 17.44

15. Sea $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.0025 \\ -8 & 0.05 \end{bmatrix}$ (S) para el dos-puertos de la figura 17.45. (*a*) Obtener los valores de los cocientes $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$, $\mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1$ y $\mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1$. (*b*) Eliminar la resistencia de 5 Ω igualar a cero la fuente de 1 V y calcular $\mathbf{V}_2/\mathbf{I}_2$.

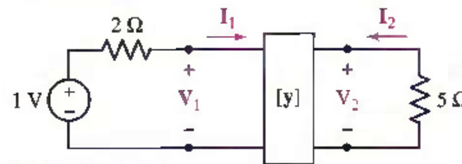


FIGURA 17.45



	$\mathbf{V}_{s1}$ (V)	$\mathbf{V}_{s2}$ (V)	$\mathbf{I}_1$ (A)	$\mathbf{I}_2$ (A)
Exp't #1	100	50	5	−32.5
Exp't #2	50	100	−20	−5
Exp't #3	20	0		
Expít #4			5	0
Exp't #5			5	15

FIGURA 17.46

16. Los parámetros de admitancia de un cierto dos-puertos son $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -20 & 2 \end{bmatrix}$ (mS). Proporcionar el nuevo valor de y si se conecta a una resistencia de 100 Ω: (*a*) en serie con uno de los hilos de conexión de entrada; (*b*) en serie con uno de los hilos de conexión de salida.

17. Completar la tabla que se presenta como parte de la figura 17.46 y proporcionar también los valores de los parámetros y.

18. En el caso de la red lineal general que se muestra en la figura 17.8, encontrar:

(*a*) $\mathbf{I}_2$ si $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 10^{-3} & j0.01 \\ j0.01 & -j0.005 \end{bmatrix}$ (S) y $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 12\angle 43^\circ \\ 2\angle 0^\circ \end{bmatrix}$ (V);

(*b*) $\mathbf{V}_2$ si $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -j5 & 10 \\ 4 & j10 \end{bmatrix}$ (S) e $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 120\angle 30^\circ \\ 88\angle 45^\circ \end{bmatrix}$ (A).

19. A menudo, el transistor semiconductor de metal-óxido de efecto de campo (MOSFET), un elemento no lineal de tres terminales que se utiliza en muchas aplicaciones de la electrónica, se especifica en términos de sus parámetros y. Los parámetros en ca dependen en gran medida de las condiciones de medición y comúnmente se llaman y_{is}, y_{rs}, y_{fs} y y_{os}, como en:

$$I_g = y_{is}V_{gs} + y_{rs}V_{ds} \qquad [49]$$

$$I_d = y_{fs}V_{gs} + y_{os}V_{ds} \qquad [50]$$

Donde I_g es la corriente de compuerta del transistor, I_d es la corriente de drenado del transistor y la tercera terminal (la fuente) es común a la entrada y a la salida durante la medición. Por lo tanto, V_{gs} es la tensión entre la compuerta y la fuente y V_{ds} es la tensión entre el drenado y la fuente. El modelo típico a alta frecuencia que se utiliza para aproximar el comportamiento de un MOSFET se muestra en la figura 17.47.

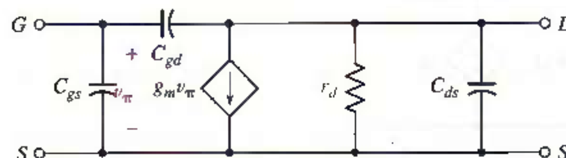
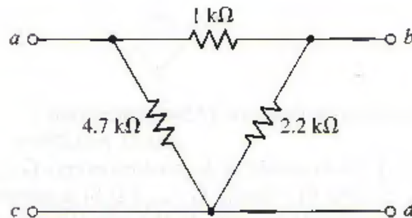


FIGURA 17.47

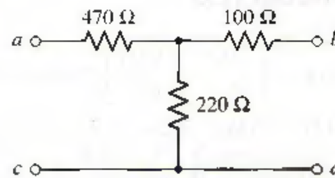
(a) En el caso de la configuración que se acaba de especificar, ¿qué terminal del transistor se utilizó como la entrada, y qué terminal se utilizó como salida? (b) Deducir las expresiones de los parámetros y_{is}, y_{rs}, y_{fs}, y y_{os} definidos en las ecuaciones [49] y [50], en términos de los parámetros del modelo C_{gs}, C_{gd}, g_m, r_d y C_{ds} de la figura 17.47. (c) Calcular y_{is}, y_{rs}, y_{fs}, y y_{os} si $g_m = 4.7$ mS, $C_{gs} = 3.4$ pF, $C_{gd} = 1.4$ pF, $C_{ds} = 0.4$ pF, y $r_d = 10$ kΩ.

17.3 Algunas redes equivalentes

20. Convertir la red Δ de la figura 17.48 a una red conectada en Y.

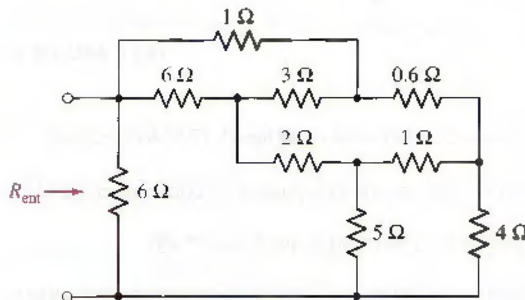


■ FIGURA 17.48

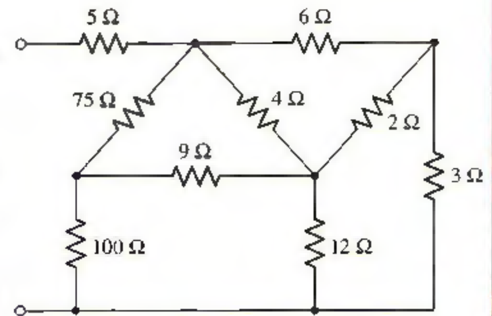


■ FIGURA 17.49

21. Convertir la red Y de la figura 17.49 a una red conectada en Δ.
22. Determinar R_{ent} del puerto que se ilustra en la figura 17.50 utilizando transformaciones Y-Δ y Δ-Y, según sea apropiado.

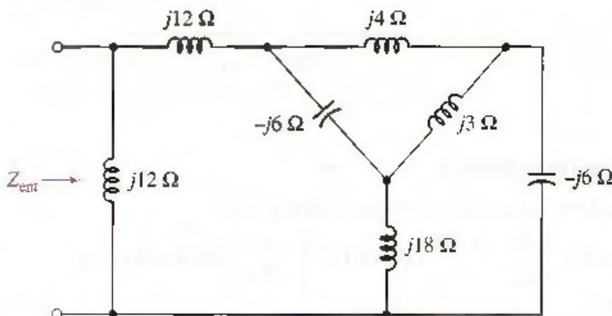


■ FIGURA 17.50



■ FIGURA 17.51

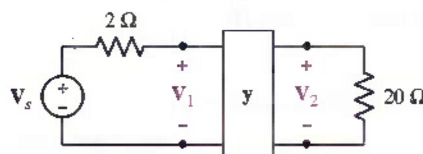
23. Aplicar las transformaciones Y-Δ y Δ-Y para determinar la resistencia de entrada del puerto que se muestra en la figura 17.51.
24. Determinar $\mathbf{Z}_{ent}$ en la red de la figura 17.52.



■ FIGURA 17.52

25. Sea $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.002 \\ -5 & 0.04 \end{bmatrix}$ (S) del dos-puertos de la figura 17.53; determinar

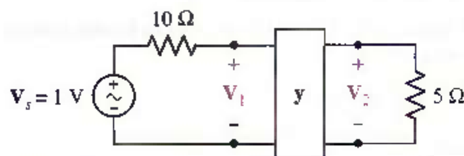
(*a*) $\mathbf{G}_V$; (*b*) $\mathbf{G}_I$; (*c*) G_P; (*d*) $\mathbf{Z}_{ent}$; (*e*) $\mathbf{Z}_{sal}$.



■ **FIGURA 17.53**

26. Sea $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$ (S) del dos-puertos de la figura 17.54. Determinar

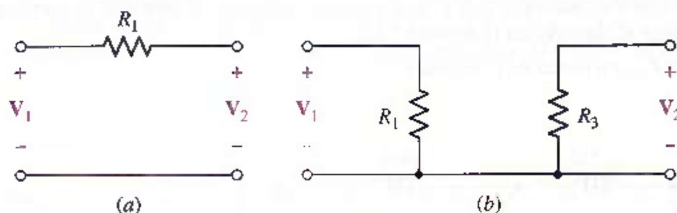
(*a*) $\mathbf{G}_V$; (*b*) $\mathbf{G}_I$; (*c*) G_P; (*d*) $\mathbf{Z}_{ent}$; (*e*) $\mathbf{Z}_{sal}$. (*f*) Si la ganancia de tensión inversa $\mathbf{G}_{V,rev}$ se define como $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2$ con $\mathbf{V}_s = 0$ y se elimina R_L calcular $\mathbf{G}_{V,rev}$. (*g*) Si la ganancia de potencia de inserción G_{ins} se define como el cociente de $P_{5\Omega}$ con el dos-puertos en su sitio y $P_{5\Omega}$ con el dos-puentes sustituidos por puentes que conectan cada terminal de entrada con la terminal de salida correspondiente, calcular G_{ins}.



■ **FIGURA 17.54**

27. (*a*) Dibujar un circuito equivalente en la forma de la figura 17.13*b* en el cual $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (mS). (*b*) Si dos del mismo dos-puertos se conectan en paralelo, dibujar el nuevo circuito equivalente y demostrar que $\mathbf{y}_{nuevo} = 2\mathbf{y}$.

28. (*a*) Determinar $\mathbf{y}_a$ del dos-puertos de la figura 17.55*a*. (*b*) Calcular $\mathbf{y}_b$ de la figura 17.55*b*. (*c*) Dibujar la red que se obtiene cuando dos del mismo dos-puertos se conectan en paralelo; además, demostrar que $\mathbf{y}$ de esta red es igual a $\mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b$.



■ **FIGURA 17.55**

17.4 Parámetros de impedancia

29. En el caso de la red lineal que se muestra en la figura 17.8, (*a*) encontrar $\mathbf{V}_1$ si $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 4.7 & 2.2 \\ 2.2 & 3.3 \end{bmatrix}$ (kΩ) y $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -2.5 \end{bmatrix}$ (mA); (*b*) $\mathbf{I}_2$ si $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -10 & 15 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}$ (kΩ) y $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (V).

30. Considerar la red lineal general de la figura 17.8. Calcular
(*a*) $\mathbf{V}_2$ si $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 5 & j \\ j & -j2 \end{bmatrix}$ (Ω) y $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2\underline{/20^\circ} \\ 2\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$ (A);
(*b*) $\mathbf{I}_1$ si $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -j & 2 \\ 4 & j4 \end{bmatrix}$ (Ω) y $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 137\underline{/30^\circ} \\ 105\underline{/45^\circ} \end{bmatrix}$ (V).

31. Calcular **z** del dos-puertos de la figura 17.56.

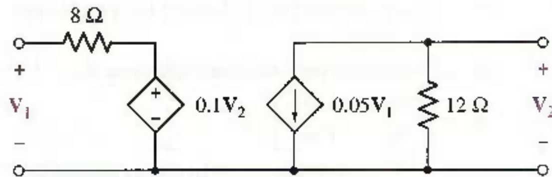


FIGURA 17.56

32. (*a*) Determinar **z** del dos-puertos de la figura 17.57. (*b*) Si $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 = 1$ A, encontrar la ganancia de tensión $\mathbf{G}_V$.

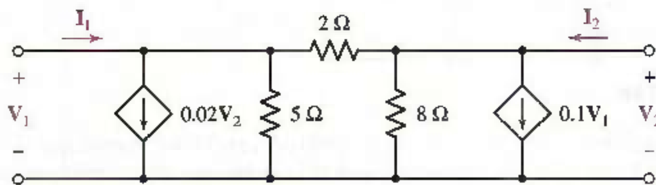


FIGURA 17.57

33. Un cierto dos-puertos se describe mediante $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ (Ω). La entrada consiste en una fuente $\mathbf{V}_s$ en serie con 5 Ω, en tanto que la salida es $R_L = 2$ Ω. Calcular (*a*) $\mathbf{G}_I$; (*b*) $\mathbf{G}_V$; (*c*) G_P; (*d*) $\mathbf{Z}_{ent}$; (*e*) $\mathbf{Z}_{sal}$.

34. Sea $[\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} 1\,000 & 100 \\ -2\,000 & 400 \end{bmatrix}$ (Ω) par el dos-puertos de la figura 17.58. Obtener la potencia promedio (activa) entregada: (*a*) a la resistencia de 200 Ω; (*b*) a la resistencia de 500 Ω; (*c*) al dos-puertos.

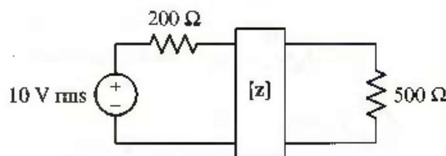


FIGURA 17.58

35. Determinar los cuatro parámetros **z** a $\omega = 10^8$ rad/s para el circuito equivalente del transistor de alta frecuencia de la figura 17.59.

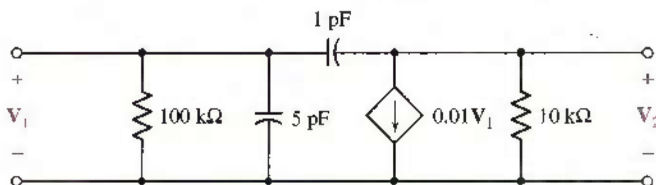


FIGURA 17.59

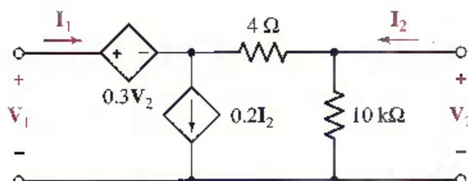
36. Un dos-puertos para el cual $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 40 & 10 \end{bmatrix}$ (Ω) se activa mediante una fuente $\mathbf{V}_s = 100\underline{/0^\circ}$ V en serie con 5 Ω, y termina en una resistencia de 25 Ω. Obtener el circuito equivalente de Thévenin visto desde la resistencia de 25 Ω.

17.5 Parámetros híbridos

37. Los parámetros **h** de un cierto dos-puertos son $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 9\ \Omega & -2 \\ 20 & 0.2\ \text{S} \end{bmatrix}$. Calcular el nuevo **h** que resulta si se conecta una resistencia de 1 Ω en serie con: (*a*) la entrada; (*b*) la salida.

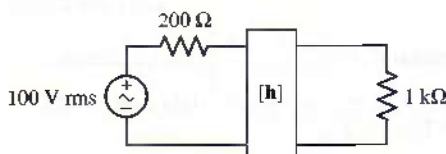
38. Determinar $\mathbf{Z}_{ent}$ y Z_{sal} del dos-puertos accionado por una fuente que tiene $R_s = 100\ \Omega$ y termina con $R_L = 500\ \Omega$, si $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 100\ \Omega & 0.01 \\ 20 & 1\ \text{mS} \end{bmatrix}$.

39. Observar el dos-puertos de la figura 17.60 y determinar (*a*) $\mathbf{h}_{12}$; (*b*) $\mathbf{z}_{12}$; (*c*) $\mathbf{y}_{12}$.



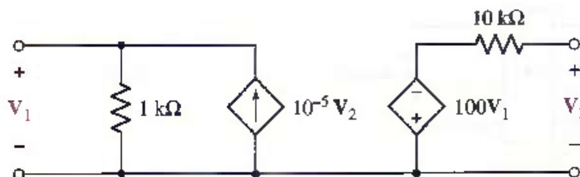
■ **FIGURA 17.60**

40. Sea $\mathbf{h}_{11} = 1\ \text{k}\Omega$, $\mathbf{h}_{12} = -1$, $\mathbf{h}_{21} = 4$, y $\mathbf{h}_{22} = 500\ \mu\text{S}$ para el dos-puertos que se presenta en la figura 17.61. Determinar la potencia promedio (activa) entregada a (*a*) $R_s = 200\ \Omega$; (*b*) $R_L = 1\ \text{k}\Omega$; (*c*) al dos-puertos completo.



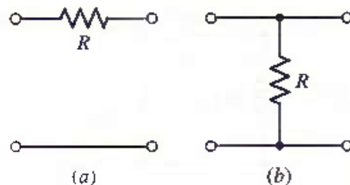
■ **FIGURA 17.61**

41. (*a*) Determinar **h** para el dos-puertos de la figura 17.62. (*b*) Calcular $\mathbf{Z}_{sal}$ si la entrada contiene $\mathbf{V}_s$ en serie con $R_s = 200$.



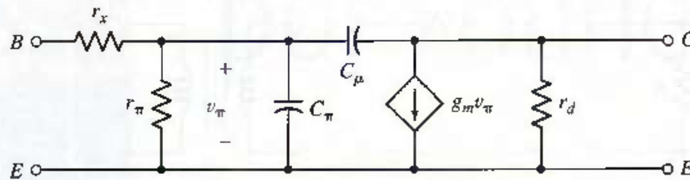
■ **FIGURA 17.62**

42. Determinar **y**, **z** y **h** para ambos dos-puertos de la figura 17.63. Si algún parámetro resulta infinito, páselo por alto (no tomarlo en cuenta).



■ **FIGURA 17.63**

43. La figura 17.64 muestra un modelo de transistor bipolar de unión (bjt) de alta frecuencia utilizado comúnmente, el cual funciona para magnitudes pequeñas de señal en ca. Si la terminal emisor (marcada con una *E*) es común a la entrada y a la salida y la terminal base (marcada con una *B*) se utiliza como entrada, deducir una expresión en términos de r_x, r_π, C_π, C_μ, g_m y r_d para (*a*) h_{oe}; (*b*) h_{fe}; (*c*) h_{ie}; y (*d*) h_{re}.



■ **FIGURA 17.64**

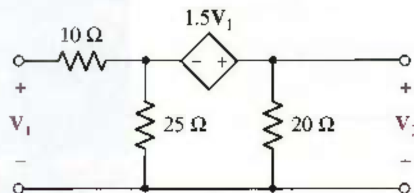
17.6 Parámetros de transmisión

44. Dados $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, y

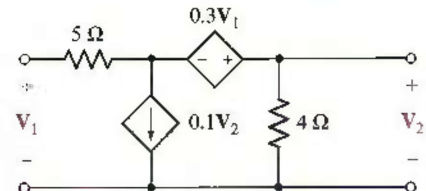
$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, calcular: (*a*) $\mathbf{y} \cdot \mathbf{b}$; (*b*) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$; (*c*) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$; (*d*) $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$;

(*e*) $\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$.

45. (*a*) Determinar **t** del dos-puertos que se muestra en la figura 17.65. (*b*) Calcular $\mathbf{Z}_{sal}$ para el dos-puertos, si $R_s = 15\ \Omega$ de la fuente es de 15 Ω.



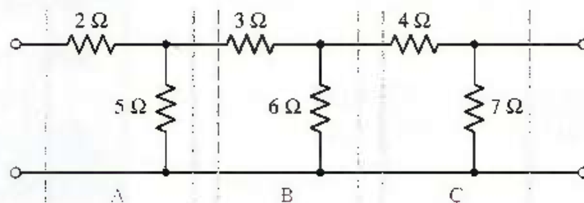
■ **FIGURA 17.65**



■ **FIGURA 17.66**

46. Obtener **t** del dos-puertos de la figura 17.66.

47. (*a*) Calcular $\mathbf{t}_A$, $\mathbf{t}_B$ y $\mathbf{t}_C$ para la cascada formada por dos de dos-puertos mostrada en la figura 17.67. (*b*) Determinar **t** del dos-puertos de seis resistencias.



■ **FIGURA 17.67**

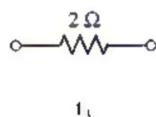


FIGURA 17.68

48. (*a*) Calcular $\mathbf{t}_A$ para la sola resistencia de 2 Ω de la figura 17.68. (*b*) Demostrar que **t** para una sola resistencia de 10 Ω se puede obtener mediante $(\mathbf{t}_A)^5$.

49. (*a*) Determinar $\mathbf{t}_a$, $\mathbf{t}_b$ y $\mathbf{t}_c$ de las redes que se muestran en la figura 17.69*a*, *b* y *c*. (*b*) Mediante las reglas de la interconexión del dos-puertos con otro en cascada, calcular **t** de la red de la figura 17.69*d*.

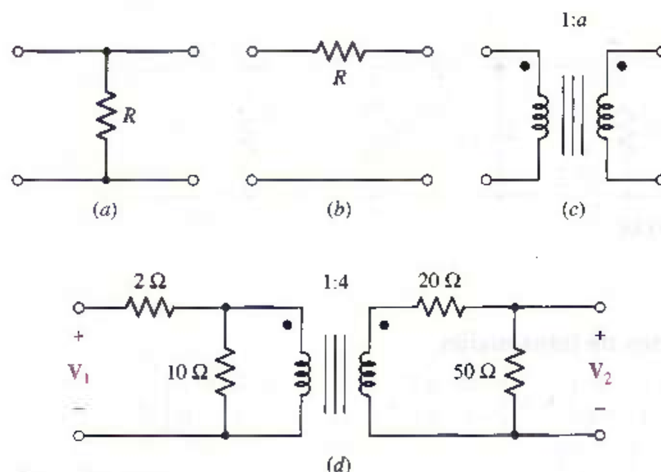


FIGURA 17.69

50. (*a*) Determinar **t** del dos-puertos de la figura 17.70. (*b*) Utilizar las técnicas del dos-puertos conectado en cascada con otro para calcular $\mathbf{t}_{\text{nuevo}}$ al conectarse a través de su salida una resistencia de 20 Ω.

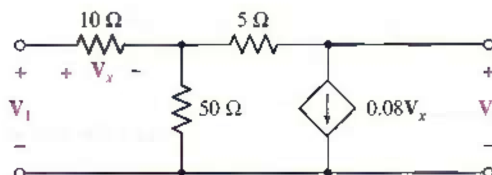


FIGURA 17.70

CAPÍTULO 18

Análisis de circuitos por Fourier

CONCEPTOS CLAVE

- Representación de funciones periódicas como suma de senos y cosenos.
- Frecuencias armónicas.
- Simetría par e impar.
- Simetría de media onda.
- Forma compleja de la serie de Fourier.
- Espectro de línea discreto.
- Transformada de Fourier.
- Uso de las técnicas de la serie y la transformada de Fourier en el análisis de circuitos.
- Respuesta de un sistema y convolución en el dominio de la frecuencia.

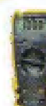
INTRODUCCIÓN

En este capítulo se continúa con la introducción al análisis de circuitos con el estudio de las funciones periódicas tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. De manera específica, se consideran funciones forzadas *periódicas* con naturalezas funcionales que satisfacen ciertas restricciones matemáticas, características de cualquier función que se pueda generar en el laboratorio. Estas funciones pueden representarse como la suma de un número infinito de funciones seno y coseno, que se relacionan de manera armónica. Por lo tanto, debido a que la respuesta forzada de cada componente senoidal se determina con facilidad mediante el análisis senoidal de estado permanente, la respuesta de la red lineal a la función forzada periódica general se obtiene mediante la superposición de las respuestas parciales.

El tema de la serie de Fourier es de vital importancia para varios campos, en particular para el de las comunicaciones. Sin embargo, el uso de las técnicas basadas en el análisis de Fourier para auxiliar el análisis de circuitos poco a poco ha caído en desuso en los últimos años. Ahora que es necesario enfrentar una fracción cada vez más grande de uso de energía global que proviene de equipos que emplean suministros de potencia modulados por pulsos (por ejemplo, computadoras), el tema de los armónicos en los sistemas de potencia y la electrónica de potencia se está convirtiendo con mucha rapidez en un problema serio, incluso en plantas de generación de gran escala. Sólo con el análisis basado en las series de Fourier se comprenden los problemas implícitos y las soluciones posibles.

18.1 FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LA SERIE DE FOURIER

Se sabe que la respuesta completa de un circuito lineal a una función forzada arbitraria está compuesta por la suma de una *respuesta forzada* y una *respuesta natural*. La respuesta natural se analizó tanto en el



dominio del tiempo (capítulos 7, 8 y 9) como en el dominio de la frecuencia (capítulos 14 y 15). La respuesta forzada se ha considerado también desde diferentes perspectivas, entre las que se incluyen las técnicas basadas en fasores del capítulo 10. Como se ha visto, en algunos casos son necesarios *ambos* componentes de la respuesta total de un circuito en particular, mientras que en otros solamente se requería la respuesta natural o la forzada. En esta sección se vuelve a enfocar la atención en las funciones forzadas *senoidales* por naturaleza y se descubre cómo escribir una función periódica general como la *suma* de dichas funciones, lo que lleva a un análisis de un nuevo conjunto de procedimientos para el análisis de circuitos.

Armónicas

Quizás se obtenga cierta percepción de la validez de representar una función *periódica* general mediante una suma infinita de funciones seno y coseno al considerar un ejemplo simple. Suponer primero una función coseno de frecuencia en radianes ω_0,

$$v_1(t) = 2\cos\omega_0 t$$

donde

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

y el periodo T es

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Si bien T suele no llevar un subíndice cero, es el periodo de la frecuencia fundamental. Las ***armónicas*** de esta senoide tienen frecuencias angulares $n\omega_0$, donde ω_0 es la frecuencia angular fundamental y $n = 1, 2, 3, \ldots$. La frecuencia angular del primer armónico es la ***frecuencia*** angular ***fundamental***.

A continuación se selecciona una tercera armónica de tensión

$$v_{3a}(t) = \cos 3\omega_0 t$$

La fundamental $v_1(t)$, la tercera armónica $v_{3a}(t)$ y la suma de ambas se muestran como funciones del tiempo en la figura 18.1*a*. Debe observarse que la suma es periódica, con periodo $T = 2\pi/\omega_0$.

La forma de la función periódica resultante cambia a medida que varía la fase y la amplitud de la componente de la tercera armónica. De tal manera, la figura 18.1*b* muestra el efecto de combinar $v_1(t)$ y una tercera armónica de amplitud un poco mayor:

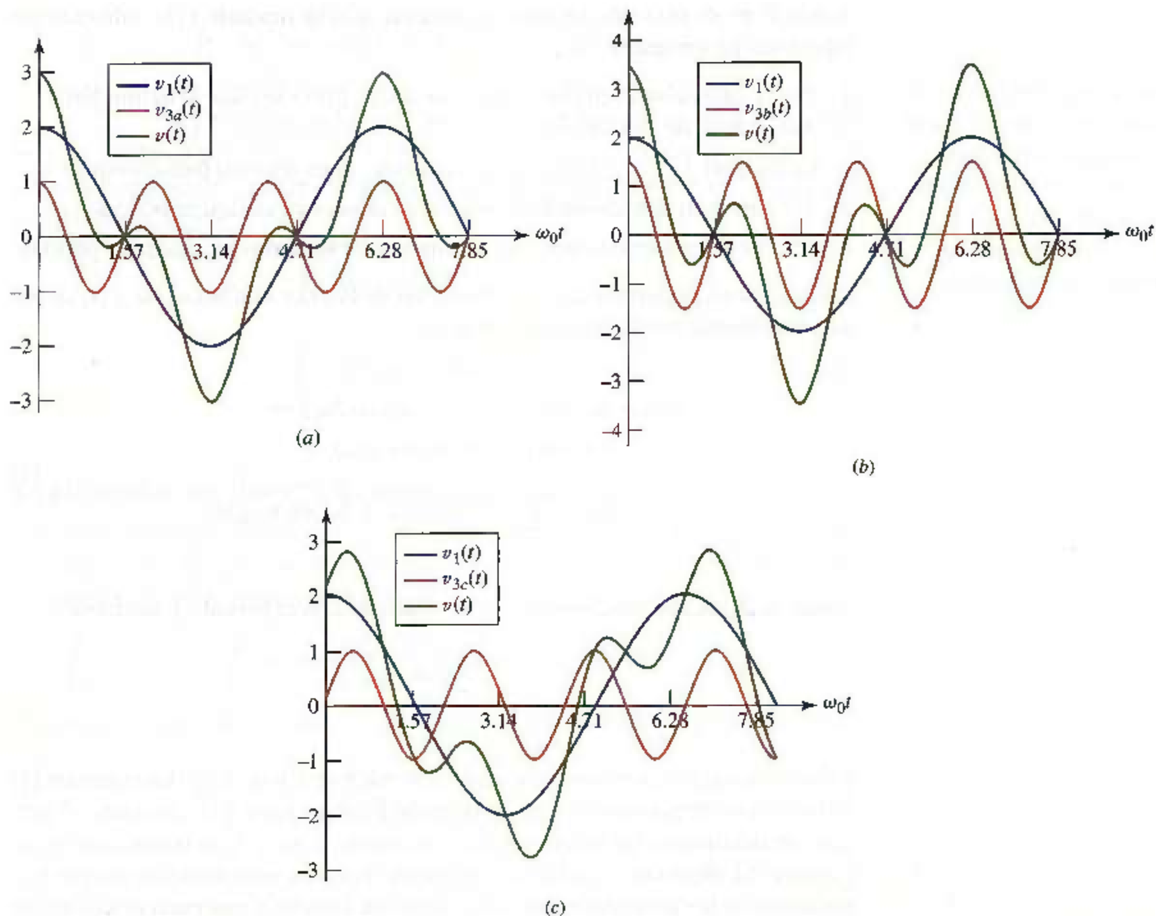
$$v_{3b}(t) = 1.5\cos 3\omega_0 t$$

Al desplazar la fase de la tercera armónica de 90 grados se obtiene

$$v_{3c}(t) = \text{sen}\ 3\omega_0 t$$

La suma, que se muestra en la figura 18.1*c*, adquiere un carácter incluso diferente. En todos los casos, el periodo de la forma de onda resultante es el mismo que el de la forma de onda fundamental. La naturaleza de la forma de onda depende de la amplitud y de la fase de toda componente armónica posible, por lo que se pueden generar formas de onda que tienen características en extremo no senoidales, mediante una combinación apropiada de funciones senoidales.

Después que el lector se familiarice con el uso de la suma de un número infinito de funciones seno y coseno para representar una forma de onda periódica, se considera la representación en el dominio de la frecuencia de una forma de onda no periódica general, de una manera similar a la transformada de Laplace.



■ **FIGURA 18.1** Varias formas de onda diferentes que se pueden obtener (de un número infinito) mediante la combinación de una fundamental y una tercera armónica. La fundamental es $v_1 = 2\cos\omega_0 t$, y la tercera armónica corresponde a: (*a*) $v_{3a} = \cos 3\omega_0 t$; (*b*) $v_{3b} = 1.5\cos 3\omega_0 t$; (*c*) $v_{3c} = \text{sen}\, 3\omega_0 t$.

PRÁCTICA

18.1 Suponer que se agrega una tercera armónica de tensión a la fundamental para producir $v = 2\cos\omega_0 t + V_{m3}$ sen $\omega_0 t$, la forma de onda de la figura 18.1*c* para $V_{m3} = 1$. (*a*) Determinar el valor de V_{m3} de manera que $v(t)$ tenga una pendiente cero en $\omega_0 t = 2\pi/3$. (*b*) Evaluar $v(t)$ en $\omega_0 t = 2\pi/3$.

Respuestas: 0.577; −1.000.

La serie de Fourier

Considerar primero una función *periódica* $f(t)$, definida en la sección 11.2 por la relación funcional siguiente:

$$f(t) = f(t + T)$$

Se tomará $f(t)$ para representar una forma de onda de tensión o corriente; además, cualquier forma de onda de tensión o corriente que se pueda en realidad producir debe satisfacer estas condiciones. Ciertas funciones matemáticas que se podrían suponer quizás no satisfagan tales condiciones, aunque se supondrá que las cuatro condiciones siempre se satisfacen.

donde T es el periodo. Se supone además que la función $f(t)$ satisface las siguientes propiedades:

1. $f(t)$ es univaluada en todos lados; es decir, $f(t)$ satisface la definición matemática de una función.
2. La integral $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\,dt$ existe (es decir, no es infinita) para cualquier t_0.
3. $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en cualquier periodo.
4. $f(t)$ tiene un número finito de máximos y de mínimos en cualquier periodo.

Dada tal función periódica $f(t)$, el teorema de Fourier establece que $f(t)$ se podría representar mediante la serie infinita:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \cdots \\ &\quad + b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega_0 t + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\,\omega_0 t) \end{aligned} \quad [1]$$

donde la pulsación fundamental ω_0 se relaciona con el periodo T mediante

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

y donde a_0, a_n y b_n son constantes que dependen de n y de $f(t)$. La ecuación [1] es una forma trigonométrica de la ***serie de Fourier*** *para* $f(t)$, en tanto el proceso de determinar los valores de las constantes a_0, a_n y b_n se llama *análisis de Fourier*. El objetivo no es la prueba de este teorema, sino sólo una simple formulación de los procedimientos del análisis de Fourier y una percepción de que el teorema es correcto (convincente).

Algunas integrales trigonométricas útiles

Antes de explicar la evaluación de las constantes que aparecen en la serie de Fourier, se recopilará un conjunto de integrales trigonométricas útiles. Sean n como k representativos de cualquier elemento del conjunto de enteros 1, 2, 3, . . . En las siguientes integrales, 0 y T se usan como límites de integración, aunque se entiende que cualquier intervalo de un periodo es igual de correcto. Dado que el valor promedio de una senoide sobre un periodo es cero,

$$\int_0^T \operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt = 0 \quad [2]$$

y

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t\,dt = 0 \quad [3]$$

También resulta sencillo demostrar que las siguientes tres integrales definidas son cero:

$$\int_0^T \operatorname{sen} k\omega_0 t \cos n\omega_0 t\,dt = 0 \quad [4]$$

$$\int_0^T \text{sen } k\omega_0 t \text{ sen } n\omega_0 t \, dt = 0 \qquad (k \neq n) \qquad [5]$$

$$\int_0^T \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt = 0 \qquad (k \neq n) \qquad [6]$$

Los casos que se exceptúan en las ecuaciones [5] y [6] también se evalúan con facilidad; se obtiene

$$\int_0^T \text{sen}^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} \qquad [7]$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} \qquad [8]$$

Evaluación de los coeficientes de Fourier

La evaluación de las constantes desconocidas en la serie de Fourier tal vez ahora se consiga sin dificultades. Primero se busca a_0. Si se integra cada lado de la ecuación [1] a lo largo de un periodo completo, se obtiene

$$\int_0^T f(t)\, dt = \int_0^T a_0 \, dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{ sen } n\omega_0 t)\, dt$$

Pero todo término de la sumatoria es de la forma de la ecuación [2] o [3], por lo cual

$$\int_0^T f(t)\, dt = a_0 T$$

o

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt \qquad [9]$$

Esta constante a_0 es sencillamente el valor promedio de $f(t)$ sobre un periodo, y por tanto se describe como una componente en cd de $f(t)$.

Para evaluar uno de los coeficientes coseno —tal como a_k, el coeficiente de $\cos k\omega_0 t$— se multiplica primero cada lado de la ecuación [1] por $\cos k\omega_0 t$ y luego se integran ambos lados de la ecuación sobre un periodo completo:

$$\int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t \, dt = \int_0^T a_0 \cos k\omega_0 t \, dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos k\omega_0 t \text{ sen } n\omega_0 t \, dt$$

En las ecuaciones [3], [4] y [6] se observa que todo término del lado derecho de ellas es cero, salvo el término individual a_n, donde $k = n$. Se evalúa el término utilizando la ecuación [8] y al hacerlo de ese modo se encuentra a_k o a_n:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \qquad [10]$$

El resultado es el *doble* del valor promedio del producto $f(t)\cos n\omega_0 t$ sobre un periodo.

De manera similar, se obtiene b_k si se multiplica por sen $k\omega_0 t$, se integra sobre un periodo, pero se observa que todos, menos uno de los términos del lado derecho, son cero y se efectúa esa simple integración mediante la ecuación [7]. El resultado es

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt \qquad [11]$$

que es el *doble* del valor promedio de $f(t)$ sen $n\omega_0 t$, sobre un periodo.

Las ecuaciones de la [9] a la [11] permiten ahora determinar los valores de a_0 y de todas las a_n y b_n de la serie de Fourier, en la ecuación [1]:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n\, \text{sen}\, n\omega_0 t) \qquad [1]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \qquad [9]$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \qquad [10]$$

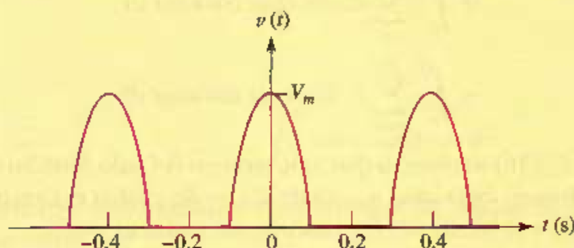
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt \qquad [11]$$

EJEMPLO 18.1

La forma de onda "semisenoidal" que se muestra en la figura 18.2 representa la respuesta en tensión que se obtiene a la salida del circuito rectificador de media onda, un circuito no lineal cuyo propósito es convertir una tensión de entrada senoidal en una tensión de salida de cd (pulsante). Determinar la representación mediante una serie de Fourier de esta forma de onda.

Identificar el objetivo del problema.

Se presenta una función periódica semejante, de manera parcial, a una forma de onda senoidal y se pide determinar la representación mediante una serie de Fourier. A no ser por la eliminación de todas las tensiones negativas, el problema sería trivial, pues sólo se requeriría una senoide.



■ **FIGURA 18.2** Salida de un rectificador de media onda en el que se aplica una entrada senoidal.

Recopilar toda la información conocida.

Para representar esta tensión como una serie de Fourier, se debe determinar primero el periodo y luego expresar la tensión gráfica como una función analítica del tiempo. De acuerdo con la gráfica, se observa que el periodo es

$$T = 0.4 \text{ s}$$

así que

$$f_0 = 2.5 \text{ Hz}$$

y

$$\omega_0 = 5\pi \text{ rad/s}$$

Elaborar un plan.

La forma más directa es aplicar las ecuaciones 9 a 11 para calcular el conjunto de coeficientes a_0, a_n y b_n. Para llevar a cabo lo anterior, es necesario contar con una expresión funcional de $v(t)$, siendo la más directa la definida sobre el intervalo $t = 0$ a $t = 0.4$ como:

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & 0 \le t \le 0.1 \\ 0 & 0.1 \le t \le 0.3 \\ V_m \cos 5\pi t & 0.3 \le t \le 0.4 \end{cases}$$

Sin embargo, al elegir que el periodo se extienda desde $t = -0.1$ hasta $t = 0.3$ se obtendría un menor número de ecuaciones, y en consecuencia menos integrales:

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & -0.1 \le t \le 0.1 \\ 0 & 0.1 \le t \le 0.3 \end{cases} \qquad [12]$$

Esta forma es preferible, aunque cualquier descripción daría el resultado correcto.

Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.

La componente de frecuencia cero se obtiene con facilidad:

$$a_0 = \frac{1}{0.4}\int_{-0.1}^{0.3} v(t)\,dt = \frac{1}{0.4}\left[\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t\,dt + \int_{0.1}^{0.3} (0)\,dt\right]$$

Observar que la integración sobre un periodo completo debe descomponerse en subintervalos del periodo, para cada uno de los cuales se conoce la forma funcional de $v(t)$.

La amplitud de un término coseno *general* es:

$$a_n = \frac{2}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \cos 5\pi nt\,dt$$

y la amplitud de un término senoidal general es

$$\frac{2}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \text{ sen } 5\pi nt\,dt$$

el cual, de hecho, es siempre igual a cero, por lo cual no se tomará en cuenta de aquí en adelante.

Determinar si se requiere información adicional.

La forma de la función que se obtuvo luego de integrar difiere cuando n es la unidad, en comparación con el caso en el que se elige cualquier otro valor de n. Si $n = 1$, se tiene

$$a_1 = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos^2 5\pi t\,dt = \frac{V_m}{2} \qquad [13]$$

(Continúa en la siguiente página)

mientras que si n no es igual a la unidad, se encuentra que

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos 5\pi t \cos 5\pi n t \, dt$$

Buscar la solución.

Al resolver, se tiene que

$$a_0 = \frac{V_m}{\pi} \quad [14]$$

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \frac{1}{2}[\cos 5\pi(1+n)t + \cos 5\pi(1-n)t]\, dt$$

o

$$a_n = \frac{2V_m}{\pi} \frac{\cos(\pi n/2)}{1-n^2} \qquad (n \neq 1) \quad [15]$$

Debe destacarse, de manera incidental, que la expresión de a_n cuando $n \neq 1$ proporcionará el resultado concreto de $n = 1$ en el límite, a medida que $n \to 1$.

(Una integración similar muestra que $b_n = 0$ para cualquier valor de n y que así la serie de Fourier no contiene términos seno.) Por lo tanto, la serie de Fourier se obtiene de las ecuaciones [1], [13], [14] y [15]:

$$v(t) = \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2}\cos 5\pi t + \frac{2V_m}{3\pi}\cos 10\pi t - \frac{2V_m}{15\pi}\cos 20\pi t + \frac{2V_m}{35\pi}\cos 30\pi t - \cdots \quad [16]$$

Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?

La solución se comprueba insertando valores en la ecuación [16] y truncando después un número específico de términos. Sin embargo, otro método consiste en graficar la función, como se indica en la figura 18.3

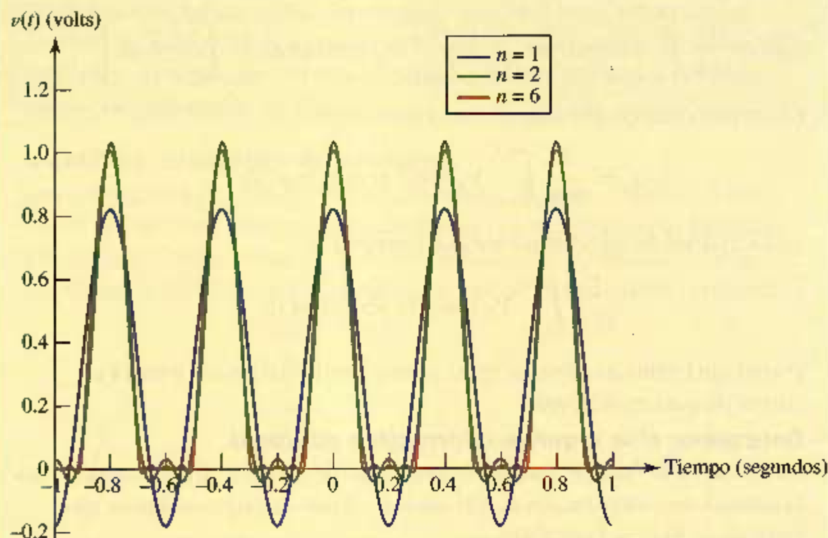


FIGURA 18.3 Ecuación [16] truncada después del término $n = 1$, $n = 2$ y $n = 6$ que muestra la convergencia hacia la media senoide $v(t)$. Se ha elegido por conveniencia una magnitud de $V_m = 1$.

para $n = 1$, 2 y 6. Como puede verse, a medida que se incluyan más términos, la gráfica se asemejará más a la de la figura 18.2.

PRÁCTICA

18.2 Una función periódica $f(t)$ se describe como sigue: $f(t) = -4$, para $0 < t < 0.3$; $f(t) = 6$, para $0.3 < t < 0.4$; $f(t) = 0$, para $0.4 < t < 0.5$; $T = 0.5$. Evaluar: (*a*) a_0; (*b*) a_3; (*c*) b_1.

18.3 Escribir la serie de Fourier para las tres formas de onda de tensión de la figura 18.4.

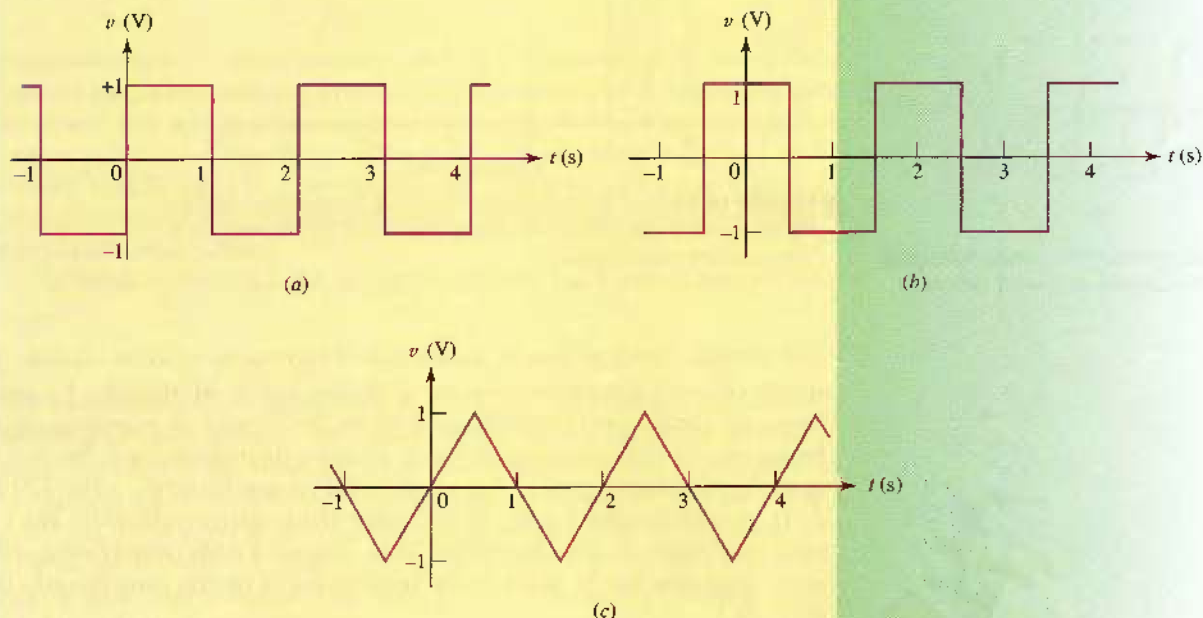


FIGURA 18.4

Respuestas: 18.2: −1.200; 1.383; −4.44. 18.3: $(4/\pi)(\text{sen}\,\pi t + \frac{1}{3}\text{sen}\,3\pi t + \frac{1}{5}\text{sen}\,5\pi t + \cdots)$ V; $(4/\pi)(\cos\pi t - \frac{1}{3}\cos 3\pi t + \frac{1}{5}\cos 5\pi t - \cdots)$V; $(8/\pi^2)(\text{sen}\,\pi t - \frac{1}{9}\text{sen}\,3\pi t + \frac{1}{25}\text{sen}\,5\pi t - \cdots)$.

Espectros de línea y de fase

En la figura 18.2, la función $v(t)$ del ejemplo 18.1 se muestra en forma gráfica y, en la ecuación [12],) se expresa como una función analítica (ambas representaciones están en el dominio del tiempo). La representación en serie de Fourier de $v(t)$ en la ecuación [16] también es una expresión en el dominio del tiempo, aunque se podría transformar con facilidad en una representación en el *dominio de la frecuencia.* Por ejemplo, la figura 18.5 muestra la amplitud de cada componente de frecuencia de $v(t)$, un tipo de gráfica llamada ***espectro de línea***. Aquí, la magnitud de cada componente de frecuencia (es decir, $|a_0|$, $|a_1|$, etc.) se indica por la longitud de la línea vertical a la frecuencia correspondiente (f_0, f_1, etc.); para efectos de conveniencia, se ha tomado $V_m = 1$. Dado un valor diferente de V_m, simplemente se ajustan los valores del eje y a los nuevos valores.

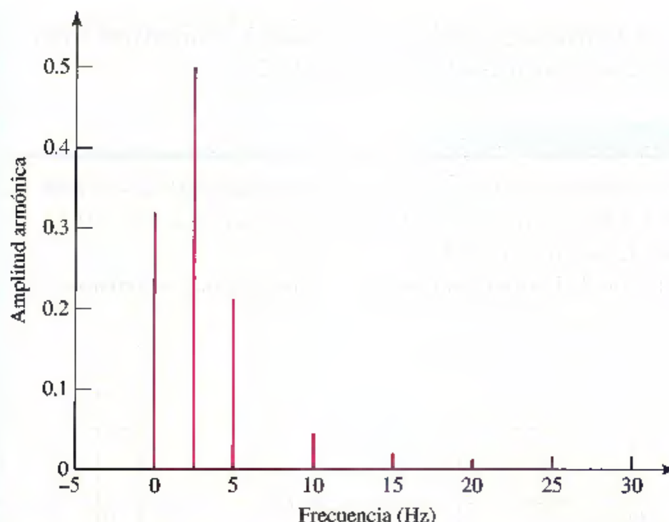


FIGURA 18.5 Espectro de línea discreto de $v(t)$ como se representa en la ecuación [16], que muestra las primeras siete componentes de frecuencia. Por conveniencia se ha seleccionado una magnitud de $V_{m=1}$.

A menudo, dicha gráfica se conoce con el nombre de *espectro discreto* y un solo vistazo a ella proporciona una gran cantidad de información. En particular, se puede observar cuántos términos de la serie se requieren para obtener una aproximación razonable de la forma de onda original. En el espectro de línea de la figura 18.5 se observa que las armónicas 8a. y 10a. (20 y 25 Hz, respectivamente) agregan solamente una pequeña corrección. Por lo tanto, interrumpir la serie después de la 6a. armónica debe proporcionar una buena aproximación; el lector podrá juzgarlo por sí mismo considerando la figura 18.3.

RECAPITULACIÓN

Es necesario señalar un aspecto importante. El ejemplo considerado no contiene términos seno y la amplitud de la armónica *enésima* es, por lo tanto, $|a_n|$. Si b_n no es cero, entonces la amplitud de la componente a una frecuencia $n\omega_0$ debe ser $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, que es una cantidad general que se debe indicar en el espectro de líneas. Cuando se estudie la forma compleja de la serie de Fourier, se verá que tal amplitud se obtiene de manera más directa.

Además del espectro de amplitud, también se construye un ***espectro de fase*** discreto. A cualquier frecuencia $n\omega_0$, se combinan los términos coseno y seno para determinar el ángulo de fase ϕ_n:

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(n\omega_0 t + \tan^{-1}\frac{-b_n}{a_n}\right)$$
$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

o

$$\phi_n = \tan^{-1}\frac{-b_n}{a_n}$$

En la ecuación [16], $\phi_n = 0°$ o $180°$ para cualquier n.

La serie de Fourier de este ejemplo no incluye términos seno ni armónicas impares (salvo la fundamental) entre los términos coseno. Se puede pronosticar la

ausencia de ciertos términos en una serie de Fourier, antes de que se efectúe cualquier integración, mediante una inspección de la simetría de la función de tiempo dada. En la siguiente sección se investigará el uso de la simetría.

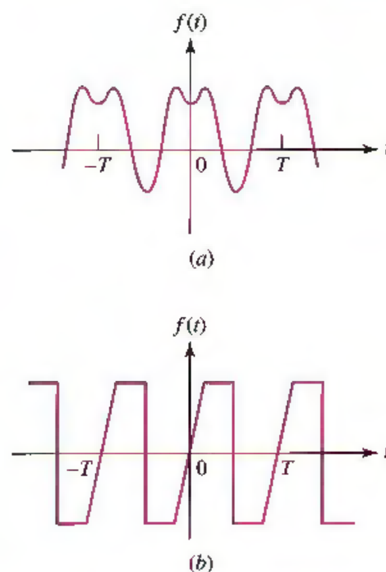


FIGURA 18.6 (*a*) Forma de onda que muestra simetría par. (*b*) Forma de onda con simetría impar.

18.2 USO DE LA SIMETRÍA

Simetría par e impar

Los dos tipos de simetría que se reconocen con mayor facilidad son la *simetría de función par* y *la de función impar* o simplemente *simetría par* y *simetría impar.* Se dice que $f(t)$ posee la propiedad de simetría si

$$f(t) = f(-t) \qquad [17]$$

Funciones como t^2, $\cos 3t$, $\ln(\cos t)$, $\text{sen}^2\, 7t$, y una constante C poseen todas simetría par; la sustitución de t por $(-t)$ no cambia el valor de ninguna de estas funciones. Este tipo de simetría también se podría reconocer en forma gráfica, pues si $f(t) = f(-t)$ entonces existe simetría reflejada respecto del eje $f(t)$. La función de la figura 18.6*a* posee simetría par; si la figura se plegara a lo largo del eje $f(t)$, entonces las porciones de la gráfica de los tiempos positivo y negativo coincidirán con exactitud.

Se define la simetría impar señalando que si es una propiedad de $f(t)$, entonces

$$f(t) = -f(-t) \qquad [18]$$

En otras palabras, si t se sustituye por $(-t)$, entonces se obtiene el negativo de la función dada; por ejemplo, t, sen t, $t \cos 70t$, $t\sqrt{1+t^2}$, y la función dibujada en la figura 18.6*b* son funciones impares y poseen simetría impar. Las características gráficas de la simetría impar son patentes en la parte de $f(t)$ para la que $t > 0$ se gira en torno al eje t positivo y la figura resultante se gira después en torno al eje $f(t)$; las dos curvas coincidirán de manera exacta. Es decir, en este caso se tiene simetría respecto del origen y no en torno al eje $f(t)$, como ocurrió en el caso de las funciones pares.

Al tener definiciones de la simetría par y la impar, se debe observar que el producto de dos funciones con simetría par, o de dos funciones con simetría impar, tiene como resultado una función con simetría par. Por su parte, el producto de una función par y una impar da como resultado una función con simetría impar.

Simetría y términos de la serie de Fourier

Se investigará ahora el efecto que la simetría par produce en una serie de Fourier. Si se considera la expresión que iguala una función par $f(t)$ con la suma de un número infinito de funciones seno y coseno, resulta claro que la suma también debe ser una función par. Sin embargo, una onda seno es una función impar, y *ninguna suma de onda seno puede producir una función par, aparte de cero* (que es tanto par como impar). Así, es posible que la serie de Fourier de cualquier función par esté compuesta sólo por una constante y por funciones coseno. Se demostrará ahora con cuidado que $b_n = 0$. Se tiene

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt\right]$$

Luego se sustituye la variable t en la primera integral por $-\tau$, o $\tau = -t$, y se recurre al hecho de que $f(t) = f(-t) = f(\tau)$:

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(-\tau)\,\text{sen}\,(-n\omega_0\tau)(-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}\,n\omega_0 t\,dt\right]$$
$$= \frac{2}{T}\left[-\int_0^{T/2} f(\tau)\,\text{sen}\,n\omega_0\tau\,d\tau + \int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}\,n\omega_0 t\,dt\right]$$

Sin embargo, el símbolo que se utiliza para identificar la variable de integración no puede afectar el valor de la integral. Así,

$$\int_0^{T/2} f(\tau)\,\text{sen}\,n\omega_0\tau\,d\tau = \int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}\,n\omega_0 t\,d\tau$$

y

$$b_n = 0 \qquad \text{(simetría par)} \qquad [19]$$

Ningún término seno está presente. En consecuencia, si $f(t)$ tiene simetría par, entonces $b_n = 0$; inversamente, si $b_n = 0$, entonces $f(t)$ debe tener simetría par.

Una inspección similar de la expresión de a_n conduce a una integral sobre la *mitad del periodo* que se extiende desde $t = 0$ hasta $t = \frac{1}{2}T$:

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \qquad \text{(simetría par)} \qquad [20]$$

El hecho de que sea posible obtener a_n de una función par tomando "el doble de la integral sobre la mitad del intervalo" debe parecer lógico.

Una función con simetría impar no contiene un término constante ni un término seno en su desarrollo de Fourier. Se demostrará la segunda parte de este enunciado. Se tiene

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$
$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right]$$

y ahora se hace que $t = -\tau$ en la primera integral:

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(-\tau)\cos(-n\omega_0\tau)\,(-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right]$$
$$= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} f(-\tau)\cos\,n\omega_0\tau\,d\tau + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right]$$

Pero $f(-\tau) = -f(\tau)$; por lo tanto,

$$a_n = 0 \qquad \text{(simetría impar)} \qquad [21]$$

Una prueba similar, aunque más simple, demuestra que

$$a_0 = 0 \qquad \text{(simetría impar)}$$

Por lo tanto, con simetría impar $a_n = 0$ y $a_0 = 0$; inversamente, si $a_n = 0$ y $a_0 = 0$, está presente la simetría impar.

Los valores de b_n se obtendrían otra vez integrando sobre la mitad del intervalo:

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\ \text{sen}\ n\omega_0 t\ dt \qquad \text{(simetría impar)} \qquad [22]$$

El problema de práctica 18.3 que antecede a esta sección proporcionó ejemplos de simetría par e impar. Tanto en la parte *a* como en la *b*, la función dada es una onda cuadrada de la misma amplitud y periodo. Sin embargo, el origen del tiempo se selecciona para ofrecer simetría impar en la parte *a* y simetría par en la parte *b*, y la serie resultante contiene sólo términos seno y sólo términos coseno, respectivamente. También vale la pena observar que el punto en el que $t = 0$ pudo haberse seleccionado para no proporcionar simetría par ni impar; la determinación de los coeficientes de los términos de la serie de Fourier hubieran sido, al menos, del doble de largos.

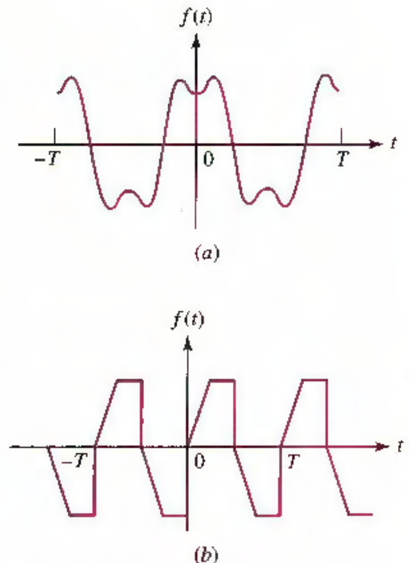


FIGURA 18.7 (*a*) Forma de onda un tanto similar a la que se muestra en la figura 18.6*a*, pero que posee simetría de media onda. (*b*) Forma de onda un tanto similar a la de la figura 18.6*b*, pero con simetría de media onda.

Simetría de media onda

La serie de Fourier de ambas ondas cuadradas tiene una característica interesante: ninguna contiene algún *armónica* par.[1] Esto es, las únicas componentes de frecuencia presentes en la serie son múltiplos impares de la frecuencia fundamental; a_n y b_n son cero para valores pares de n. Este resultado se debe a otro tipo de simetría, conocida como simetría de media onda. Se afirma que $f(t)$ posee *simetría de media onda* si

$$f(t) = -f\left(t - \tfrac{1}{2}T\right)$$

o la expresión equivalente,

$$f(t) = -f\left(t + \tfrac{1}{2}T\right)$$

Salvo por el cambio de signo, cada medio ciclo es similar a los medios ciclos adyacentes. La simetría de media onda, a diferencia de la simetría par e impar, no está en función de la elección del punto $t = 0$. Por lo tanto, se establece que la onda cuadrada (figura 18.4*a* o *b*) muestra simetría de media onda. Ninguna de las formas de onda de la figura 18.6 tiene simetría de media onda, aunque las dos funciones algo semejantes que se grafican en la figura 18.7 poseen simetría de media onda.

Se podría demostrar que las series de Fourier de cualquier función que tiene simetría de media onda contienen únicamente armónicas impares. Considerar los coeficientes a_n. Se tiene de nuevo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt\right] \end{aligned}$$

la cual se representaría como

$$a_n = \frac{2}{T}(I_1 + I_2)$$

(1) Se requiere una vigilancia constante para evitar la confusión entre una función par y una armónica par, o entre una función impar y una armónica impar. Por ejemplo, b_{10} es el coeficiente de una armónica par, y es cero si $f(t)$ es una función par.

Se sustituye ahora la nueva variable $\tau = t + \frac{1}{2}T$ en la integral I_1:

$$I_1 = \int_0^{T/2} f\left(\tau - \frac{1}{2}T\right) \cos n\omega_0 \left(\tau - \frac{1}{2}T\right) d\tau$$

$$= \int_0^{T/2} -f(\tau)\left(\cos n\omega_0\tau \cos \frac{n\omega_0 T}{2} + \operatorname{sen} n\omega_0\tau \operatorname{sen} \frac{n\omega_0 T}{2}\right) d\tau$$

Pero $\omega_0 T$ es 2π; por ello,

$$\operatorname{sen} \frac{n\omega_0 T}{2} = \operatorname{sen} n\pi = 0$$

Por consiguiente,

$$I_1 = -\cos n\pi \int_0^{T/2} f(\tau) \cos n\omega_0\tau \, d\tau$$

Al observar la forma de I_2, es viable escribir

$$a_n = \frac{2}{T}(1 - \cos n\pi) \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$$

El factor $(1 - \cos n\pi)$ indica que a_n es cero, si n es par. De tal manera,

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \qquad \left(\tfrac{1}{2} \text{ simetría de onda}\right) \quad [23]$$

Una investigación similar muestra que b_n es también cero para toda n par y, por lo tanto,

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \qquad \left(\tfrac{1}{2} \text{ simetría de onda}\right) \quad [24]$$

Debe observarse que la simetría de media onda se presentaría como una forma de onda que también muestre simetría impar o par. La forma de onda dibujada en la figura 18.7*a*, por ejemplo, posee simetría par y de media onda. Cuando una forma de onda tiene simetría de media onda y simetría par o impar, entonces se puede reconstruir la forma de onda, si se conoce la función sobre cualquier intervalo de un cuarto del periodo. El valor de a_n o b_n también se determina al integrar sobre cualquier cuarto de periodo. Por lo tanto,

Siempre vale la pena dedicar unos momentos a investigar la simetría de una función para la que se va a determinar la serie de Fourier.

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt && n \text{ impar} \\ a_n &= 0 && n \text{ par} \\ b_n &= 0 && \text{todo } n \end{aligned}\right\} \quad \left(\tfrac{1}{2} \text{ simetría de onda y par}\right) \quad [25]$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 && \text{todo } n \\ b_n &= \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt && n \text{ impar} \\ b_n &= 0 && n \text{ par} \end{aligned}\right\} \quad \left(\tfrac{1}{2} \text{ simetría de onda e impar}\right) \quad [26]$$

La tabla 18.1 proporciona un breve resumen de las simplificaciones que surgen de los diferentes tipos de simetrías que se estudiaron en esta sección.

TABLA 18.1 Resumen de las simplificaciones de la serie de Fourier con base en las simetrías

Tipo de simetría	Característica	Simplificación
Par	$f(t) = -f(t)$	$b_n = 0$
Impar	$f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0$
Media onda	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ o $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$a_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$ $b_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$
Media onda y par	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ y $f(t) = -f(t)$ o $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ y $f(t) = -f(t)$	$a_n = \begin{cases} \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$ $b_n = 0$ para todo n
Media onda e impar	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ y $f(t) = -f(-t)$ o $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ y $f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0$ para todo n $b_n = \begin{cases} \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$

PRÁCTICA

18.4 Graficar cada una de las funciones descritas, establecer si está presente o no la simetría par, la simetría impar o la simetría de media onda, e indicar el periodo: (*a*) $v = 0$, para $-2 < t < 0$ y $2 < t < 4$; $v = 5$, para $0 < t < 2$; $v = -5$, para $4 < t < 6$; se repite; (*b*) $v = 10$, para $1 < t < 3$; $v = 0$, para $3 < t < 7$; $v = -10$, para $7 < t < 9$; se repite; (*c*) $v = 8t$, para $-1 < t < 1$; $v = 0$, para $1 < t < 3$; se repite.

18.5 Determinar la serie de Fourier de las formas de onda del problema de práctica 18.4*a* y *b*.

Respuestas: 18.4: No, no, sí, 8; no, no, no, 8; no, sí, no, 4.

18.5: $\sum_{n=1(\text{impar})}^{\infty} \frac{10}{n\pi}\left(\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{4} + \text{sen}\,\frac{n\pi t}{4}\right)$;

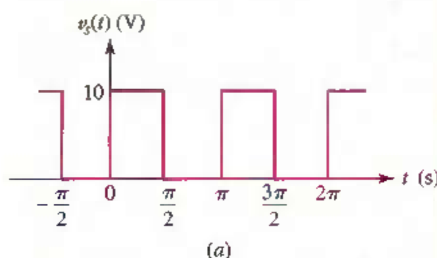
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi}\left[\left(\text{sen}\,\frac{3n\pi}{4} - 3\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi t}{4} + \left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right)\text{sen}\,\frac{n\pi t}{4}\right]$.

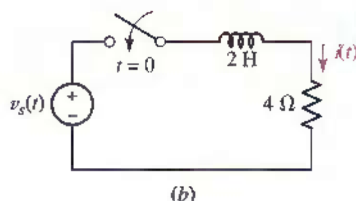
18.3 RESPUESTA COMPLETA A FUNCIONES FORZADAS PERIÓDICAS

Mediante el uso de la serie de Fourier se podría expresar ahora una función forzada periódica arbitraria como la suma de un número infinito de funciones forzadas senoidales. La respuesta forzada de cada una de estas funciones se debe determinar mediante el análisis convencional de estado permanente, pero la forma de la respuesta natural se establece a partir de los polos de una función de transferencia de red apropiada. Las condiciones iniciales que existen en la red, incluso el valor inicial de la respuesta forzada, permiten la selección de la amplitud de la respuesta natural; en consecuencia, la respuesta completa se obtiene como la suma de las respuestas forzada y natural.

EJEMPLO 18.2

Calcular la respuesta periódica que se obtiene cuando la onda cuadrada de la figura 18.8*a*, incluyendo su componente de cd, se aplica al circuito *RL* en serie de la figura 18.8*b*. La función forzada se aplica en $t = 0$, y la corriente es la respuesta que se desea. Su valor inicial es cero.





■ **FIGURA 18.8** (*a*) Función forzada de tensión de onda cuadrada. (*b*) La función forzada de la parte *a* se aplica a este circuito *RL* en serie, en $t = 0$; se desea la respuesta completa $i(t)$.

Recordar que V_m sen ωt es igual a $V_m \cos(\omega t - 90°)$, lo que corresponde a $V_m \underline{/-90°} = -jV_m$.

La función forzada tiene una frecuencia compleja (pulsación) fundamental $\omega_0 = 2$ rad/s, y su serie de Fourier se podría escribir por comparación con la serie de Fourier generada para la forma de onda de la figura 18.4*a* en la solución del problema de práctica 18.3,

$$v_s(t) = 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1\,(\text{impar})}^{\infty} \frac{\text{sen}\,2nt}{n}$$

Se encontrará la respuesta forzada de la armónica *enésima* trabajando en el dominio de la frecuencia. De tal modo,

$$v_{sn}(t) = \frac{20}{n\pi}\,\text{sen}\,2nt$$

y

$$\mathbf{V}_{sn} = \frac{20}{n\pi}\underline{/-90°} = -j\frac{20}{n\pi}$$

La impedancia que ofrece el circuito *RL* a esta frecuencia está dada por

$$\mathbf{Z}_n = 4 + j(2n)2 = 4 + j4n$$

y por ello la componente de la respuesta forzada a esta frecuencia es igual a

$$\mathbf{I}_{fn} = \frac{\mathbf{V}_{sn}}{\mathbf{Z}_n} = \frac{-j5}{n\pi(1 + jn)}$$

Si se transforma al dominio del tiempo, se tiene

$$i_{fn} = \frac{5}{n\pi}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\cos(2nt - 90° - \tan^{-1} n)$$

$$= \frac{5}{\pi(1+n^2)}\left(\frac{\text{sen}\,2nt}{n} - \cos 2nt\right)$$

Dado que la respuesta de la componente de cd es simplemente 5 V/4 $\Omega = 1.25$ A, la respuesta forzada se expresaría como la sumatoria

$$i_f(t) = 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{impar})}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen} 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2} \right]$$

La respuesta natural familiar de este circuito simple es el término exponencial [que caracteriza al único polo de la función de transferencia, $\mathbf{I}_f/\mathbf{V}_s = 1/(4+2\mathbf{s})$]

$$i_n(t) = Ae^{-2t}$$

La respuesta *completa* es, por lo tanto, la suma

$$i(t) = i_f(t) + i_n(t)$$

Si $t = 0$, se encuentra A utilizando $i(0) = 0$:

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{impar})}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Aunque sería correcto expresar A en términos de esta sumatoria, resulta más conveniente utilizar el valor numérico de la sumatoria. La suma de los primeros cinco términos de $\Sigma\ 1/(1+n^2)$ es 0.671, la suma de los primeros diez términos es 0.695, la suma de los primeros veinte términos corresponde a 0.708 y la suma exacta es igual a 0.720 hasta tres cifras significativas. Por lo tanto,

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi}(0.720) = -0.104$$

e

$$i(t) = -0.104e^{-2t} + 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{impar})}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen} 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2} \right] \quad \text{amperes}$$

Al obtener esta solución, se emplean muchos de los conceptos más generales que se presentaron en éste y en los 17 capítulos precedentes. No fue necesario utilizar algunos debido a la naturaleza simple de este circuito en particular, aunque se indicó su posición en el análisis general. En este sentido, se podría considerar la solución de este problema como un logro significativo en el estudio introductorio del análisis de circuitos. Sin embargo, a pesar de este glorioso sentimiento de logro, debe señalarse que la respuesta completa, según se obtuvo de manera analítica en el ejemplo 18.2, no es de mucho valor en la forma dada, pues no ofrece una imagen clara de la naturaleza de la respuesta. Lo que en realidad se requiere es un bosquejo de $i(t)$ como función del tiempo, la cual se obtendría mediante un cálculo laborioso. Una computadora de escritorio o una calculadora programable son de gran ayuda en este caso. El bosquejo quizá se aproxime mediante la suma gráfica de la respuesta natural, el término de cd y unas cuantas de las primeras armónicas; ésta es una tarea ingrata.

Cuando todo se ha dicho y hecho, tal vez la solución más informativa de este problema se obtenga mediante un análisis transitorio repetido. Esto es, la forma de la respuesta puede calcularse con certeza en el intervalo de $t = 0$ a $t = \pi/2$ s; éste es un crecimiento exponencial hacia 2.5 A. Después de determinar el valor

en el extremo del primer intervalo, se tiene la condición inicial del siguiente segundo intervalo de $(\pi/2)$. El proceso se repite hasta que la respuesta asume una naturaleza que suele resultar periódica. El método resulta muy adecuado para este ejemplo, pues hay un cambio insignificante en la forma de onda de la corriente en los periodos sucesivos $\pi/2 < t < 3\pi/2$ y $3\pi/2 < t < 5\pi/2$. La respuesta de corriente completa se dibuja en la figura 18.9.

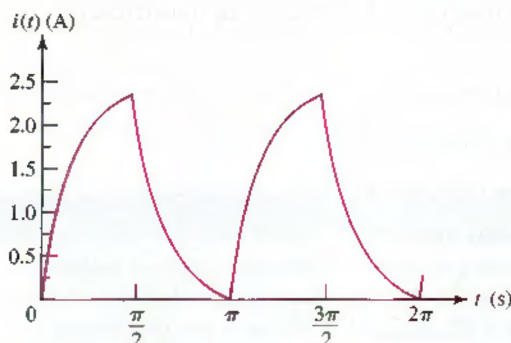


FIGURA 18.9 Porción inicial de la respuesta completa del circuito de la figura 18.8*b* a la función forzada de la figura 18.8*a*.

PRÁCTICA

18.6 Utilizar los métodos del capítulo 8 para determinar el valor de la corriente de la figura 18.9 en t igual a: (*a*) $\pi/2$; (*b*) π; (*c*) $3\pi/2$.

Respuestas: 2.392 A; 0.1034 A; 2.396 A.

18.4 FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

Al obtener un espectro de frecuencia, se observó que la amplitud de cada componente de frecuencia depende tanto de a_n como de b_n; esto es, el término seno y el término coseno contribuyen a la amplitud. La expresión exacta de esta amplitud es $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. También es posible obtener la amplitud en forma directa al utilizar una forma de la serie de Fourier en la que cada término es una función coseno con un ángulo de fase; la amplitud y el ángulo de fase son funciones de $f(t)$ y n.

Una forma incluso más conveniente y concisa de la serie de Fourier se consigue si los senos y cosenos se expresan como funciones exponenciales con constantes multiplicadoras complejas.

Se considera primero la forma trigonométrica de la serie de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$$

y luego se sustituyen las formas exponenciales del seno y el coseno. Tras reordenar,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{jn\omega_0 t}\frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\omega_0 t}\frac{a_n + jb_n}{2}\right)$$

El lector recordará las identidades

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{j2}$$

y

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

Se define ahora una constante compleja $\mathbf{c}_n$:

$$\mathbf{c}_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{27}$$

Los valores de a_n, b_n y $\mathbf{c}_n$ dependen todas de n y $f(t)$. Suponiendo que se reemplaza ahora n por $(-n)$, ¿cómo cambian los valores de las constantes? Los coeficientes a_n y b_n se definen mediante las ecuaciones [10] y [11] y resulta evidente que:

$$a_{-n} = a_n$$

pero

$$b_{-n} = -b_n$$

De la ecuación [27] se tiene

$$\mathbf{c}_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{28}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}^*_{-n}$$

También sea,

$$\mathbf{c}_0 = a_0$$

Por lo tanto, se podría expresar $f(t)$ como

$$f(t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

o

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

Por último, en lugar de sumar la segunda serie respecto de los enteros positivos desde 1 hasta ∞, se sumará respecto de los enteros negativos desde -1 hasta $-\infty$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}$$

o

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}} \tag{29}$$

Por convención, una sumatoria desde $-\infty$ hasta ∞ se entiende que incluye un término para $n = 0$.

La ecuación [29] es la *forma compleja* de la serie de Fourier para $f(t)$; su concisión es una de las razones más importantes por la que se utiliza. Para obtener la expresión mediante la que se podría evaluar un coeficiente complejo particular $\mathbf{c}_n$ se sustituyen las ecuaciones [10] y [11] en la [27]:

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt - j\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt$$

luego se utilizan los equivalentes exponenciales del seno y del coseno y se simplifica:

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt \qquad [30]$$

Así, una sola y concisa ecuación sirve para sustituir las dos ecuaciones requeridas para la forma trigonométrica de la serie de Fourier. En lugar de evaluar dos integrales para obtener los coeficientes de Fourier, sólo se necesita una integración; además, casi siempre es una integración más simple. Debe observarse que la integral de la ecuación [30] contiene el factor $1/T$, mientras que las integrales de a_n y b_n no contienen el factor $2/T$.

Al agrupar las dos relaciones básicas de la forma exponencial de la serie de Fourier, se tiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \qquad [29]$$

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt \qquad [30]$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$ como es usual.

La amplitud de la componente de la serie de Fourier exponencial en $\omega = n\omega_0$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, es $|\mathbf{c}_n|$. Se graficaría un espectro de frecuencia discreto dando $|\mathbf{c}_n|$ en función de $n\omega_0$ o nf_0, utilizando una abscisa que muestre los valores tanto positivos como negativos. Cuando se efectúa lo anterior, la gráfica es simétrica alrededor del origen, pues las ecuaciones [27] y [28] muestran que $|\mathbf{c}_n| = |\mathbf{c}_{-n}|$.

Observar también de las ecuaciones [29] y [30] que la amplitud de la componente senoidal en $\omega = n\omega_0$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$, es $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|\mathbf{c}_n| = 2|\mathbf{c}_{-n}| = |\mathbf{c}_n| + |\mathbf{c}_{-n}|$. En el caso de la componente de cd, $a_0 = \mathbf{c}_0$.

Los coeficientes exponenciales de Fourier, dados por la ecuación [30], también resultan afectados por la presencia de ciertas simetrías en $f(t)$. De tal modo, las expresiones apropiadas de $\mathbf{c}_n$ son:

$$\mathbf{c}_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \qquad \text{(simetría par)} \qquad [31]$$

$$\mathbf{c}_n = \frac{-j2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt \qquad \text{(simetría impar)} \qquad [32]$$

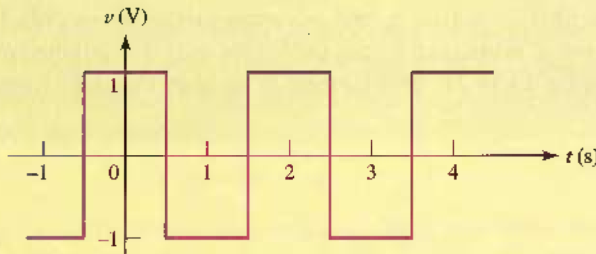
$$\mathbf{c}_n = \begin{cases} \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt & (n \text{ simetría } \tfrac{1}{2} \text{ media onda}) \quad [33a] \\ 0 & (n \text{ par } \tfrac{1}{2} \text{ media onda}) \quad [33b] \end{cases}$$

$$\mathbf{c}_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt & (n \text{ impar } \tfrac{1}{2} \text{ media onda}) \quad [34a] \\ 0 & (n \text{ par } \tfrac{1}{2} \text{ media onda}) \quad [34b] \end{cases}$$

$$\mathbf{c}_n = \begin{cases} \dfrac{-j4}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt & (n \text{ impar } \tfrac{1}{2} \text{ media onda}) \quad [35a] \\ 0 & (n \text{ par } \tfrac{1}{2} \text{ media onda}) \quad [35b] \end{cases}$$

EJEMPLO 18.3

Determinar $\mathbf{c}_n$ de la onda cuadrada de la figura 18.10.



■ **FIGURA 18.10** Función de onda cuadrada que posee paridad y simetría para media onda.

Esta onda cuadrada posee simetría paridad y simetría para media onda. Si se ignora esta simetría y se usa la ecuación general [30], con $T = 2$ y $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{-0.5} -e^{-jn\pi t}\,dt + \int_{-0.5}^{0.5} e^{-jn\pi t}\,dt - \int_{0.5}^{1} e^{-jn\pi t}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})_{-1}^{-0.5} + \frac{1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})_{-0.5}^{0.5} + \frac{-1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})_{0.5}^{1}\right] \\
&= \frac{1}{j2n\pi}(e^{jn\pi/2} - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi/2} + e^{jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi/2}) \\
&= \frac{1}{j2n\pi}(2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2}) = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se encuentra que $\mathbf{c}_0 = 0$, $\mathbf{c}_1 = 2/\pi$, $\mathbf{c}_2 = 0$, $\mathbf{c}_3 = -2/3\pi$, $\mathbf{c}_4 = 0$, $\mathbf{c}_5 = 2/5\pi$, etc. Estos valores concuerdan con la serie de Fourier trigonométrica dada como respuesta de la práctica 18.3 para la forma de onda de la figura 18.4*b*, si se recuerda que $a_n = 2\mathbf{c}_n$ cuando $b_n = 0$.

Al utilizar la simetría de la forma de onda (paridad y media onda), se requiere menos trabajo cuando se aplican las ecuaciones [34*a*] y [34*b*], que llevan a

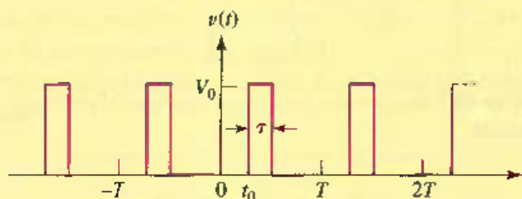
$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \\
&= \frac{4}{2}\int_0^{0.5}\cos n\pi t\,dt = \frac{2}{n\pi}(\operatorname{sen} n\pi t)\Big|_0^{0.5} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2} & (n \text{ impar}) \\ 0 & (n \text{ par}) \end{cases}
\end{aligned}$$

Estos resultados son los mismos que los que se obtienen cuando no se toma en cuenta la simetría de la forma de onda.

Se considerará ahora un ejemplo más difícil e interesante.

EJEMPLO 18.4

Cierta función $f(t)$ es un tren de pulsos rectangulares de amplitud V_0 y duración τ, que se repiten en forma periódica cada T segundos, como se muestra en la figura 18.11. Determinar la serie de Fourier exponencial de $f(t)$.



■ **FIGURA 18.11** Secuencia periódica de pulsos rectangulares.

La frecuencia fundamental es $f_0 = 1/T$. No se presenta simetría y el valor de un coeficiente complejo general se determina gracias a la ecuación [30]:

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{V_0}{T}\int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{V_0}{-jn\omega_0 T}(e^{-jn\omega_0(t_0+\tau)} - e^{-jn\omega_0 t_0})$$

$$= \frac{2V_0}{n\omega_0 T}e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)$$

$$= \frac{V_0\tau}{T}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)}$$

Por lo tanto, la magnitud de $\mathbf{c}_n$ es

$$|\mathbf{c}_n| = \frac{V_0\tau}{T}\left|\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}\right| \quad [36]$$

y el ángulo de $\mathbf{c}_n$ está dado por

$$\text{ang } \mathbf{c}_n = -n\omega_0\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right) \quad \text{(posiblemente más de } 180°) \quad [37]$$

Las ecuaciones [36] y [37] representan la solución de este problema de la serie de Fourier exponencial.

La función de muestreo

A menudo, en la teoría de comunicaciones moderna aparece el factor trigonométrico de la ecuación [36], que se conoce como ***función de muestreo.*** El "muestreo" se refiere a la función de tiempo que se muestra en la figura 18.11, de la cual se deduce la función de muestreo. El producto de esta secuencia de

pulsos y cualquier otra función $f(t)$ representa *muestras* de $f(t)$ cada T segundos, si τ es pequeña y $V_0 = 1$. Se define

$$\text{Sa}(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x}$$

Debido a la forma en que ayuda a determinar la amplitud de las diversas componentes de frecuencia en $f(t)$, vale la pena descubrir las características importantes de esta función. Primero, observar que Sa(x) es cero, siempre que x sea un múltiplo entero de π; esto es:

$$\text{Sa}(n\pi) = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Cuando x es cero, la función es indeterminada, pero resulta fácil demostrar que su valor es la unidad:

$$\text{Sa}(0) = 1$$

Por lo tanto, la magnitud de Sa(x) disminuye desde la unidad en $x = 0$ hasta cero en $x = \pi$. A medida que x aumenta desde π hasta 2π, $|\text{Sa}(x)|$)| se incrementa desde cero hasta un máximo menor que la unidad y después disminuye hasta cero otra vez. Conforme x continúa aumentando, los máximos sucesivos se vuelven cada vez más pequeños, debido a que el numerador de Sa(x) no puede exceder de la unidad y el denominador crece de manera continua. Además, Sa(x) muestra simetría par.

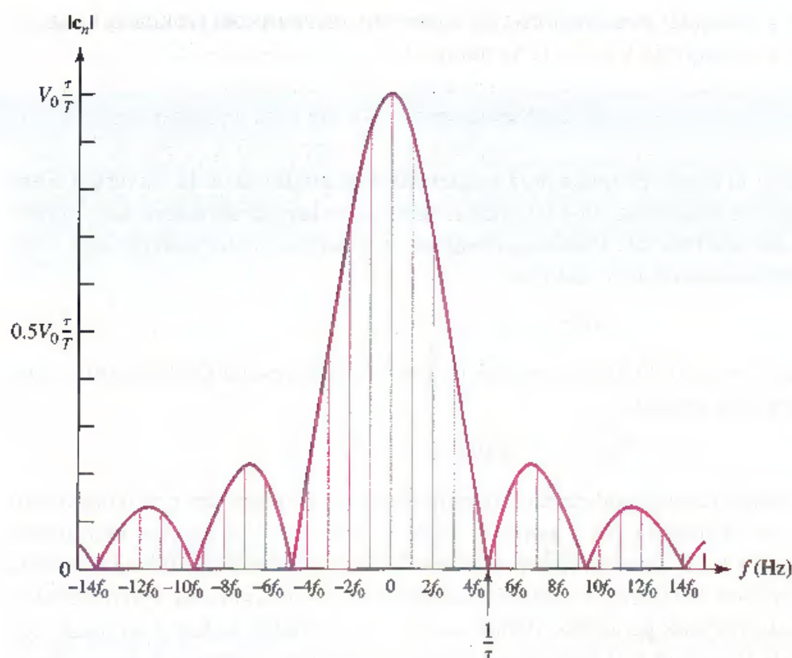
Se construirá ahora el espectro de líneas. Se considera primero $|\mathbf{c}_n|$, escribiendo la ecuación [36] en términos de la frecuencia cíclica fundamental f_0:

$$|\mathbf{c}_n| = \frac{V_0 \tau}{T} \left| \frac{\text{sen}\,(n\pi f_0 \tau)}{n\pi f_0 \tau} \right| \qquad [38]$$

La amplitud de cualquier $\mathbf{c}_n$ se obtiene de la ecuación [38] utilizando los valores conocidos τ y $T = 1/f_0$ y eligiendo el valor deseado de n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. En lugar de evaluar la ecuación [38] en estas frecuencias discretas, se dibujará la *envolvente* de $|\mathbf{c}_n|$ considerando la frecuencia nf_0 como una variable continua. Es decir, f, la cual es nf_0, en realidad sólo puede tomar los valores discretos de las frecuencias armónicas 0, $\pm f_0$, $\pm 2f_0$, $\pm 3f_0$, etc., aunque, por el momento, se podría considerar a n como una variable continua. Cuando f es cero, $|\mathbf{c}_n|$ es evidentemente $V_0\tau/T$, y cuando f aumenta hasta $1/\tau$, $|\mathbf{c}_n|$ es cero. La envolvente resultante se dibuja con una línea tenue en la figura 18.12*a*. El espectro de línea se obtiene entonces levantando una recta vertical en cada frecuencia armónica, como se ilustra en el dibujo. Las amplitudes que se presentan son las correspondientes a $\mathbf{c}_n$. El caso dibujado se aplica a la situación en la que $\tau/T = 1/(1.5\pi) = 0.212$. En este ejemplo, no hay armónica exactamente en la frecuencia donde la amplitud de la envolvente es igual a cero; sin embargo, otra elección de τ o T produciría dicho suceso.

En la figura 18.12*b*, la amplitud de la componente senoidal se grafica como una función de la frecuencia. Observar otra vez que $a_0 = \mathbf{c}_0$ y $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |\mathbf{c}_n| + |\mathbf{c}_{-n}|$.

Son varias las observaciones y las conclusiones que se pueden hacer acerca del espectro de líneas de una secuencia periódica de pulsos rectangulares, como se indica en la figura 18.12*b*. Con respecto a la envolvente del espectro discreto, resulta evidente que el "ancho" de la envolvente depende de τ, y no de T. En realidad, la forma de la envolvente no es una función de T. Se concluye que el ancho de banda de un filtro que se diseña para dejar pasar pulsos periódicos es una función del ancho del pulso τ, pero no del periodo del pulso T; un examen de la



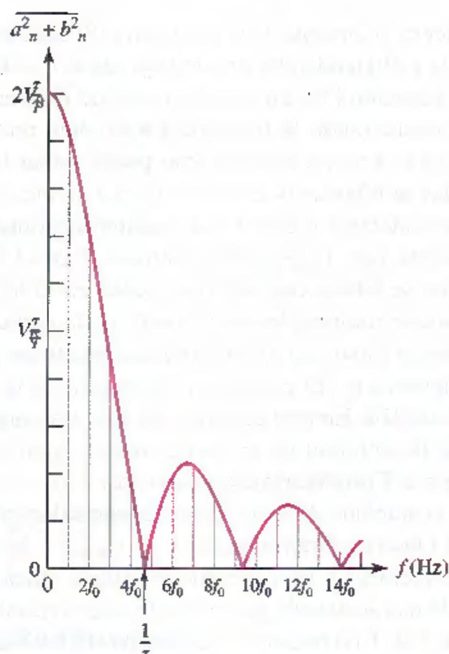


FIGURA 18.12 (*a*) Espectro de línea discreto de $|c_n|$ *versus* $f = nf_0, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ correspondiente al tren de pulsos que se muestra en la figura 18.11. (*b*) $\sqrt{a^2 + b^2}$ versus $f = nf_0, n = 0, 1, 2, \ldots$ para el mismo tren de pulsos.

figura 18.12*b* indica que el ancho de banda requerido es casi igual a $1/\tau$ Hz. Si el periodo T del pulso se incrementa (o la frecuencia de repetición f_0 del pulso disminuye), no cambia el ancho de banda $1/\tau$, aunque aumenta el número de líneas espectrales entre la frecuencia cero y $1/\tau$ Hz pero en forma discontinua; la amplitud de cada línea es inversamente proporcional a T. Por último, un desplazamiento con respecto al origen del tiempo no cambia el espectro de líneas; esto es, $|\mathbf{c}_n|$ no es una función de t_0. Las fases relativas de los componentes de frecuencia cambian con la elección de t_0.

PRÁCTICA

18.7 Determinar el coeficiente general $\mathbf{c}_n$ en la serie de Fourier compleja para la forma de onda de la figura: (*a*) 18.4*a*; (*b*) 18.4*c*.

Respuestas: $-j2/(n\pi)$ para n impar, 0 para n par; $-j[4/(n^2\pi^2)]$ sen $n\pi/2$ para toda n.

18.5 DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Ahora que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la representación mediante la serie de Fourier de funciones periódicas, se procederá a definir la transformada de Fourier recordando primero el espectro del tren periódico de pulsos rectangulares que se obtuvo en la sección anterior. Se trataba de un espectro de líneas *discreto* que es el tipo que se debe obtener siempre para funciones periódicas del tiempo. El espectro era discreto en el sentido de que no era una función uniforme o continua de la frecuencia, sino que tenía valores distintos de cero sólo a frecuencias específicas.

Sin embargo, hay muchas funciones forzadas importantes que no son funciones periódicas del tiempo, como un pulso rectangular individual, una función escalón, una función rampa o cierto tipo extraño de función llamada *función impulso* que se definió en el capítulo 14. Los espectros de frecuencia quizá se obtengan para tales funciones no periódicas, aunque serán espectros *continuos* en los cuales determinada energía, en general, se encontraría en cualquier intervalo de frecuencia distinto de cero, sin importar qué tan pequeño sea.

Se desarrollará este concepto empezando con una función periódica para dejar luego de que el periodo se vuelva infinito. La experiencia con los pulsos rectangulares periódicos debe indicar que la envolvente disminuirá en amplitud, sin cambiar la forma, y que más y más componentes de frecuencia se encontrarán en un intervalo de frecuencia determinado. En el límite, se debe esperar una envolvente de amplitud pequeña que poco a poco se anule, llena con un número infinito de componentes de frecuencia separadas por intervalos de frecuencia cada vez más pequeños. El número de componentes de frecuencia entre 0 y 100 Hz, por ejemplo, se vuelve infinito, aunque la amplitud de cada uno tiende a cero. En principio, el espectro de amplitud cero parece un concepto misterioso. Se sabe que el espectro de líneas de una función forzada periódica muestra la amplitud de cada componente de frecuencia. Sin embargo, ¿qué significa la amplitud cero del espectro continuo de una función forzada no periódica? La pregunta se responderá en la sección siguiente; ahora se procederá a efectuar el procedimiento límite que se acaba de sugerir.

Se empieza con la forma exponencial de la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \qquad [39]$$

donde

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \qquad [40]$$

y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad [41]$$

Se deja ahora

$$T \to \infty$$

y, por ello, de la ecuación [41], ω_0 debe ser cada vez más pequeña. Se representa el límite mediante una diferencial:

$$\omega_0 \to d\omega$$

De tal modo,

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \to \frac{d\omega}{2\pi} \qquad [42]$$

Por último, la frecuencia de cualquier "armónica" $n\omega_0$ debe corresponder ahora con la variable de frecuencia general que describe el espectro continuo. En otras palabras, n debe tender al infinito a medida que ω_0 tiende a cero, por lo que el producto es finito:

$$n\omega_0 \to \omega \qquad [43]$$

Cuando las cuatro operaciones límite se aplican a la ecuación [40], se encuentra que $\mathbf{c}_n$ debe tender a cero, como se había supuesto. Si se multiplica cada lado de la ecuación [40] por el periodo T y después se lleva a cabo el proceso de límite, se obtiene un resultado no trivial:

$$\mathbf{c}_n T \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

El lado derecho de esta expresión es una función de ω (y *no* de t), así que se representa mediante $\mathbf{F}(j\omega)$:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \qquad [44]$$

Luego se aplica el proceso límite a la ecuación [39]. Se comienza multiplicando y dividiendo la sumatoria entre T,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n T e^{jn\omega_0 t}\frac{1}{T}$$

Se sustituye $\mathbf{c}_n T$ por la nueva cantidad $\mathbf{F}(j\omega)$ y después se utilizan las expresiones [42] y [43]. En el límite, la sumatoria se vuelve una integral, y

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \qquad [45]$$

Las ecuaciones [44] y [45] se llaman de manera colectiva *par de transformadas de Fourier.* La función $\mathbf{F}(j\omega)$ es la *transformada de Fourier* de $f(t)$, y $f(t)$ es la transformada *inversa* de Fourier de $\mathbf{F}(j\omega)$.

¡Esta relación de pares de transformadas es de lo más importante! Se debe memorizar, dibujar flechas que la señalen y recordarla de aquí en adelante y para siempre. Se subraya la importancia de estas relaciones repitiéndolas en forma de recuadro:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)\, dt \qquad [46a]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathbf{F}(j\omega)\, d\omega \qquad [46b]$$

Tal vez el lector haya observado unas cuántas similitudes entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace. Las diferencias clave entre ellas incluyen el hecho de que el almacenamiento de energía inicial no se incorpora con facilidad en el análisis de circuitos que emplea la transformada de Fourier, si bien lo anterior se hace con mucha facilidad en el caso de las transformadas de Laplace. Además, hay varias funciones de tiempo (por ejemplo, la exponencial *creciente*) para las que no existe una transformada de Fourier. Sin embargo, si el lector está interesado sobre todo en la información espectral y no en la respuesta transitoria, la opción es la transformada de Fourier.

Los términos exponenciales de ambas ecuaciones llevan signos opuestos en los exponentes. Para mantenerlos correctos, quizá ayude advertir que el signo positivo se asocia con la expresión de $f(t)$, como sucede con la serie de Fourier compleja, ecuación [39].

Es importante plantear una pregunta en este momento. En el caso de las relaciones de la transformada de Fourier de la ecuación [46], ¿es posible obtener la transformada de Fourier de *cualquier* $f(t)$ elegida de manera arbitraria? La respuesta es afirmativa para casi cualquier tensión o corriente que sea factible producir. Una condición suficiente de la existencia de $\mathbf{F}(j\omega)$ es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$$

Sin embargo, esta condición no es *necesaria,* debido a que algunas funciones que no la cumplen siguen teniendo una transformada de Fourier; la función de escalón es un ejemplo de lo anterior. Además, se verá después que $f(t)$ incluso no necesita ser no periódica para tener transformada de Fourier; la representación en serie de Fourier de una función periódica de tiempo es sólo un caso especial de la representación más general de la transformada de Fourier.

Como ya se indicó, la relación del par de transformadas de Fourier es única. Para una $f(t)$ dada, hay una $\mathbf{F}(j\omega)$ específica, y para una $\mathbf{F}(j\omega)$ hay una $f(t)$ específica.

EJEMPLO 18.5

Aplicar la transformada de Fourier para obtener el espectro continuo del pulso rectangular sencillo que se muestra en la figura 18.13*a*.

El pulso es una versión truncada de la secuencia que se consideró anteriormente en la figura 18.11, y puede describirse como

$$f(t) = \begin{cases} V_0 & t_0 < t < t_0 + \tau \\ 0 & t < t_0 \text{ y } t > t_0 + \tau \end{cases}$$

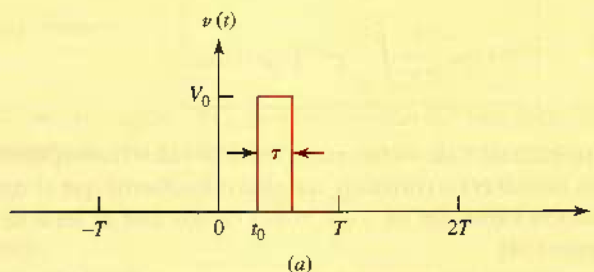
(Continúa en la siguiente página)

La transformada de Fourier de $f(t)$ se determina a partir de la ecuación [46a]:

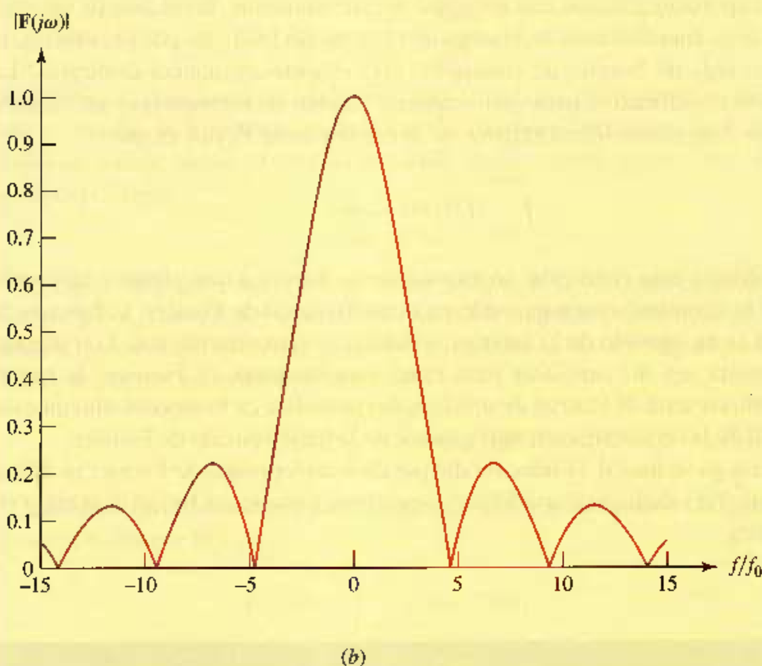
$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} V_0 e^{-j\omega t}\,dt$$

y se integraría y simplificaría con facilidad:

$$\mathbf{F}(j\omega) = V_0\tau \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega\tau}{\frac{1}{2}\omega\tau} e^{-j\omega(t_0+\tau/2)}$$



(a)



(b)

■ **FIGURA 18.13** (a) Pulso rectangular único idéntico a los de la secuencia de la figura 18.11. (b) Gráfica de $|\mathbf{F}(j\omega)|$ correspondiente al pulso, con $V_0 = 1$, $\tau = 1$ y $t_0 = 0$. El eje de la frecuencia se ha normalizado al valor de $f_0 = 1/1.5\pi$ correspondiente a la figura 18.12a para facilitar la comparación; obsérvese que f_0 no tiene significado o relevancia en el contexto de $\mathbf{F}(j\omega)$.

La magnitud de $\mathbf{F}(j\omega)$ tiene como resultado el espectro de frecuencia continuo, y evidentemente es de la forma de la función de muestreo. El valor de $\mathbf{F}(0)$ es $V_0\tau$. La forma del espectro resulta idéntica a la envolvente de la figura 18.12b. Una gráfica de $|\mathbf{F}(j\omega)|$ como función de ω *no* indica la magnitud de la tensión presente en cualquier frecuencia dada. Entonces,

¿cuál es? El examen de la ecuación [45] muestra que si $f(t)$ es una forma de onda de tensión, entonces las dimensiones de $\mathbf{F}(j\omega)$ son "volts por unidad de frecuencia", un concepto que se presentó en la sección 15.1.

PRÁCTICA

18.8 Si $f(t) = -10$ V, para $-0.2 < t < -0.1$s, $f(t) = 10$ V, para $0.1 < t < 0.2$s y $f(t) = 0$ para todas las demás t, evaluar $\mathbf{F}(j\omega)$ para ω igual a (*a*) 0; (*b*) 10π rad/s; (*c*) -10π rad/s; (*d*) 15π rad/s; (*e*) -20π rad/s.

18.9 Si $\mathbf{F}(j\omega) = -10$ V/(rad/s) para $-4 < \omega < -2$ rad/s, $+10$ V/(rad/s) para $2 < \omega < 4$ rad/s, y 0 para las demás ω, determinar el valor numérico de $f(t)$ en t igual a: (*a*) 10^{-4} s; (*b*) 10^{-2} s; (*c*) $\pi/4$ s; (*d*) $\pi/2$ s; (*e*) π s.

Respuestas: 18.8: 0; $j1.273$ V/(rad/s); $-j1.273$ V/(rad/s); $-j0.424$ V/(rad/s); 0.
18.9: $j1.9099 \times 10^{-3}$ V; $j0.1910$ V; $j4.05$ V; $-j4.05$ V; 0.

18.6 ALGUNAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

El objetivo en esta sección consiste en establecer varias de las propiedades matemáticas de la transformada de Fourier y algo más importante, comprender su significado físico. Se comienza utilizando la identidad de Euler para sustituir $e^{-j\omega t}$ en la ecuación [46*a*]:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}\,n\omega t\,dt \qquad [47]$$

Dado que $f(t)$, cos ωt y sen ωt son funciones reales del tiempo, ambas integrales de la ecuación [47] son funciones reales de ω. Por tanto, cos tsi

$$\mathbf{F}(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |\mathbf{F}(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} \qquad [48]$$

se tiene

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt \qquad [49]$$

$$B(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}\,n\,\omega_0 t) \qquad [50]$$

$$|\mathbf{F}(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \qquad [51]$$

y

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \qquad [52]$$

Sustituyendo ω por $-\omega$ se demuestra que $A(\omega)$ y $|\mathbf{F}(j\omega)|$ son funciones pares de ω, en tanto que $B(\omega)$ y $\phi(\omega)$ son funciones impares de ω.

Ahora bien, si $f(t)$ es una función par de t, el integrando de la ecuación [50] es una función impar de t, por lo que los límites simétricos obligan a que $B(\omega)$ sea cero; de tal modo, si $f(t)$ es par, su transformada de Fourier $\mathbf{F}(j\omega)$ es una función real y par de ω; además, la función de fase $\phi(\omega)$ es cero o π para toda ω. Sin embargo, si $f(t)$ es una función impar de t, entonces $A(\omega) = 0$ y $\mathbf{F}(j\omega)$

son impares y una función imaginaria pura de ω; $\phi(\omega)$ es $\pm\pi/2$. Sin embargo, en general $\mathbf{F}(j\omega)$ es una función compleja de ω.

Por último, se observa que la sustitución de ω por $-\omega$ en la ecuación [47] forma el *conjugado* de $\mathbf{F}(j\omega)$. Por lo tanto,

$$\mathbf{F}(-j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = \mathbf{F}^*(j\omega)$$

y se tiene

$$\mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}(-j\omega) = \mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}^*(j\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) = |\mathbf{F}(j\omega)|^2$$

Significado físico de la transformada de Fourier

Cuando se conocen estas propiedades matemáticas básicas de la transformada de Fourier, se está listo para considerar su significado físico. Suponer que $f(t)$ es la tensión o la corriente en la resistencia de 1 Ω, de modo que $f^2(t)$ es la potencia instantánea que entrega 1 Ω a la resistencia de $f(t)$. Si se integra esta potencia a lo largo del tiempo, se obtiene la energía total que suministra $f(t)$ a la resistencia de 1 Ω,

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt \qquad [53]$$

Se recurrirá ahora a un pequeño artificio. Considerando al integrando en la ecuación [53] como $f(t)$ multiplicada por sí misma, se sustituye una de esas funciones mediante la ecuación [46*b*]:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathbf{F}(j\omega)\,d\omega\right]dt$$

Puesto que $f(t)$ no es una función de la variable de integración ω, se puede mover dentro de la integral entre corchetes y luego intercambiar el orden de integración:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega)e^{j\omega t} f(t)\,dt\right]d\omega$$

A continuación, es necesario que $\mathbf{F}(j\omega)$ esté fuera de la integral interna, lo que provoca que la integral se convierta en $\mathbf{F}(-j\omega)$:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}(-j\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}(j\omega)|^2\,d\omega$$

Agrupando estos resultados, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}(j\omega)|^2\,d\omega \qquad [54]$$

Marc Antoine Parseval-Deschenes fue más bien un desconocido matemático, geógrafo y ocasional poeta francés que publicó estos resultados en 1805, diecisiete años antes de que Fourier publicara su teorema.

La ecuación [54] es una expresión muy útil conocida como teorema de Parseval. Este teorema, junto con la ecuación [53], establece que la energía asociada con $f(t)$ se obtiene de una integración de cualquier t en el dominio del tiempo, o mediante $1/(2\pi)$ veces una integración sobre toda la frecuencia (en radianes) en el dominio de la frecuencia.

El teorema de Parseval permite una mejor comprensión e interpretación del significado de la transformada de Fourier. Considerar una tensión $v(t)$ con transformada de Fourier $\mathbf{F}_v(j\omega)$ y energía 1 Ω para $W_{1\Omega}$:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\,d\omega$$

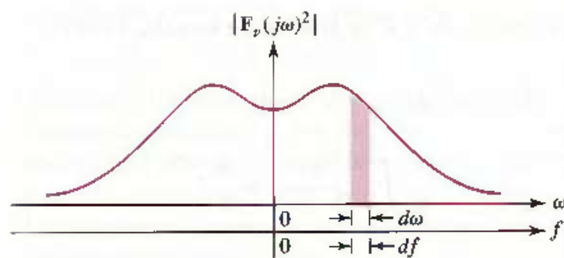


FIGURA 18.14 El área de la franja $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ es la energía correspondiente a una resistencia de 1 Ω asociada con $v(t)$ que se ubica en el ancho de banda df.

donde la igualdad que está más a la derecha se deduce del hecho de que $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ es una función par de ω. En ese caso, puesto que $\omega = 2\pi f$, se expresa:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, df = 2\int_{0}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, df \qquad [55]$$

La figura 18.14 ilustra una gráfica típica de $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ como una función tanto de ω como de f. Si se divide la escala de frecuencia en incrementos df cada vez más pequeños, la ecuación [55] nos muestra que el área de la rebanada diferenciada bajo la curva $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$, con un ancho df, es $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, df$. Dicha área se muestra sombreada. La suma de todas estas áreas, cuando f varía desde menos hasta más infinito, es la energía total de 1 Ω contenida en $v(t)$. De tal manera, $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ es la (1 Ω) ***densidad de energía*** o energía por ancho de banda unitario (J/Hz), de $v(t)$, y tal densidad de energía siempre es una función real, par y no negativa de ω. Integrando $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ sobre un intervalo de frecuencia apropiada, se puede calcular esa porción de la energía total que se encuentra dentro del intervalo elegido. Observar que la densidad de energía no es una función de la fase de $\mathbf{F}_v(j\omega)$, por lo cual existe un número infinito de funciones de tiempo y de transformadas de Fourier que poseen funciones energía-densidad idénticas.

EJEMPLO 18.6

El pulso exponencial unilateral [es decir, $v(t) = 0$ de $t < 0$]

$$v(t) = 4e^{-3t}\, u(t) \text{ V}$$

se aplica a la entrada de un filtro pasabanda ideal. Si el filtro pasabanda se define mediante $1 < |f| < 2$ Hz, calcular la energía de salida total.

Se puede llamar $v_o(t)$ a la tensión de salida del filtro. La energía en $v_o(t)$ será, por lo tanto, igual a la energía de esa parte de $v(t)$ que tenga componentes de frecuencia en el intervalo $1 < f < 2$ y $-2 < f < -1$. Se determina la transformada de Fourier de $v(t)$,

$$\mathbf{F}_v(j\omega) = 4\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-3t} u(t)\, dt$$

$$= 4\int_{0}^{\infty} e^{-(3+j\omega)t}\, dt = \frac{4}{3 + j\omega}$$

(Continúa en la siguiente página)

y luego se podría calcular la energía de 1 Ω en la señal de entrada, ya sea mediante

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, d\omega$$

$$= \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{8}{3}\text{ J}$$

o

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\, dt = 16\int_{0}^{\infty} e^{-6t}\, dt = \frac{8}{3}\text{ J}$$

Sin embargo, la energía total en $v_o(t)$ es más pequeña:

$$W_{o1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-4\pi}^{-2\pi} \frac{16\, d\omega}{9+\omega^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{16\, d\omega}{9+\omega^2}$$

$$= \frac{16}{\pi}\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{3\pi}\left(\tan^{-1}\frac{4\pi}{3} - \tan^{-1}\frac{2\pi}{3}\right) = 358\text{ mJ}$$

En general, se ve que un filtro pasabanda ideal permite eliminar la energía de intervalos de frecuencia prestablecidos, siempre y cuando se retenga la energía contenida en otros intervalos de frecuencia. La transformada de Fourier nos ayuda a describir en forma cuantitativa la acción de filtrado, sin evaluar en realidad $v_o(t)$, si bien se verá después que también se utiliza la transformada de Fourier para obtener la expresión relativa a $v_o(t)$ si se desea hacerlo de esa manera.

PRÁCTICA

18.10 Si $i(t) = 10e^{20t}[u(t+0.1) - u(t-0.1)]$ A, encontrar: (*a*) $\mathbf{F}_i(j0)$; (*b*) $\mathbf{F}_i(j10)$; (*c*) $A_i(10)$; (*d*) $B_i(10)$; (*e*) $\phi_i(10)$.

18.11 Encontrar la energía de 1 Ω asociada con la corriente $i(t) = 20e^{-10t}u(t)$ A en el intervalo: (*a*) $-0.1 < t < 0.1$ s; (*b*) $-10 < \omega < 10$ rad/s; (*c*) $10 < \omega < \infty$ rad/s.

Respuestas: 18.10: 3.63 A/(rad/s); $3.33\underline{/-31.7^\circ}$ A/(rad/s); 2.83 A/(rad/s); −1.749 A/(rad/s); −31.7°. 18.11: 17.29 J; 10 J; 5 J.

18.7 PARES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES DEL TIEMPO SIMPLES

Función impulso unitario

Se buscará ahora la transformada de Fourier del impulso unitario $\delta(t - t_0)$, una función que se presentó en la sección 14.4. Esto es, hay interés en las propiedades espectrales o la descripción en el dominio de la frecuencia de la singularidad de esta función. Si se utiliza la notación $\mathcal{F}\{\}$ para simbolizar la "transformada de Fourier de { }," entonces:

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-t_0)\, dt$$

De acuerdo con el análisis anterior de este tipo de integral, se tiene

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} = \cos\omega t_0 - j\,\text{sen}\,\omega_0 t$$

Esta función compleja de ω conduce a la función de densidad de energía de 1 Ω,

$$|\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}|^2 = \cos^2 \omega t_0 + \operatorname{sen}^2 n\, \omega_0 t = 1$$

Este notable resultado indica que la energía (1 Ω) por ancho de banda unitario es la unidad en *todas las frecuencias* y que la energía total en el impulso unitario es infinitamente grande. No es de sorprenderse, entonces, que se deba concluir que el impulso unitario es "impráctico", en el sentido de que no puede generarse en el laboratorio. Además, incluso si se pudiera disponer de uno de ellos, podría aparecer distorsionado después de someterse a un ancho de banda finito de cualquier instrumento de laboratorio de prueba.

Dado que existe una correspondencia única unívoca entre una función de tiempo y su transformada de Fourier, se afirma que la transformada inversa de Fourier de $e^{-j\omega t_0}$ es $\delta(t-t_0)$. Mediante el símbolo $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ de la transformada inversa, se tiene

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega t_0}\} = \delta(t-t_0)$$

De tal modo, ahora se sabe que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} e^{-j\omega t_0} d\omega = \delta(t-t_0)$$

aun cuando se fracasaría en el intento de evaluar en forma directa esta integral impropia. De manera simbólica, se debería escribir

$$\delta(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \qquad [56]$$

donde $\Leftrightarrow$ indica que las dos funciones constituyen un par de transformadas de Fourier.

Continuando con el análisis de la función impulso unitario, considérese la transformada de Fourier en esa forma:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

la cual es un impulso unitario *en el dominio de la frecuencia* localizado en $\omega = \omega_0$. Entonces $f(t)$ debe ser

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\delta(\omega-\omega_0)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

donde se utiliza la propiedad de filtrado del impulso unitario. De esta manera, ahora se debería escribir

$$\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega-\omega_0)$$

o

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\, \delta(\omega-\omega_0) \qquad [57]$$

Además, mediante un simple cambio de signo, se obtiene

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\, \delta(\omega+\omega_0) \qquad [58]$$

Claramente, la función del tiempo es compleja en las dos expresiones, [57] y [58], y no existe en el mundo real del laboratorio. Las funciones del tiempo, como $\cos \omega_0 t$ se producen con equipo de laboratorio, pero no se puede obtener una función como $e^{-j\omega_0 t}$.

Sin embargo, se sabe que

$$\cos \omega_0 t = \tfrac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

y se observa de inmediato, a partir de la definición de la transformada de Fourier, que

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} + \mathcal{F}\{f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) + f_2(t)\} \qquad [59]$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\}$$
$$= \pi\, \delta(\omega - \omega_0) + \pi\, \delta(\omega + \omega_0)$$

lo cual indica que la descripción en el dominio de la frecuencia de $\cos \omega_0 t$ muestra un *par* de impulsos, ubicados en $\omega = \pm\omega_0$. Lo anterior no sería una gran sorpresa, ya que en el primer análisis de la frecuencia compleja en el capítulo 14 se advirtió que una función senoidal del tiempo siempre se representaba mediante un par de frecuencias imaginarias localizadas en $\mathbf{s} = \pm j\omega_0$. Por lo tanto, se tiene

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \qquad [60]$$

Función forzada constante

La primera función forzada que se analizó hace muchos capítulos fue una tensión o una corriente de cd. Para determinar la transformada de Fourier de una función constante del tiempo, $f(t) = K$, el primer impulso podría sustituir esta constante en la ecuación de definición de la transformada de Fourier y evaluar la integral resultante. Si se hiciera, se encontraría una expresión indeterminada. Sin embargo, por fortuna ya se resolvió este problema, pues de acuerdo con la expresión [58],

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\, \delta(\omega + \omega_0)$$

Se puede observar que si sólo dejamos $\omega_0 = 0$, entonces el par de transformadas resultante es

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\, \delta(\omega) \qquad [61]$$

de lo cual se concluye que

$$K \Leftrightarrow 2\pi K\, \delta(\omega) \qquad [62]$$

y el problema se encuentra resuelto. El espectro de frecuencia de una función constante de tiempo consiste sólo en una componente correspondiente a $\omega = 0$, lo cual ya se sabía.

Función signo

Como otro ejemplo, obtener la transformada de Fourier de una función singular conocida como ***función signo***, sgn(t), definida por:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \qquad [63]$$

o

$$\operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$



También en este caso, si se intentara sustituir esta función del tiempo en la ecuación de definición de la transformada de Fourier, el lector se enfrentaría a una expresión indeterminada, luego de la sustitución de los límites de integración. El mismo problema surgirá cada vez que se intente obtener la transformada de Fourier de una función de tiempo, que no tiende a cero cuando $|t|$ tiende al infinito. Afortunadamente, esta situación se evita utilizando la *transformada de Laplace*, pues contiene un factor de convergencia incluido que reduce muchos de los inconvenientes asociados con la evaluación de ciertas transformadas de Fourier.

La función signo que se está considerando puede escribirse como

$$\operatorname{sgn}(t) = \lim_{a \to 0}[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

Observar que la expresión dentro de los corchetes *tiende* a cero cuando $|t|$ se vuelve muy grande. Mediante la definición de la transformada de Fourier, se obtiene

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = \lim_{a \to 0}\left[\int_0^{\infty} e^{-j\omega t}e^{-at}dt - \int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega t}e^{at}dt\right]$$

$$= \lim_{a \to 0}\frac{-j2\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{2}{j\omega}$$

La componente real es cero, dado que $\operatorname{sgn}(t)$ es una función impar de t. Por lo tanto

$$\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \qquad [64]$$

Función escalón unitario

Como un ejemplo final de esta sección, se examinará la familiar función escalón unitario, $u(t)$. Con base en la presentación hecha sobre la función signo en los párrafos precedentes, se representará el escalón unitario mediante

$$u(t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

y se obtiene el par de transformadas de Fourier

$$u(t) \Leftrightarrow \left[\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \qquad [65]$$

La tabla 18.2 presenta las conclusiones extraídas de los ejemplos explicados en esta sección, junto con unos cuantos más que no se han detallado aquí.

EJEMPLO 18.7

Utilizar la tabla 18.2 para encontrar la transformada de Fourier de la función de tiempo $3e^{-t}\cos 4t\, u(t)$.

De la penúltima entrada de la tabla, se sabe que

$$e^{-\alpha t}\cos\omega_d t\, u(t) \Leftrightarrow \frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}$$

Por lo tanto, se identifica a α como 1 y ω_d como 4 y se tiene

$$\mathbf{F}(j\omega) = (3)\frac{1 + j\omega}{(1 + j\omega)^2 + 16}$$

PRÁCTICA

18.12 Evaluar la transformada de Fourier, en $\omega = 12$ para la función de tiempo: (*a*) $4u(t) - 10\delta(t)$; (*b*) $5e^{-8t}u(t)$; (*c*) $4\cos 8t u(t)$; (*d*) $-4\operatorname{sgn}(t)$.
18.13 Encontrar $f(t)$ en $t = 2$ si $\mathbf{F}(j\omega)$ es: (*a*) $5e^{-j3\omega} - j(4/\omega)$; (*b*) $8[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$; (*c*) $(8/\omega)$ sen 5ω.

Respuestas: 18.12: $10.01\underline{/-178.1^\circ}$; $0.347\underline{/-56.3^\circ}$; $-j0.6$; $j0.667$. 18.13: 2.00; 2.45; 4.00.

TABLA 18.2 Resumen de los pares de transformadas de Fourier

$f(t)$	$f(t)$	$\mathscr{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$	$\lvert F(j\omega)\rvert$
(1) t_0 t	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	1 ω
Complejo t	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	(2π) ω_0 ω
1 −1 t	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	(π) (π) $-\omega_0$ ω_0 ω
1 t	1	$2\pi\delta(\omega)$	(2π) ω
1 −1 t	$\mathrm{sgn}(t)$	$\dfrac{2}{j\omega}$	ω
1 t	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$	(π) ω
1 t	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{\alpha+j\omega}$	$\frac{1}{\alpha}$ ω
t	$[e^{-\alpha t}\cos\omega_d t]u(t)$	$\dfrac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_d^2}$	$-\omega_d$ ω_d ω
1 $-\frac{T}{2}$ $\frac{T}{2}$ t	$u(t+\frac{1}{2}T)-u(t-\frac{1}{2}T)$	$T\dfrac{\mathrm{sen}\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$	$-\frac{2\pi}{T}$ $\frac{2\pi}{T}$ ω

18.8 TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN DEL TIEMPO PERIÓDICA GENERAL

En la sección 18.5 se subrayó que se podría demostrar que las funciones de tiempo periódicas, al igual que las no periódicas, poseen transformadas de Fourier. Se establecerá ahora este hecho sobre una base rigurosa. Considérese una función de tiempo periódica $f(t)$ con periodo T y su desarrollo en serie de Fourier, tal como se describe mediante las ecuaciones [39], [40] y [41], repetidas aquí por conveniencia:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \qquad [39]$$

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \qquad [40]$$

y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad [41]$$

Si se conoce que la transformada de Fourier de una suma es exactamente la suma de las transformadas de los términos contenidos en la suma y que $\mathbf{c}_n$ no es una función del tiempo, se expresa

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

Luego de obtener la transformada de $e^{jn\omega_0 t}$ de la expresión [57], se tiene

$$f(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0) \qquad [66]$$

Lo anterior muestra que $f(t)$ tiene un espectro discreto con impulsos ubicados en puntos sobre el eje ω dados por $\omega = n\omega_0$, $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots$ La intensidad de cada impulso es 2π veces el valor del coeficiente de Fourier correspondiente, que aparece en la forma compleja del desarrollo en serie de Fourier para $f(t)$.

Para verificar este trabajo, se verá si la transformada inversa de Fourier del lado derecho de la expresión [66] es también, en este caso, $f(t)$. La transformada inversa se escribe como

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\left[2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0)\right] d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

Dado que el término exponencial no contiene el índice n de la sumatoria, se intercambia el orden de integración y las operaciones de la sumatoria:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{j\omega t} \delta(\omega - n\omega_0)\, d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

Debido a que no es una función de la variable de integración, se considera a $\mathbf{c}_n$ como una constante. En ese caso, utilizando la propiedad de filtrado del impulso, se obtiene

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \stackrel{?}{=} f(t)$$

que es exactamente igual a la ecuación [39], el desarrollo de la serie de Fourier en forma compleja de $f(t)$. Ahora se eliminan los signos de interrogación de las ecuaciones anteriores y se establece la existencia de la transformada de Fourier para una función del tiempo periódica. Sin embargo, lo anterior no debe producir una gran sorpresa. En la última sección se evalúa la transformada de Fourier de una función coseno, que es en realidad periódica, si bien no se hizo una referencia directa a su periodicidad. Sin embargo, se recurre a un procedimiento inverso al obtener la transformada. Pero ahora se tiene una herramienta matemática con la que se obtiene la transformada de manera más directa. Para demostrar dicho procedimiento, considérese $f(t) = \cos \omega_0 t$ una vez más. Primero se evalúan los coeficientes de Fourier $\mathbf{c}_n$:

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_0 t e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

así,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

La expresión tiene valores que son distintos de cero sólo cuando $n = \pm 1$ por lo tanto, se concluye que toda la sumatoria se reduce a

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

que es precisamente la expresión que se obtuvo antes. ¡Qué alivio!

PRÁCTICA

18.14 Determinar: (*a*) $\mathcal{F}\{5 \operatorname{sen}^2 3t\}$; $\mathcal{F}\{A \operatorname{sen} \omega_0 t\}$; (c) $\mathcal{F}\{6 \cos(8t + 0.1\pi)\}$.

Respuestas: $2.5\pi[2\delta(\omega) - \delta(\omega + 6) - \delta(\omega - 6)]$; $j\pi A[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$; $[18.85\underline{/18^\circ}]\,\delta(\omega - 8) + [18.85\underline{/-18^\circ}]\,\delta(\omega + 8)$.

18.9 FUNCIÓN DEL SISTEMA Y RESPUESTA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

En la sección 15.5, el problema de determinar la salida de un sistema físico en términos de la entrada y la respuesta al impulso se resolvió mediante la integral de convolución y al trabajar primero en el dominio del tiempo. La entrada, la salida y la respuesta al impulso son funciones del tiempo. Subsecuentemente, se descubre que resultaba más conveniente llevar a cabo estas operaciones en el dominio de la frecuencia, pues la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones es sólo el producto de cada función en el dominio de la frecuencia. Siguiendo las mismas líneas, se descubre que lo mismo es cierto cuando se trabaja con las transformadas de Fourier.

Para aplicar este procedimiento, examinar la transformada de Fourier de la salida del sistema. Suponiendo de manera arbitraria que la entrada y la salida son

tensiones, se aplica la definición básica de la transformada de Fourier y se expresa la salida mediante la integral de convolución:

$$\mathcal{F}\{v_0(t)\} = \mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} v_i(t-z)h(z)\,dz\right]dt$$

donde de nuevo se supone que no se almacena energía inicial. A primera vista, tal expresión parece bastante temible, pero se reduce a un resultado que es sorpresivamente simple. Se puede mover el término exponencial dentro de la integral interna, pues no contiene a la variable de integración z. Luego se invierte el orden de integración y se obtiene

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v_i(t-z)h(z)\,dt\right]dz$$

Puesto que no es una función de t, se extrae $h(z)$ de la integral interior y se simplifica la integración con respecto a t mediante un cambio de variable, $t - z = x$:

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(x+z)} v_i(x)\,dx\right]dz$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z}h(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} v_i(x)\,dx\right]dz$$

Sin embargo, la suma está empezando ahora a abrirse paso, pues la integral interna es nada más la transformada de Fourier de $v_i(t)$. Además, no contiene términos z y se considera como una constante en cualquier integración que implique a z. Así, se puede mover esta transformada, $\mathbf{F}_i(j\omega)$, por completo fuera de los signos de integración:

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z}h(z)\,dz$$

Por fin, la última integral representa de nuevo a la vieja conocida, ¡otra transformada de Fourier!: la transformada de Fourier de la respuesta al impulso, que se designará mediante la notación $\mathbf{H}(j\omega)$. Por lo tanto, todo el trabajo se reduce a un simple resultado:

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\mathcal{F}\{h(t)\}$$

Éste es otro resultado importante: define la *función del sistema* $\mathbf{H}(j\omega)$ como la proporción entre la transformada de Fourier de la función de respuesta y la transformada de Fourier de la función forzada. Además, la función del sistema y la respuesta al impulso constituyen un par de transformadas de Fourier:

$$h(t) \Leftrightarrow \mathbf{H}(j\omega) \qquad [67]$$

El desarrollo que se realizó en los párrafos anteriores sirve también para confirmar el enunciado general de que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones de tiempo es igual al producto de sus transformadas de Fourier,

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathbf{F}_f(j\omega)\mathbf{F}_g(j\omega)} \qquad [68]$$

Para recapitular, si se conocen las transformadas de Fourier de la función forzada y de la respuesta al impulso, la transformada de Fourier de la función de respuesta se obtiene como su producto. El resultado es una descripción de la función de respuesta en el dominio de la frecuencia; la descripción en el dominio del tiempo de esta función se logra tomando simplemente la transformada inversa de Fourier. De ese modo se verá que el proceso de la convolución en el dominio del tiempo equivale a la más o menos simple operación de multiplicación en el dominio de la frecuencia.

Los comentarios anteriores podrán hacer surgir la pregunta, una vez más, respecto de las razones por las cuales se elige trabajar siempre en el dominio del tiempo, aunque se debe recordar, también siempre, que rara vez se obtiene algo a cambio de nada. Un poeta una vez dijo: *"Nuestra más sincera risa/la cargamos con un poco de dolor"*.[2] En este caso, el dolor es provocado por la dificultad ocasional de obtener la transformada inversa de Fourier de una función de respuesta, debido a razones de complejidad matemática. Por otra parte, una sencilla computadora puede convolucionar dos funciones del tiempo con magnífica velocidad. Respecto de ello, también se obtiene una TRF (transformada rápida de Fourier) con bastante rapidez, como se verá en el siguiente ejemplo de MATLAB. En consecuencia, no hay una ventaja clara entre trabajar en el dominio del tiempo y hacerlo en el dominio de la frecuencia. Debe tomarse una decisión cada vez que surge un nuevo problema, y ella debe basarse en la información disponible y en las facilidades de cómputo que se tengan a mano.

Considerar una función forzada de la forma

$$v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

y una respuesta al impulso unitario definida por

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

Primero se obtienen las transformadas de Fourier correspondientes. La función forzada es la diferencia entre dos funciones de escalón unitario. Ambas funciones son idénticas, excepto en que una se inicia 1 s después de la otra. Se evaluará la respuesta debida a $u(t)$; la respuesta debida a $u(t-1)$) es la misma, aunque retrasada 1 s en el tiempo. La diferencia entre las dos respuestas parciales será la respuesta total debida a $v_i(t)$.

La transformada de Fourier de $u(t)$ se obtuvo en la sección 18.7:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

La función del sistema se obtiene tomando la transformada de Fourier de $h(t)$, que se presenta en la tabla 18.2:

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathbf{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{2e^{-t}u(t)\} = \frac{2}{1+j\omega}$$

La transformada inversa del producto de estas dos funciones da como resultado esa componente de $v_o(t)$ causada por $u(t)$,

$$v_{o1}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi\delta(\omega)}{1+j\omega} + \frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\}$$

Al utilizar la propiedad de filtrado del impulso unitario, la transformada inversa del primer término es una constante exactamente igual a la unidad. De tal modo,

$$v_{o1}(t) = 1 + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\}$$

El segundo término contiene un producto de términos en el denominador, cada uno de la forma $(\alpha + j\omega)$; además, su transformada inversa se determina con mayor facilidad recurriendo a la expansión en fracciones parciales que se desarrolló en la sección 4.5. Se debe seleccionar una técnica para obtener un de-

(2) P.B. Shelley, "To a Skylark", 1821.

sarrollo en fracciones parciales, que tenga una gran ventaja, que funcionará siempre, aunque suelen disponerse métodos más rápidos para la mayor parte de las situaciones. Se asigna una cantidad desconocida en el numerador de cada fracción, en este caso dos cantidades,

$$\frac{2}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{1+j\omega}$$

y luego se sustituye un número correspondiente de valores simples de $j\omega$. Aquí, sea $j\omega = 1$:

$$1 = A + \frac{B}{2}$$

y luego sea $j\omega = -2$:

$$1 = -\frac{A}{2} - B$$

Esto lleva a $A = 2$ y $B = -2$. De tal modo que

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega} - \frac{2}{1+j\omega}\right\} = \text{sgn}(t) - 2e^{-t}u(t)$$

por lo que

$$\begin{aligned} v_{o1}(t) &= 1 + \text{sgn}(t) - 2e^{-t}u(t) \\ &= 2u(t) - 2e^{-t}u(t) \\ &= 2(1 - e^{-t})u(t) \end{aligned}$$

Se concluye que $v_{o2}(t)$, la componente de $v_o(t)$ obtenida por $u(t-1)$, es

$$v_{o2}(t) = 2(1 - e^{-(t-1)})u(t-1)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_{o1}(t) - v_{o2}(t) \\ &= 2(1 - e^{-t})u(t) - 2(1 - e^{-t+1})u(t-1) \end{aligned}$$

Las discontinuidades en $t = 0$ y $t = 1$ indican una separación en tres intervalos de tiempo:

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2(1 - e^{-t}) & 0 < t < 1 \\ 2(e - 1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

PRÁCTICA

18.15 La respuesta al impulso de cierta red lineal es $h(t) = 6e^{-20t}u(t)$. La señal de entrada corresponde a $3e^{-6t}u(t)$ V. Determinar: (*a*) $\mathbf{H}(j\omega)$; (*b*) $\mathbf{V}_i(j\omega)$; (*c*) $V_o(j\omega)$; (*d*) $v_o(0.1)$; (*e*) $v_o(0.3)$; (*f*) $v_{0,\text{máx}}$.

Respuestas: $6/(20 + j\omega)$; $3/(6 + j\omega)$; $18/[(20 + j\omega)(6 + j\omega)]$; 0.532 V; 0.209 V; 0.5372.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

El material que se presenta en este capítulo constituye el cimiento de muchos campos de estudios avanzados, entre los que se incluyen el procesamiento de señales, las comunicaciones y los controles. Sólo se pueden presentar algunos de los conceptos básicos dentro del contexto de un libro de circuitos introductorio, aunque incluso en este punto se aplica cierto grado del poder del análisis basado en Fourier. Como un primer ejemplo, considérese el circuito de amp op de la figura 18.15, construido en PSpice mediante un amplificador operacional.

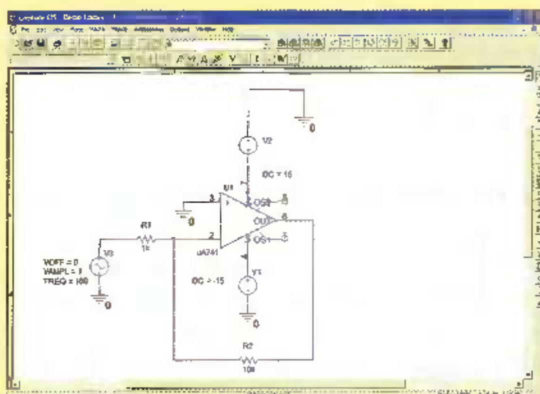


FIGURA 18.15 Circuito amplificador inversor con una ganancia de tensión de −10, accionado por una entrada senoidal que opera a 100 Hz.

El circuito tiene una ganancia de tensión de −10, y por ello se esperaría una salida senoidal con 10 V de amplitud. En realidad, esto es lo que se obtiene de un análisis transitorio del circuito, como se muestra en la figura 18.16.

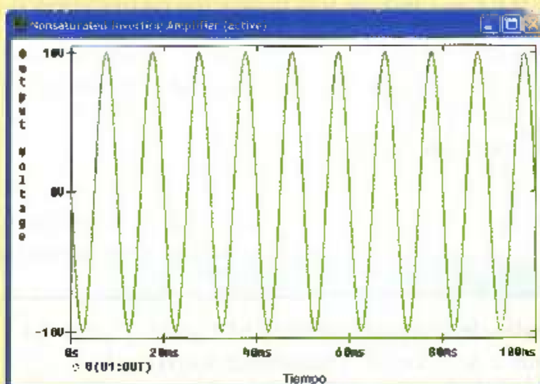


FIGURA 18.16 Tensión de salida simulada del circuito amplificador que se muestra en la figura 18.15.

PSpice permite determinar el espectro de frecuencia de la tensión de salida, a través de lo que se conoce como la transformada rápida de Fourier (TRF), una aproximación en tiempo discreto a la transformada exacta de Fourier de la señal. A partir de Probe, se selecciona **Fourier** bajo el menú **Trace**; el resultado se presenta en la figura 18.17. Como se esperaba, el espectro de línea de la tensión de salida de este circuito amplificador consiste en una sola señal a una frecuencia de 100 Hz.

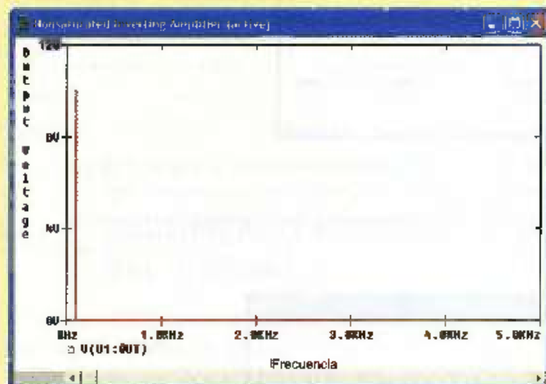


FIGURA 18.17 Aproximación discreta de la transformada de Fourier de la figura 18.16.

A medida que aumenta la tensión de entrada, la salida del amplificador se aproxima a la condición de saturación determinada por las fuentes de tensión de cd positiva y negativa (±15 V en este ejemplo). Este comportamiento es evidente en el resultado de la simulación que se presenta en la figura 18.18, que corresponde a una magnitud de la tensión de entrada de 1.8 V. Una característica de interés fundamental es que la forma de onda de la tensión de salida ya no es una senoide pura. Como consecuencia, se espera que aparezcan valores diferentes de cero en las frecuencias de las armónicas en el

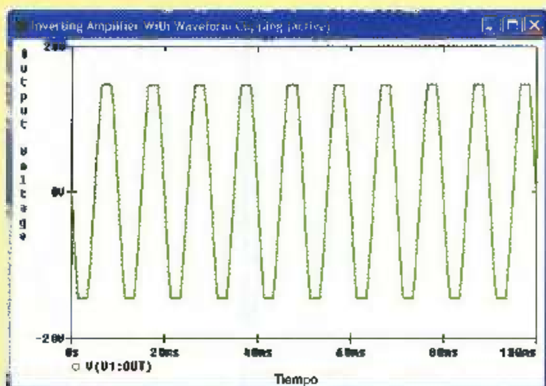


FIGURA 18.18 Espectro de frecuencia de la forma de onda que aparece en la figura 18.18, que muestra la presencia de varias componentes armónicas además de la frecuencia fundamental. El ancho finito de las señales es un artefacto de la discretización numérica (se utilizó un conjunto de valores discretos de tiempo).

(Continúa en la siguiente página)

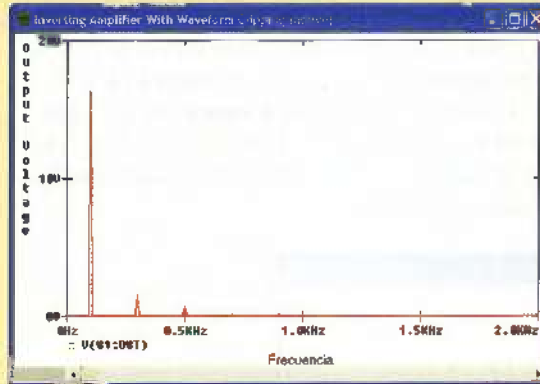
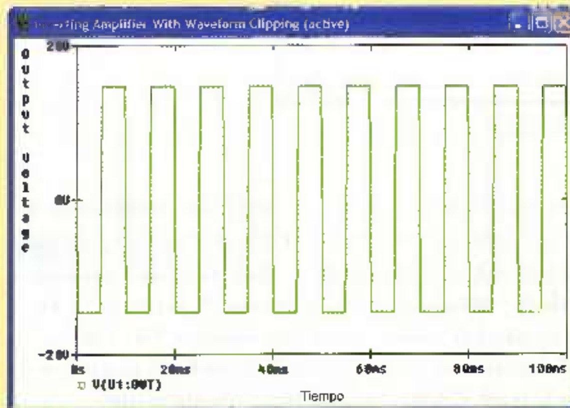
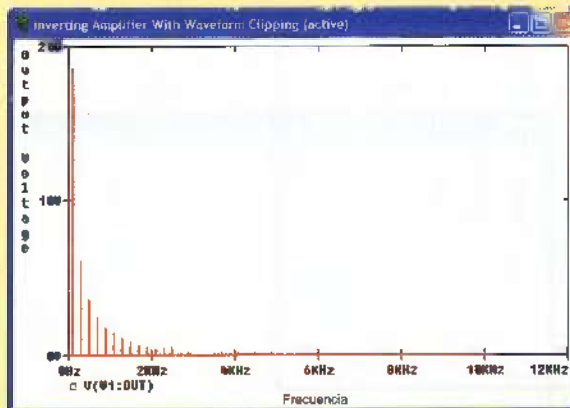


FIGURA 18.19 Espectro de frecuencia de la forma de onda que aparece en la figura 18.18, que muestra la presencia de varias componentes armónicas además de la frecuencia fundamental. El ancho finito de las señales es un artefacto de la discretización numérica (se utilizó un conjunto de valores discretos de tiempo).



(*a*)



(*b*)

FIGURA 18.20 (*a*) Se pueden observar los efectos severos de la saturación del amplificador en la respuesta simulada a una entrada de 15 V. (*b*) La TRF de la forma de onda muestra un incremento significativo de la fracción de energía presente en las armónicas, contrariamente a la correspondiente de la frecuencia fundamental de 100 Hz.

espectro de frecuencia de la función, como en el caso de la figura 18.19. El efecto de alcanzar el punto de saturación en el circuito amplificador representa una distorsión en la señal; si se conecta a la bocina, no se escuchará una forma de onda "limpia" de 100 Hz, sino que se escuchará una superposición de formas de onda que incluye no sólo la frecuencia fundamental de 100 Hz, sino también las componentes armónicas significativas a 300 y 500 Hz. La distorsión adicional de la forma de onda aumentará la cantidad de energía contenida en las frecuencias armónicas, por lo que se harán más significativas las contribuciones de las armónicas de más alta frecuencia. Lo anterior resulta evidente en los resultados de la simulación de las figuras 18.20*a* y *b*, los cuales muestran la tensión de salida en los dominios del tiempo y de la frecuencia, respectivamente.

18.10 SIGNIFICADO FÍSICO DE LA FUNCIÓN DEL SISTEMA

En esta sección se tratará de vincular varios aspectos de la transformada de Fourier con el trabajo que se realizó en los capítulos anteriores.

Dada una red lineal general de dos puertos N sin ningún almacenamiento de energía inicial, se suponen funciones con forzamiento y respuesta senoidales, dadas arbitrariamente como tensiones, según se muestra en la figura 18.21. Se deja que la tensión de entrada sea sólo $A\cos(\omega_x t + \theta)$, y la salida puede describirse en términos generales como $v_o(t) = B\cos(\omega_x t + \phi)$, donde la amplitud B y el ángulo de fase ϕ son funciones de ω_x. En forma fasorial, se expresan las funciones forzada y de respuesta como $\mathbf{V}_i = Ae^{j\theta}$ y $\mathbf{V}_o = Be^{j\phi}$. La razón entre la respuesta fasorial y la función forzada fasorial es un número complejo que está en función de ω_x:

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \mathbf{G}(\omega_x) = \frac{B}{A}e^{j(\phi-\theta)}$$

donde B/A es la amplitud de $\mathbf{G}$ y $\phi - \theta$ es su ángulo de fase. Dicha función de transferencia $\mathbf{G}(\omega_x)$ podría obtenerse en el laboratorio variando ω_x sobre un gran intervalo de valores y midiendo la amplitud B/A y la fase $\phi - \theta$ para cada valor de ω_x. Si se grafican en esas condiciones cada uno de estos parámetros como una función de la frecuencia, el par de curvas resultantes describiría por completo la función de transferencia.

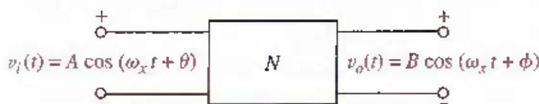


FIGURA 18.21 Se puede recurrir al análisis senoidal para determinar la función de transferencia $\mathbf{H}(j\omega_x) = (B/A)e^{j(\phi-\theta)}$, donde B y ϕ son funciones de ω_x.

Se dejarán por ahora estos comentarios lejos de la mente del lector, ya que se examinará un aspecto diferente del mismo problema de análisis.

En el circuito con la entrada y la salida senoidal que se muestran en la figura 18.21, ¿cuál es la función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema? Para responder esta pregunta, se comienza con la definición de $\mathbf{H}(j\omega)$ como la proporción (o razón) de las transformadas de Fourier de la salida y la entrada. Ambas funciones incluyen la forma

funcional $\cos(\omega_x t + \beta)$, cuya transformada de Fourier aún no se ha evaluado, aunque se puede trabajar con $\cos \omega_x t$. La transformada que se necesita es

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t + \beta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \cos(\omega_x t + \beta)\, dt$$

Si se lleva a cabo la sustitución $\omega_x t + \beta = \omega_x \tau$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t + \beta)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau + j\omega\beta/\omega_x} \cos \omega_x \tau\, d\tau \\ &= e^{j\omega\beta/\omega_x} \mathcal{F}\{\cos \omega_x t\} \\ &= \pi e^{j\omega\beta/\omega_x}[\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]\end{aligned}$$

lo cual es un nuevo par de transformadas de Fourier

$$\cos(\omega_x t + \beta) \Leftrightarrow \pi e^{j\omega\beta/\omega_x}[\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)] \qquad [69]$$

que se utiliza ahora para evaluar la función deseada del sistema:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(j\omega) &= \frac{\mathcal{F}\{B\cos(\omega_x t + \phi)\}}{\mathcal{F}\{A\cos(\omega_x t + \theta)\}} \\ &= \frac{\pi B e^{j\omega\phi/\omega_x}[\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]}{\pi A e^{j\omega\theta/\omega_x}[\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]} \\ &= \frac{B}{A} e^{j\omega(\phi - \theta)/\omega_x}\end{aligned}$$

Se recuerda la expresión de $\mathbf{G}(\omega_x)$,

$$\mathbf{G}(\omega_x) = \frac{B}{A} e^{j(\phi - \theta)}$$

donde B y ϕ se evalúan en $\omega = \omega_x$ además, se observa que al evaluar $\mathbf{H}(j\omega)$ en $\omega = \omega_x$ se obtiene

$$\mathbf{H}(\omega_x) = \mathbf{G}(\omega_x) = \frac{B}{A} e^{j(\phi - \theta)}$$

Puesto que no hay nada especial acerca del subíndice x se concluye que la función del sistema y la función de transferencia son idénticas:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{G}(\omega) \qquad [70]$$

El hecho de que un argumento sea ω mientras que el otro se indica mediante $j\omega$ no tiene importancia y es arbitrario; la j sólo posibilita una comparación más directa entre las transformadas de Fourier y de Laplace.

La ecuación [70] representa una conexión directa entre las técnicas de la transformada de Fourier y el análisis del estado senoidal permanente. El trabajo previo de análisis del estado senoidal permanente mediante fasores fue más bien un caso especial de las técnicas más generales del análisis de la transformada de Fourier. Resultó "especial" en el sentido de que las entradas y las salidas eran senoides, en tanto que el uso de las transformadas de Fourier y las funciones del sistema permiten manejar funciones y respuestas forzadas no senoidales.

Por lo tanto, para determinar la función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema relativa a una red, sólo se requiere determinar la función de transferencia senoidal correspondiente como una función de ω (o $j\omega$).

EJEMPLO 18.8

Determinar la tensión en los extremos del inductor del circuito que se muestra en la figura 18.22*a* cuando la tensión de entrada es un pulso de decaimiento exponencial simple.

Es necesaria la función del sistema, pero no es necesario aplicar un impulso, encontrar la respuesta de impulso y luego determinar la transformada inversa. Mejor se usará la ecuación [70] para obtener la función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema, bajo el supuesto de que las tensiones de entrada y de salida son senoides descritas por sus fasores correspondientes, como se muestra en la figura 18.22*b*. Mediante la división de tensión, se tiene

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{j2\omega}{4 + j2\omega}$$

La transformada de la función forzada es:

$$\mathcal{F}\{v_i(t)\} = \frac{5}{3 + j\omega}$$

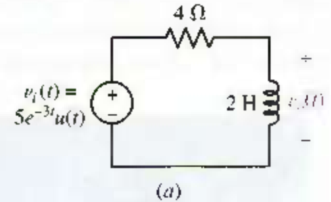
y por ello la transformada de $v_o(t)$ se indica como

$$\mathcal{F}\{v_o(t)\} = \mathbf{H}(j\omega)\mathcal{F}\{v_i(t)\}$$
$$= \frac{j2\omega}{4 + j2\omega}\frac{5}{3 + j\omega}$$
$$= \frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega}$$

donde las fracciones parciales que aparecen en el último paso ayudan a determinar la transformada inversa de Fourier:

$$v_o(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega}\right\}$$
$$= 15e^{-3t}u(t) - 10e^{-2t}u(t)$$
$$= 5(3e^{-3t} - 2e^{-2t})u(t)$$

El problema se resuelve sin molestias, convoluciones o ecuaciones diferenciales.



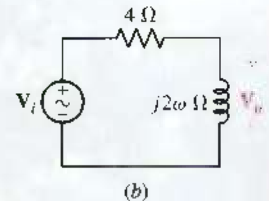


FIGURA 18.22 (*a*) Se desea la respuesta $v_o(t)$ causada por $v_i(t)$. (*b*) La función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema se determinaría mediante el análisis de estado permanente senoidal: $\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$.

PRÁCTICA

18.16 Utilizar las técnicas de la transformada de Fourier en el circuito de la figura 18.23 para determinar: $i_1(t)$ en $t = 1.5$ ms si i_s es igual a: (*a*) $\delta(t)$ A; (*b*) $u(t)$ A; (*c*) $\cos 500t$ A.

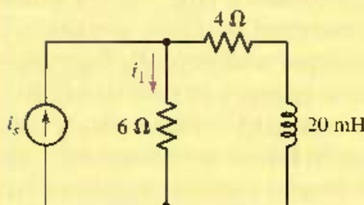


FIGURA 18.23

Respuestas: −141.7 A; 0.683 A; 0.308 A.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Procesamiento de imágenes

A pesar del enorme progreso que se ha logrado en cuanto al desarrollo de una comprensión total de la función del músculo, aún existen muchas interrogantes. Se ha investigado mucho en este campo utilizando músculo esquelético de vertebrados, en particular con el *sartorius* o músculo de la pierna de la rana (figura 18.24).



FIGURA 18.24 Cara que sólo podría amar un biólogo. (© Geostock/Getty Images.)

De la gran cantidad de técnicas analíticas que utilizan los científicos, una de las más importantes es la microscopía electrónica. La figura 18.25 muestra una micrografía electrónica de tejido muscular de la rana sartorius, seccionado de tal manera que resalta el arreglo uniforme de *myosin*, una proteína contráctil de tipo filamentario. Es de gran interés para los biólogos estructurales la periodicidad y el desorden de estas proteínas en una gran área del tejido muscular. Con el fin de desarrollar un modelo para mostrar estas características, se prefiere utilizar un método numérico, mediante el cual se pueda automatizar el análisis de dichas imágenes. Sin embargo, como se puede observar en la figura, la imagen que genera el microscopio electrónico puede contaminarse por un ruido de fondo de alto nivel, lo que hace errática la identificación automática de los filamentos de myosin.

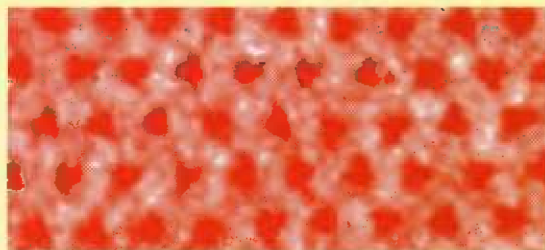


FIGURA 18.25 Micrografía electrónica de una región de tejido muscular de la rana sartorius. Se utilizó falso color a fin de tener una mayor claridad.

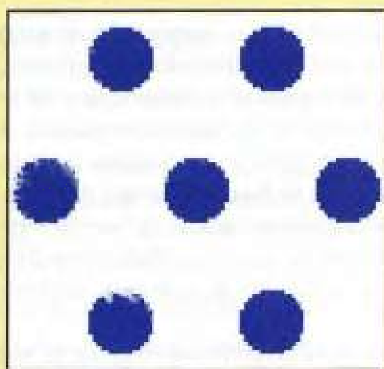
Presentadas con el objeto de ayudar en el análisis de circuitos lineales variantes en el tiempo, las técnicas basadas en Fourier de este capítulo son, en realidad, métodos generales muy poderosos que se aplican en muchas otras situaciones, entre las cuales el campo del *procesamiento de imágenes* hace un uso extensivo de las técnicas de Fourier, especialmente a través de la transformada rápida de Fourier (TRF) y métodos numéricos relacionados. La imagen de la figura 18.25 se puede describir mediante una función espacial $f(x, y)$ donde $f(x, y) = 0$ corresponde al blanco, $f(x, y) = 1$ corresponde al rojo y (x, y) describe una ubicación del pixel en la imagen. Definiendo una función de filtro $h(x, y)$ que tenga la apariencia de la figura 18.26*a*, la operación de convolución

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

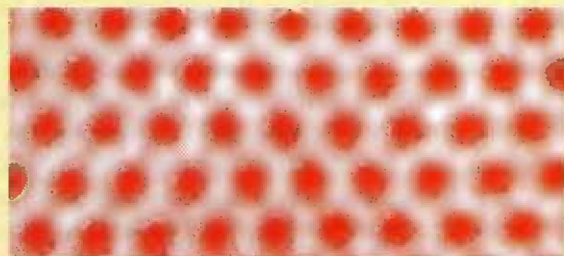
da como resultado la imagen de la figura 18.26*b* en la que los filamentos de myosin (que se ven en el extremo) se pueden identificar de una manera más clara.

Epílogo

De regreso a la ecuación [70], la identidad entre la función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema y la función de transferencia de estado senoidal permanente $\mathbf{G}(\omega)$, tal vez se considere ahora la función del sistema como el cociente entre el fasor de salida y el fasor de entrada. Bajo el supuesto de que se mantiene la amplitud del fasor de entrada en la unidad y el ángulo de fase en cero, entonces el fasor de salida es $\mathbf{H}(j\omega)$. En estas condiciones, si se registra la amplitud y la fase de salida como funciones de ω, para toda ω, se registra la función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema como una función de ω, para toda ω. De este modo, se examina la respuesta del sistema bajo la condición de que un número infinito de senoides, todas con amplitud unitaria y fase cero, se aplicó en forma sucesiva en la entrada. Supóngase ahora que la entrada es un simple impulso unitario y considerando la respuesta al impulso $h(t)$.



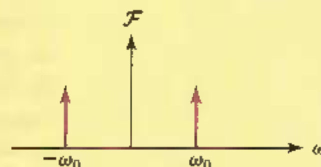
(a)



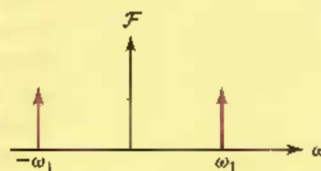
(b)

■ **FIGURA 18.26** (a) Filtro espacial con simetría hexagonal. (b) Imagen después de haber sido convolucionada y de habérsele aplicado la transformada inversa y discreta de Fourier, que muestra una reducción del ruido de fondo.

En la práctica, este procesamiento de análisis se lleva a cabo en el dominio de la frecuencia, donde se calcula la TRF de f y h y las matrices resultantes se multiplican entre sí. La operación inversa de la TRF genera la imagen filtrada de la figura 18.26*b*. ¿Por qué esta convolución es igual a la operación de filtrado? El arreglo filamentario del myosin posee una simetría hexagonal, al igual que la función de filtrado $h(x, y)$ —lo cual indica que, de alguna manera, tanto el arreglo filamentario como la función de filtrado poseen las mismas frecuencias espaciales. La convolución de f con h genera un reforzamiento del patrón hexagonal dentro de la imagen original y la remoción de pixeles de ruido (los cuales no poseen la simetría hexagonal). Lo anterior puede comprenderse de manera cualitativa si se modela una fila horizontal de la figura 18.25, como una función senoidal $f(x) = \cos \omega_0 t$, que tiene la transformada de Fourier que se muestra en la figura 18.27*a* un par acoplado de funciones impulso separadas una distancia de $2\omega_0$. Si se convoluciona esta función con la función de un filtro $h(x) = \cos \omega_1 t$, cuya transformada de Fourier se muestra en la figura 18.27*b*, se obtiene cero si $\omega_1 \neq \omega_0$; las frecuencias (periodicidades) de las dos funciones no coinciden. Si, en lugar de eso, se selecciona una función de filtro con la misma frecuencia de $f(x)$, la convolución tendrá un valor diferente de cero en $\omega = \pm\omega_0$.



(a)



(b)

■ **FIGURA 18.27** (a) Transformada de Fourier de $f(x) = \cos \omega_0 t$. (b) Transformada de Fourier de $h(x) = \cos \omega_1 t$.

¿La información que se examinó en la unidad se diferencia en algo de la que se acaba de obtener? La transformada de Fourier del impulso unitario es una constante igual a la unidad, lo que indica que están presentes todas las componentes de frecuencia, con la misma magnitud y con fase cero. La respuesta del sistema es la suma de las respuestas de todas estas componentes. El resultado podría verse en la salida sobre un osciloscopio de rayos catódicos. Resulta evidente que la función del sistema y la función de respuesta al impulso contienen información equivalente en cuanto a la respuesta del sistema.

Por lo tanto, se cuenta con dos métodos distintos para describir la respuesta de un sistema a una función forzada general: uno es la descripción en el dominio del tiempo y el otro la descripción en el dominio de la frecuencia. Al trabajar en el dominio del tiempo, se convoluciona la función forzada con la respuesta al

impulso del sistema para obtener la función de respuesta. Como se vio al considerar por primera vez la convolución, este procedimiento se interpretaría considerando a la entrada como una serie de impulsos de intensidad y de tiempos de aplicación diferentes; la salida que resulta es una serie de respuestas al impulso.

Sin embargo, en el dominio de la frecuencia, se determina la respuesta multiplicando la transformada de Fourier de la función forzada por la función del sistema. En este caso, se interpreta la transformada de la función forzada como un espectro de frecuencia o un continuo de senoides. Multiplicando lo anterior por la función del sistema se obtiene la función de respuesta, también como un conjunto continuo de senoides.

Ya sea que se opte por considerar la salida como un continuo de respuestas al impulso o como un conjunto continuo de respuestas senoidales, la linealidad de la red y el principio de superposición permiten determinar la salida total como una función de tiempo, al sumar sobre todas las frecuencias (la transformada inversa de Fourier), o como una función de frecuencia al sumar sobre todos los tiempos (la transformada de Fourier).

Desafortunadamente, ambas técnicas tienen algunas dificultades o limitantes asociadas con su aplicación. Al utilizar la convolución, la integral misma, muchas veces, puede ser bastante difícil de evaluar cuando se presentan funciones forzadas o funciones de impulso complicadas. Además, desde el punto de vista experimental, en realidad no se puede medir la respuesta al impulso de un sistema, debido a que no se puede generar un impulso. Incluso si se aproxima el impulso mediante un impulso estrecho de elevada amplitud, tal vez se llevaría al sistema a la saturación y fuera de su intervalo de operación lineal.

Con respecto al dominio de la frecuencia, se encuentra una limitante absoluta en el sentido de que quizá se formulen fácilmente hipótesis relativas a las funciones forzadas que al lector le gustaría aplicar de manera teórica, pero que no poseen transformadas de Fourier. Además, si es de interés encontrar la descripción en el dominio del tiempo de la función de respuesta, es necesario evaluar una transformada inversa de Fourier, pero algunas de tales inversiones resultan demasiado complicadas.

Por último, ninguna de estas técnicas ofrece un método muy conveniente para manejar las condiciones iniciales. Para esto, la transformada de Laplace resulta muy superior.

El beneficio más grande que se deriva del uso de la transformada de Fourier surge debido a la abundancia de información útil que proporciona acerca de las propiedades espectrales de una señal, en particular de la energía o potencia por ancho de banda unitario. Parte de esta información se obtiene también con facilidad mediante la transformada de Laplace; se debe dejar un análisis detallado de los méritos relativos de cada una para cursos más avanzados de señales y sistemas.

Ahora bien, ¿por qué se expone todo esto ahora? La mejor respuesta tal vez resida en que estas poderosas técnicas pueden complicar mucho la solución de problemas simples y tender a oscurecer la interpretación física del desempeño de redes más simples. Por ejemplo, si sólo es de interés la respuesta forzada, no tiene mucho caso utilizar la transformada de Laplace y obtener tanto la respuesta forzada como la natural, después de llevar a cabo una difícil operación de transformada inversa.

Ahora bien, se podría continuar, pero todas las cosas buenas tienen que llegar a un final. Se desea al lector la mejor de las suertes en sus estudios futuros.

RESUMEN Y REPASO

- Las frecuencias armónicas de una senoide con frecuencia fundamental ω_0 son $n\omega_0$, donde n es un entero.
- El teorema de Fourier establece que dada una función $f(t)$ que satisface ciertas propiedades fundamentales, podría representarse por la serie infinita $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$, donde $a_0 = (1/T)\int_0^T f(t)\,dt$, $a_n = (2/T)\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$, y $b_n = (2/T)\int_0^T f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt$.
- Una función $f(t)$ posee simetría *par* si $f(t) = f(-t)$.
- Una función $f(t)$ tiene simetría *impar* si $f(t) = -f(-t)$.
- Una función $f(t)$ muestra simetría *de media onda* si $f(t) = -f(t - \frac{1}{2}T)$.
- La serie de Fourier de una función par está compuesta sólo por una constante y funciones coseno.
- La serie de Fourier de una función impar se forma sólo por una constante y funciones seno.
- La serie de Fourier de cualquier función que posee simetría de media onda contiene sólo armónicas impares.
- Se podría expresar también la serie de Fourier de una función en forma compleja o exponencial, donde $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}$ y $\mathbf{c}_n = (1/T)\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$.
- La transformada de Fourier permite representar funciones variables en el tiempo en el dominio de la frecuencia, de una manera similar a la de la transformada de Laplace. Las ecuaciones de definición son $\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)\,dt$ y $f(t) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathbf{F}(j\omega)\,d\omega$.

LECTURAS ADICIONALES

Un tratamiento muy ameno del análisis de Fourier puede encontrarse en

A. Pinkus y S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Por último, para aquellos interesados en aprender más acerca de la investigación sobre músculos, incluyendo la microscopía electrónica de tejidos, se puede encontrar un excelente tratamiento en

J. Squire, *The Structural Basis of Muscular Contraction*. Nueva York: Plenum Press, 1981.

EJERCICIOS

18.1 Forma trigonométrica de la serie de Fourier

1. Encontrar las primeras cinco frecuencias armónicas ($n = 1 - 5$) de las formas de onda siguientes: (*a*) $v_1(t) = 77\cos(5t)$ V; (*b*) $i(t) = 32\operatorname{sen}(5t)$ nA; (*c*) $q(t) = 4\cos(90t - 85°)$ C.
2. Establecer el periodo y la frecuencia fundamental de cada una de las formas de onda siguientes: (*a*) $q(t) = 8.5\cos(2\pi t)$ nC; (*b*) $v(t) = 9\operatorname{sen}(5.95t)$ MV; (*c*) $i(t) = 1.113\cos(t - 45°)$ pA.
3. Sea $v(t) = 3 - 3\cos(100\pi t - 40°) + 4\operatorname{sen}(200\pi t - 10°) + 2.5\cos 300\pi t$ V. Determinar: (*a*) V_{av}; (*b*) V_{eff}; (*c*) T; (*d*) $v(18\text{ ms})$.
4. (*a*) Elaborar un dibujo de la forma de onda de tensión $v(t) = 2\cos 2\pi t + 1.8\operatorname{sen} 4\pi t$ en el intervalo $0 < t < T$. (*b*) Calcular el valor máximo de $v(t)$ en este intervalo. (*c*) Calcular la magnitud del valor más negativo de $v(t)$ en este intervalo.

5. Calcular a_0 en las funciones siguientes: (*a*) 5 cos 100*t*; (*b*) 5 sen 100*t*; (*c*) 5 + cos 100*t*; (*d*) 5 + sen 100*t*.
6. Calcular a_0 en las funciones siguientes: (*a*) $100\cos(5t - 18°)$; (*b*) $100 \text{ sen}(5t - 18°)$; (*c*) $100 + 100\cos(5t - 18°)$; (*d*) $100 + 100 \text{ sen}(5t - 18°)$.
7. Calcular a_0, a_1, a_2, b_1 y b_2 en $f(t) =$ (*a*) 3; (*b*) 3 cos 3*t*; (*c*) 3 sen 3*t*; (*d*) $3\cos(3t - 10°)$.
8. Calcular a_0, a_1, a_2, b_1 y b_2 en $f(t) = 5u(t-1) - 5u(t-2) + 5u(t-3) - 5u(t-4) + \ldots$.
9. Calcular a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y b_3 en $g(t) = 2u(t) - 2u(t-2) + 2u(t-3) - 2u(t-5) + \ldots$.
10. Determinar los valores numéricos de a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y b_3 de $h(t) = -3 + 8 \text{ sen } 2t + f(t)$, donde $f(t) = u(t-1) - u(t-2) + u(t-3) - u(t-4) + \ldots$.
11. La forma de onda que se muestra en la figura 18.28 es periódica con $T = 10$ s. Determinar: (*a*) el valor promedio; (*b*) el valor eficaz; (*c*) el valor de a_3.

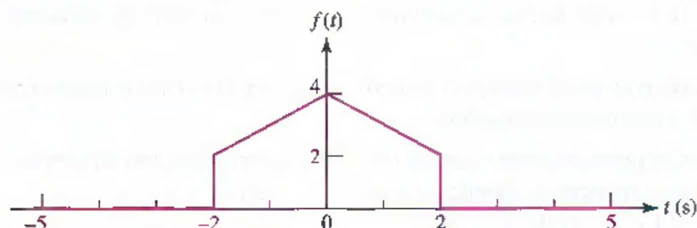


FIGURA 18.28

12. En el caso de la forma de onda periódica de la figura 18.29, proporcionar: (*a*) *T*; (*b*) f_0; (*c*) ω_0; (*d*) a_0; (*e*) b_2.

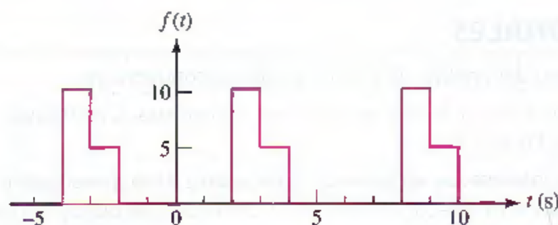


FIGURA 18.29

13. Determinar a_3, b_3 y $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ para la forma de onda de la figura 18.29.
14. Obtener la forma trigonométrica de la serie de Fourier, dado el valor de *T*, y determinar el valor promedio de cada una de las funciones periódicas del tiempo: (*a*) $3.8\cos^2 80\pi t$; (*b*) $3.8\cos^3 80\pi t$; (*c*) $3.8\cos 79\pi t - 3.8 \text{ sen } 80\pi t$.
15. Una función periódica del tiempo con $T = 2$ s tiene los siguientes valores: $f(t) = 0$, para $-1 < t < 0$; $f(t) = 1$, para $0 < t < t_1$; y $f(t) = 0$, para $t_1 < t < 1$. (*a*) ¿Qué valor de t_1 maximizará b_4? (*b*) Determinar $b_{4,\text{máx}}$.
16. Considerar que una señal eléctrica se describe mediante $g(t) = -5 + 8\cos 10t - 5\cos 15t + 3\cos 20t - 8 \text{ sen} 10t - 4 \text{ sen} 15t + 2 \text{ sen } 20t$. Calcular: (*a*) el periodo de $g(t)$; (*b*) el ancho de banda (en hertz) de la señal; (*c*) el valor promedio de $g(t)$; (*d*) el valor eficaz de $g(t)$; (*e*) la amplitud discreta y los espectros de fase de la señal.
17. La forma de onda del ejemplo 18.1 (que se muestra en la figura 18.2) es la salida de un rectificador de media onda. Si las medias ondas ocupan todos los intervalos $-0.5 < t < -0.3$, $-0.3 < t < -0.1$, $-0.1 < t < 0.1$, y así sucesivamente, entonces la salida es la de un rectificador de onda completa. Determinar la serie de Fourier trigonométrica para este caso.

18.2 Uso de la simetría

18. (a) Especificar los tipos de simetría presentes en la forma de onda de la figura 18.30. (b) ¿Cuál de las a_n, b_n o a_0 son cero? (c) Calcular a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 y b_3.

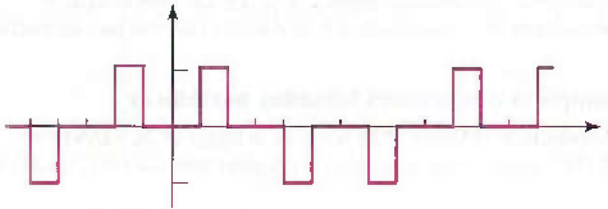


FIGURA 18.30

19. Se sabe que la función periódica $y(t)$ tiene simetría impar y que el espectro de amplitud se muestra en la figura 18.31. Si todas las a_n y b_n son no negativas: (a) determinar la serie de Fourier de $y(t)$; (b) calcular el valor eficaz de $y(t)$; (c) calcular el valor de $y(0.2 \text{ ms})$.

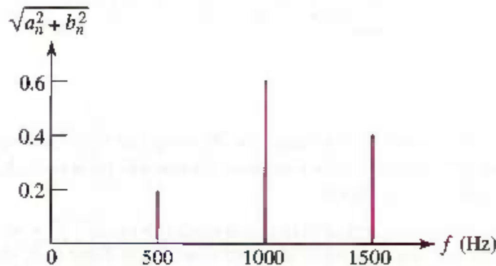


FIGURA 18.31

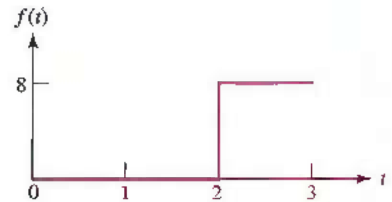


FIGURA 18.32

20. Emplear la forma de onda dada por $f(t)$ para el intervalo $0 < t < 3$ de la figura 18.32, a fin de dibujar una nueva función $g(t)$ que sea igual a $f(t)$ para $0 < t < 3$ pero que también tiene: (a) $T = 6$ y simetría par; (b) $T = 6$ y simetría impar; (c) $T = 12$, y simetría par y de media onda; (d) $T = 12$, y simetría impar y de media onda. (e) Evaluar a_5 y b_5 en cada caso.

21. La forma de onda que se muestra en la figura 18.33 se repite cada 4 ms. (a) Determinar la componente de dc a_0. (b) Especificar los valores de a_1 y b_1. (c) Determinar una función $f_x(t)$ que sea igual a $f(t)$ en el intervalo de 4 ms que se muestra, pero que tenga un periodo de 8 ms y presente simetría par. (d) Calcular a_1 y b_1 para $f_x(t)$.

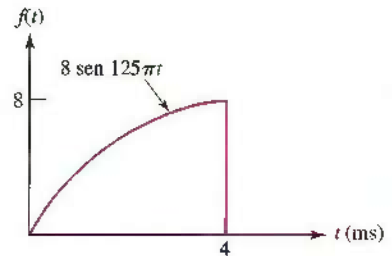


FIGURA 18.33

22. Recurrir lo más posible a la simetría para obtener valores numéricos correspondientes a a_0, a_n y b_n $1 \leq n \leq 10$, para la forma de onda de la figura 18.34.

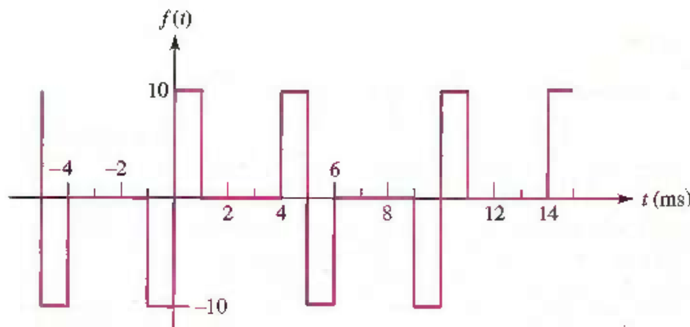
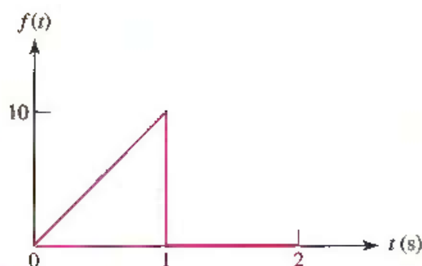


FIGURA 18.34

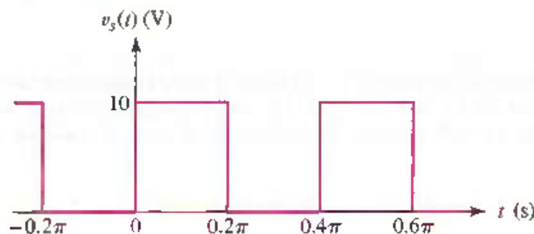


■ **FIGURA 18.35**

23. Una función $f(t)$ tiene simetría par y de media onda. El periodo es de 8 ms. Se sabe también que $f(t) = 10^3 t$, para $0 < t < 1$ ms, y $f(t) = 0$, para $1 < t < 2$ ms. Calcular los valores de b_n, $1 \leq n \leq 5$.
24. Una parte de $f(t)$ se presenta en la figura 18.35. Mostrar $f(t)$ sobre el intervalo $0 < t < < 8$ s si $f(t)$ tiene: (*a*) simetría impar y $T = 4$ s; (*b*) simetría par y $T = 4$ s; (*c*) simetría impar, de media onda y $T = 8$ s; (*d*) simetría par, de media onda y $T = 8$ s.

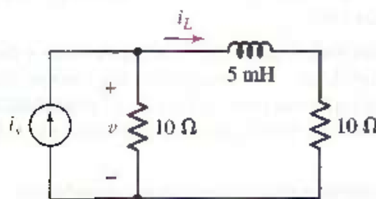
18.3 Respuesta completa a funciones forzadas periódicas

25. Sustituir la onda cuadrada de la figura 18.8a por la de la figura 18.36 y repetir el análisis del ejemplo 18.2 para obtener una nueva expresión relativa a: (*a*) $i_f(t)$; (*b*) $i(t)$.

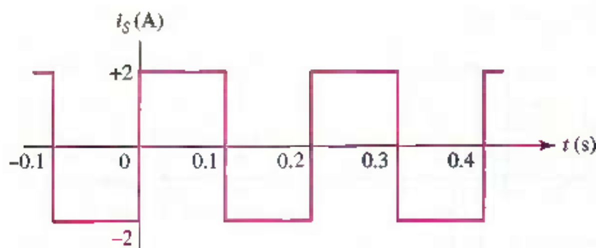


■ **FIGURA 18.36**

26. La forma de onda de $v_s(t)$ que se muestra en la figura 18.36 se aplica al circuito de la figura 18.8*b*. Utilizar los métodos comunes del análisis transitorio para calcular $i(t)$ en t igual a: (*a*) 0.2π s; (*b*) 0.4π s; (*c*) 0.6π s.
27. Una fuente de tensión ideal v_s, un interruptor abierto, una resistencia de 2 Ω y un capacitor de 2 F están en serie. La fuente de tensión se presenta en la figura 18.36. El interruptor se cierra en $t = 0$ y la tensión del capacitor es la respuesta deseada. (*a*) Trabajar en el dominio de la frecuencia de la enésima armónica para determinar la respuesta forzada como una serie de Fourier trigonométrica. (*b*) Especificar la forma funcional de la respuesta natural. (*c*) Determinar la respuesta completa.
28. El circuito de la figura 18.37*a* se encuentra sujeto a la forma de onda que se muestra en la figura 18.37*b*. Determinar la tensión $v(t)$ en estado estable.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 18.37**

29. El circuito de la figura 18.37*a* está sujeto a la forma de onda periódica que se muestra en la figura 18.38. Determinar la corriente $i_L(t)$ en estado estable.

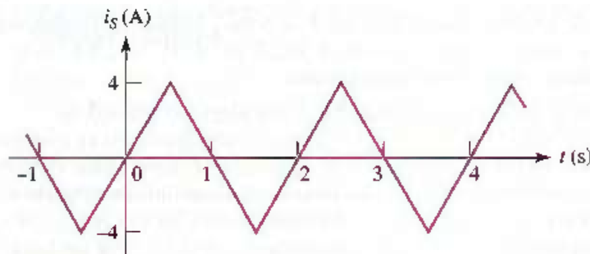


FIGURA 18.38

18.4 Forma compleja de la serie de Fourier

30. Sea $T = 6$ ms el periodo de la forma de onda periódica de la figura 18.39. Determinar $\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_{-3}$, $|\mathbf{c}_3|$, a_3, b_3 y $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$.

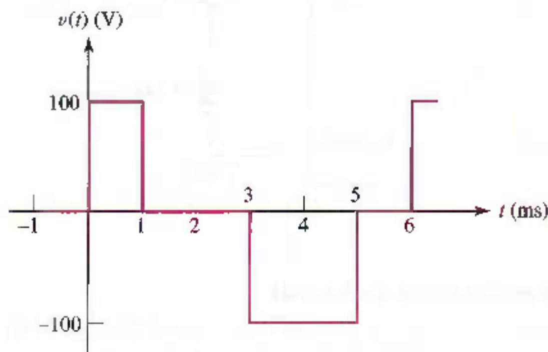


FIGURA 18.39

31. (*a*) Determinar la serie de Fourier compleja de la forma de onda periódica de la figura 18.40. (*b*) Calcular los valores numéricos de $\mathbf{c}_n$ $n = 0, \pm 1$ y ± 2.

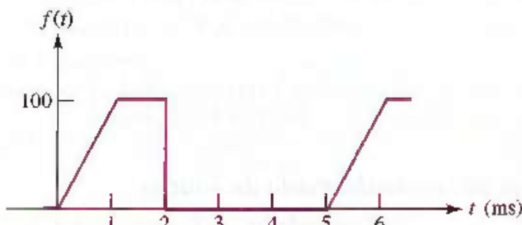


FIGURA 18.40

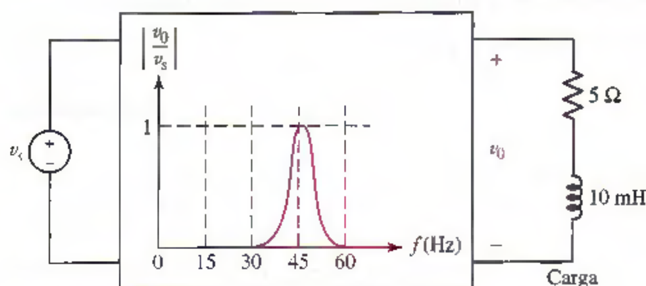
32. Los pulsos que se muestran en la figura 18.11 tienen una amplitud de 8 V, una duración de 0.2 μs y una tasa de repetición de 6 000 pulsos por segundo. (*a*) Calcular la frecuencia a la que la envolvente del espectro de frecuencia tiene una amplitud de cero. (*b*) Determinar el intervalo de separación de frecuencia de las líneas espectrales. (*c*) Determinar $|c_n|$ de la componente espectral más cercana a 20 kHz. (*d*) . . . más cercana a 2 MHz. (*e*) Especificar el ancho de banda nominal

que un amplificador debe tener para transmitir este tren de pulsos con razonable fidelidad. (*f*) Establecer el número de componentes espectrales en el intervalo de frecuencia $2 < \omega < 2.2$ Mrad/s. (*g*) Calcular la amplitud de $\mathbf{c}_{227}$ y establecer su frecuencia.

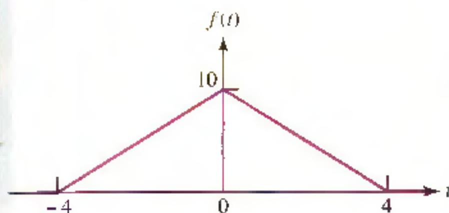
33. Una forma de onda de tensión tiene un periodo $T = 5$ ms y valores de coeficientes complejos: $\mathbf{c}_0 = 1$, $\mathbf{c}_1 = 0.2 - j0.2$, $\mathbf{c}_2 = 0.5 + j0.25$, $\mathbf{c}_3 = -1 - j2$ y $\mathbf{c}_n = 0$ para $|n| \geq 4$. (*a*) Obtener $v(t)$. (*b*) Calcular $v(1 \text{ ms})$.

34. Una secuencia de pulsos tiene un periodo de 5 μs, una amplitud unitaria de $-0.6 < t < -0.4$ μs y para $0.4 < t < 0.6$ μs, así como amplitud cero en cualquier otro lado del intervalo del periodo. Esta serie de pulsos podría representar el número decimal 3 que se está transmitiendo en forma binaria mediante una computadora digital. (*a*) Determinar $\mathbf{c}_n$. (*b*) Evaluar $\mathbf{c}_4$. (*c*) Evaluar $\mathbf{c}_0$. (*d*) Calcular $|\mathbf{c}_n|_{\text{máx}}$. (*e*) Obtener N de manera que $|\mathbf{c}_n| \leq 0.1|\mathbf{c}_n|_{\text{máx}}$ para toda $n > N$. (*f*) ¿Qué ancho de banda se requiere para transmitir esta parte del espectro?

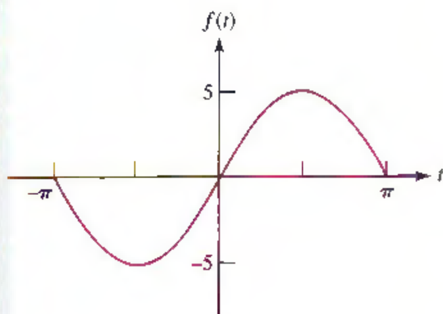
35. Sea una tensión periódica $v_s(t) = 40$ V para $0 < t < \frac{1}{96}$ s, y 0 para $\frac{1}{96} < t < \frac{1}{16}$ s. Si $T = \frac{1}{16}$ s, calcular: (*a*) $\mathbf{c}_3$; (*b*) la potencia entregada a la carga en el circuito de la figura 18.41.



■ **FIGURA 18.41**



■ **FIGURA 18.42**



■ **FIGURA 18.43**

18.5 Definición de la transformada de Fourier

36. Dada la función de tiempo $f(t) = 5[u(t+3) + u(t+2) - u(t-2) - u(t-3)]$: (*a*) dibujar e $f(t)$; (*b*) utilizar la definición de la transformada de Fourier para determinar $\mathbf{F}(j\omega)$.

37. Utilizar las ecuaciones de definición para la transformada de Fourier con el fin de encontrar $\mathbf{F}(j\omega)$ si $f(t)$ es igual a: (*a*) $e^{-at}u(t)$, $a > 0$; (*b*) $e^{-a(t-t_0)}u(t-t_0)$, $a > 0$; (*c*) $te^{-at}u(t)$, $a > 0$.

38. Determinar la transformada de Fourier del pulso triangular de la figura 18.42.

39. Obtenga la transformada de Fourier del pulso senoidal de la figura 18.43.

40. Sea $f(t) = (8\cos t)[u(t+0.5\pi) - u(t-0.5\pi)]$. Calcular $\mathbf{F}(j\omega)$ para ω igual a: (*a*) 0; (*b*) 0.8; (*c*) 3.1.

41. Utilizar las ecuaciones de definición de la transformada inversa de Fourier con el fin de determinar $f(t)$, y evaluar después en $t = 0.8$ para $\mathbf{F}(j\omega)$ igual a: (*a*) $4[u(\omega+2) - u(\omega-2)]$; (*b*) $4e^{-2|\omega|}$; (*c*) $(4\cos\pi\omega)[u(\omega+0.5) - u(\omega-0.5)]$.

18.6 Algunas propiedades de la transformada de Fourier

42. Dada la tensión $v(t) = 20e^{1.5t}u(-t-2)$ V, determinar: (*a*) $\mathbf{F}_v(j0)$; (*b*) $A_v(2)$; (*c*) $B_v(2)$; (*d*) $|\mathbf{F}_v(j2)|$; (*e*) $\phi_v(2)$.

43. Sea $i(t)$ la corriente variable en el tiempo que circula por una resistencia de 4 Ω. Si se sabe que la magnitud de la transformada de Fourier de $i(t)$ es igual a $|\mathbf{I}(j\omega)| = (3\cos 10\omega)\,[u(\omega + 0.05\pi) - u(\omega - 0.05\pi)]$ A/(rad/s), calcular: (*a*) la energía total presente en la señal; (*b*) la frecuencia ω_x, tal que la mitad de la energía total se ubique en el intervalo $|\omega| < \omega_x$.

44. Sea $f(t) = 10te^{-4t}u(t)$, y obtener: (*a*) la energía correspondiente a la resistencia de 1 Ω representada por esa señal; (*b*) $|\mathbf{F}(j\omega)|$; (*c*) la densidad de energía en $\omega = 0$ y $\omega = 4$ rad/s.

45. Si $v(t) = 8e^{-2|t|}$ V, determinar: (*a*) la energía correspondiente a la resistencia de 1 Ω asociada con esta señal; (*b*) $|\mathbf{F}_v(j\omega)|$; (*c*) el intervalo de frecuencia $|\omega| < \omega_1$ en el que se ubica 90% de la energía correspondiente a la resistencia de 1 Ω.

18.7 Pares de transformadas de Fourier de algunas funciones del tiempo simples

46. Utilizar la definición de la transformada de Fourier para demostrar los siguientes resultados, donde $\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathbf{F}(j\omega)$: (*a*) $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}\mathcal{F}\{f(t)\}$; (*b*) $\mathcal{F}\{df(t)/dt\} = j\omega\mathcal{F}\{f(t)\}$; (*c*) $\mathcal{F}\{f(kt)\} = (1/|k|)\mathbf{F}(j\omega/k)$; (*d*) $\mathcal{F}\{f(-t)\} = \mathbf{F}(-j\omega)$; (*e*) $\mathcal{F}\{tf(t)\} = j\,d[\mathbf{F}(j\omega)]/d\omega$.

47. Determinar $\mathcal{F}\{f(t)\}$ si $f(t)$ está dada por: (*a*) $4[\text{sgn}(t)]\delta(t-1)$; (*b*) $4[\text{sgn}(t-1)]\delta(t)$; (*c*) $4[\text{sen}(10t - 30°)]$.

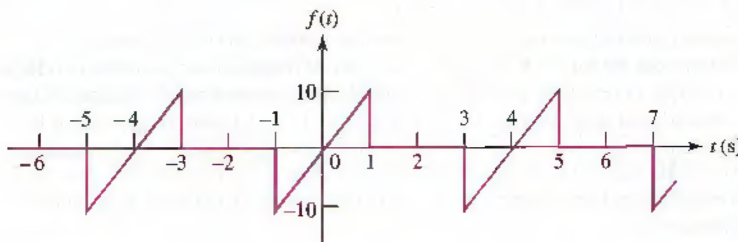
48. Obtener $\mathbf{F}(j\omega)$ si $f(t)$ es igual a: (*a*) $A\cos(\omega_0 t + \phi)$; (*b*) $3\,\text{sgn}(t-2) - 2\delta(t) - u(t-1)$; (*c*) $(\text{sen h } kt)u(t)$.

49. Calcular $f(t)$ en $t = 5$ si $\mathbf{F}(j\omega)$ es igual a: (*a*) $3u(\omega+3) - 3u(\omega-1)$; (*b*) $3u(-3-\omega) + 3u(\omega-1)$; (*c*) $2\delta(\omega) + 3u(-3-\omega) + 3u(\omega-1)$.

50. Determinar $f(t)$ si $\mathbf{F}(j\omega)$ es igual a: (*a*) $3/(1+j\omega) + 3/j\omega + 3 + 3\delta(\omega-1)$; (*b*) $(5\,\text{sen}4\omega)/\omega$; (*c*) $6(3+j\omega)/[(3+j\omega)^2 + 4]$.

18.8 Transformada de Fourier de una función del tiempo periódica general

51. Calcular la transformada de Fourier de la función de tiempo periódica de la figura 18.44.



■ **FIGURA 18.44**

52. La función periódica $f(t)$ se define sobre el periodo $0 < t < 4$ ms por medio de $f_1(t) = 10u(t) - 6u(t-0.001) - 4u(t-0.003)$. Determinar $\mathbf{F}(j\omega)$.

53. Si $\mathbf{F}(j\omega) = 20\sum_{n=1}^{\infty}[1/(|n|!+1)]\delta(\omega - 20n)$, calcular los valores de $f(0.05)$.

54. Dada una entrada $x(t) = 5[u(t) - u(t-1)]$, utilizar la convolución para determinar la salida $y(t)$ si $h(t)$ es igual a: (*a*) $2u(t)$; (*b*) $2u(t-1)$; (*c*) $2u(t-2)$.

55. Sea $x(t) = 5[u(t) - u(t-2)]$ y $h(t) = 2[u(t-1) - u(t-2)]$. Obtener $y(t)$ en $t = -0.4, 0.4, 1.4, 2.4, 3.4$ y 4.4 mediante la convolución.

18.9 Función del sistema y respuesta en el dominio de la frecuencia

56. La respuesta al impulso de cierto sistema lineal es $h(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t})$. Dada la entrada $x(t) = u(t)$, calcular la respuesta de la salida para $t > 0$.

57. La respuesta al impulso unitario y la entrada a cierto sistema lineal se muestran en la figura 18.45. (*a*) Obtener una expresión integral para la salida que sea válida en el intervalo $4 < t < 6$ y que no contenga ninguna función singular. (*b*) Evaluar la salida en $t = 5$.

58. Dada una señal de entrada $x(t) = 5e^{-(t-2)}u(t-2)$ y la respuesta al impulso $h(t) = (4t-16)[u(t-4) - u(t-7)]$, determinar el valor de la señal de salida en (*a*) $t = 5$; (*b*) $t = 8$; (*c*) $t = 10$.

59. Cuando una entrada $\delta(t)$ se aplica a un sistema lineal, la salida es sen t para $0 < t < \pi$, y cero en cualquier otro lado. Ahora bien, si se aplica la entrada $e^{-t}u(t)$ especificar el valor numérico de la salida en t igual a: (*a*) 1; (*b*) 2.5; (*c*) 4.

60. Sea $x(t) = 0.8(t-1)[u(t-1) - u(t-3)]$ y $h(t) = 0.2(t-2)[u(t-2) - u(t-3)]$. Evaluar $y(t)$ para (*a*) $t = 3.8$; (*b*) $t = 4.8$.

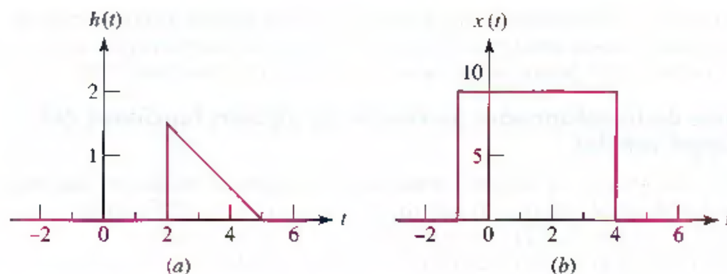


FIGURA 18.45

61. Una señal $x(t) = 10e^{-2t}u(t)$ se aplica a un sistema lineal, en donde la respuesta al impulso es $h(t) = 10e^{-2t}u(t)$. Determinar la salida $y(t)$.

62. Se aplica un impulso a un sistema lineal, el cual genera la salida $h(t) = 5e^{-4t}\,u(t)$ V. ¿Qué porcentaje de la energía correspondiente a una resistencia de 1 Ω en esta respuesta: (*a*) si ocurre durante el intervalo de tiempo $0.1 < t < 0.8$ s?; (*b*) si se ubica en la banda de frecuencia $-2 < \omega < 2$ rad/s?

63. Si $\mathbf{F}(j\omega) = 2/[(1 + j\omega)(2 + j\omega)]$, calcular: (*a*) la energía total de 1 Ω presente en la señal, y (*b*) el valor máximo de $f(t)$.

64. Encontrar $\mathcal{F}^{-1}[\mathbf{F}(j\omega)]$ si $\mathbf{F}(j\omega)$ es igual a: (*a*) $1/[(j\omega)(2 + j\omega)(3 + j\omega)]$; (*b*) $(1 + j\omega)/[(j\omega)(2 + j\omega)(3 + j\omega)]$; (*c*) $(1 + j\omega)^2/[(j\omega)(2 + j\omega)(3 + j\omega)]$; (*d*) $(1 + j\omega)^3/[(j\omega)(2 + j\omega)(3 + j\omega)]$.

65. Desarrollar una red que tenga una respuesta al impulso $h(t) = 2e^{-t}u(t)$. (*a*) Determinar $\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{V}_o(j\omega)/\mathbf{V}_i(j\omega)$. (*b*) Al inspeccionar ya sea $h(t)$ o $\mathbf{H}(j\omega)$, observar que la red tiene un solo elemento de almacenamiento de energía. Elegir en forma arbitraria un circuito *RC* con $R = 1$ Ω, $C = 1$ F para proporcionar la constante de tiempo necesaria, determinar la forma del circuito a fin de obtener $\frac{1}{2}h(t)$ o $\frac{1}{2}\mathbf{H}(j\omega)$. (*c*) Colocar un amplificador de tensión ideal en cascada con la red, para proveer la constante multiplicativa adecuada. ¿Cuál es la ganancia del amplificador?

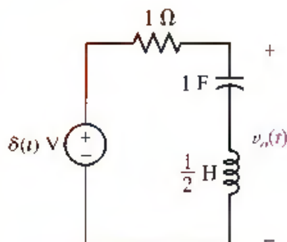


FIGURA 18.46

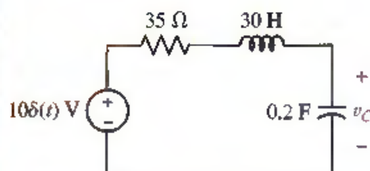


FIGURA 18.47

18.10 Significado físico de la función del sistema

66. Obtener $v_o(t)$ del circuito de la figura 18.46.

67. Calcular $v_C(t)$ del circuito que se ilustra en la figura 18.47.

68. Sea $f(t) = 5e^{-2t}u(t)$ y $g(t) = 4e^{-3t}u(t)$. (*a*) Determinar $f(t) * g(t)$ trabajando en el dominio del tiempo. (*b*) Evaluar $f(t) * g(t)$ mediante la multiplicación en el dominio de la frecuencia.

69. La fuente de tensión de la figura 18.22 se sustituye por $v_i(t) = 12\ \mathrm{sgn}(t)$. Determinar $v_o(t)$, la tensión en las terminales del inductor, utilizando las técnicas de la transformada de Fourier.

70. Un sistema particular presenta una respuesta al impulso $h(t) = 2e^{-t}\cos 4t$. Encontrar la salida si la entrada es: (*a*) 2; (*b*) $2\delta(t - 1)$; (*c*) $2u(t + 0.25) - 2u(t - 0.25)$.

INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA DE REDES

Después de resolver muchos problemas de circuitos, poco a poco se hace evidente que una gran cantidad de los que se estudiaron tienen mucho en común, al menos en términos del arreglo de componentes. A partir de este reconocimiento, es posible crear una visión más abstracta de los circuitos, la cual se conoce como *topología de redes*. Este apéndice presenta una introducción a varios conceptos básicos de la topología de redes; la implantación se deja al arbitrio del lector.

A1.1 ÁRBOLES Y ANÁLISIS NODAL GENERAL

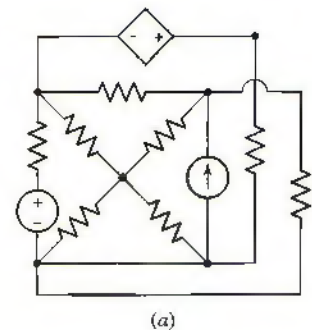
Se planea ahora generalizar el método del análisis nodal que se ha llegado a conocer y desear. Debido a que este análisis se aplica a cualquier red, no es posible prometer que se resolverá una clase más amplia de problemas de circuitos. Sin embargo, se verá hacia adelante, para tener la capacidad de elegir un método de análisis nodal general para resolver cualquier problema particular, que tal vez de origen a un menor número de ecuaciones y menos trabajo.

Se debe extender primero la lista de definiciones relacionadas con la topología de redes. Se comienza con la definición de la propia *topología* como una rama de la geometría relacionada con las propiedades de una figura geométrica que no cambian cuando la figura se tuerce, dobla, pliega, alarga o encoje, o se amarra en nudos, con la restricción de que ninguna parte de la figura se corta o se pega a otra. Una esfera y un tetraedro son topológicamente idénticos, pues constituyen un cuadrado y un círculo. En términos de circuitos eléctricos no interesan los tipos particulares de elementos que aparecen en el circuito, sino sólo la forma en la que se arreglan las ramas y los nodos. En realidad, se suele suprimir la naturaleza de los elementos y simplificar el dibujo del circuito mediante la presentación de los elementos como líneas. El dibujo que resulta se denomina gráfica lineal o simplemente gráfica. Un circuito y su gráfica se muestran en la figura A1.1. Observar que en ella todos los nodos se identifican mediante puntos gruesos.

En razón de que las propiedades topológicas del circuito, o su gráfica, permanecen invariables cuando se distorsiona, las tres gráficas de la figura A1.2 son topológicamente idénticas al circuito y a la gráfica A1.1.

Los términos topológicos que ya se conocen y emplean de manera correcta son:

Nodo: punto en el que dos o más elementos tienen una conexión común.
Trayectoria: conjunto de elementos que pueden recorrerse en orden, sin pasar por el mismo nodo dos veces.
Rama: trayectoria sencilla que contiene un elemento simple, el cual conecta un nodo a cualquier otro nodo.



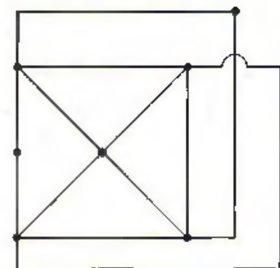


FIGURA A1.1 (*a*) Un circuito dado. (*b*) Gráfica lineal de este circuito.

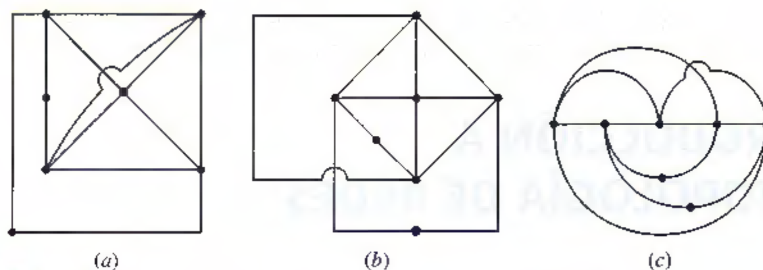


FIGURA A1.2 (*a, b, c*) Gráficas lineales alternativas del circuito de la figura A1.1.

Lazo: trayectoria cerrada.
Malla: lazo que no contiene ningún otro lazo dentro de él.
Circuito plano: circuito que puede dibujarse sobre una superficie plana, de manera que ninguna rama pase por encima o por debajo de cualquier otra rama.
Circuito no plano: cualquier circuito que no es plano.

Las gráficas de la figura A1.2 contienen cada una 12 ramas y 7 nodos.

Ahora deben definirse tres nuevas propiedades de una gráfica lineal: un *árbol,* un *coárbol* y *un enlace*. Se define *árbol* como cualquier conjunto de ramas que no contiene ningún lazo y que conecta cada nodo a otro, no necesariamente de manera directa. Suele haber varios árboles diferentes de una red que se podrían dibujar, de modo que el número aumenta con rapidez, a medida que aumenta la complejidad de la red. La gráfica simple que se muestra en la figura A1.3*a* tiene ocho árboles posibles, cuatro de los cuales se indican mediante líneas gruesas en las figuras A1.3*b*, *c*, *d* y *e*.

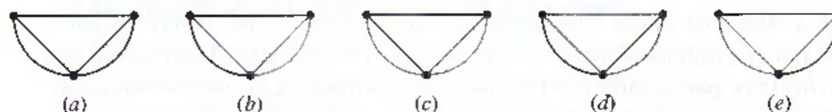


FIGURA A1.3 (*a*) Gráfica lineal de una red de tres nodos. (*b, c, d, e*) Cuatro de los ocho diferentes árboles que se podrían dibujar de esta gráfica se representan con líneas negras.

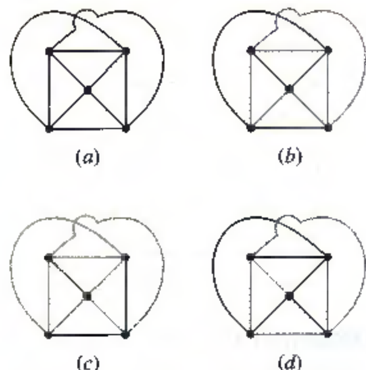


FIGURA A1.4 (*a*) Gráfica lineal. (*b*) Posible árbol de esta gráfica. (*c, d*) Estos conjuntos de rama no satisfacen la definición de árbol.

En la figura A1.4*a* se presenta una gráfica más compleja. La figura A1.4*b* muestra un árbol posible y las figuras A1.4*c* y *d* presentan conjuntos de ramas que no son árboles, pues ningún conjunto satisface la definición.

Después de especificar un árbol, las ramas que no son parte de él forman un *coárbol* o complemento de un árbol. Las ramas dibujadas con líneas delgadas en las figuras A1.3-*e* muestran los coárboles que corresponden a los árboles trace más espesos.

Luego de comprender la construcción de un árbol y su coárbol, el concepto de *enlace* es muy simple, en vista de que es cualquier rama que pertenece a un coárbol. Resulta evidente que cualquier rama particular puede ser un enlace o no, según el árbol particular que se elija.

Se relacionará de manera muy sencilla el número de enlaces en una gráfica con el número de ramas y nodos. Si la gráfica tiene N nodos, entonces se requieren exactamente $(N-1)$ ramas para construir un árbol, debido a que la

primera rama elegida conecta dos nodos y cada rama adicional incluye un nodo más. Por lo tanto, dadas B ramas, el número de enlaces L debe ser

$$L = B - (N - 1)$$

o

$$L = B - N + 1 \quad [1]$$

Hay L ramas en el coárbol y $(N - 1)$ ramas en el árbol.

En cualquiera de las gráficas de la figura A1.3, se observa que $3 = 5 - 3 + 1$; asimismo, en la gráfica de la figura A1.4*b*, $6 = 10 - 5 + 1$. Tal vez en una red haya varias partes desconectadas; por ello, la ecuación [1] quizá se haga más general al sustituir $+1$ con $+S$, donde S es el número de partes separadas. Sin embargo, también se pueden conectar dos partes separadas mediante un solo conductor, lo que provocaría que dos nodos formen un nodo, pero no fluye ninguna corriente por este conductor. Este proceso se podría utilizar para unir cualquier número de partes separadas, sin que haya pérdida de generalidad, si se restringe la atención a los circuitos en los cuales $S = 1$.

A estas alturas ya se puede analizar un método mediante el cual se escribe un conjunto de ecuaciones nodales independientes y suficientes, lo cual permite obtener muchos conjuntos de ecuaciones diferentes de la misma red, todos ellos válidos. Sin embargo, el método no proporciona todo el conjunto de ecuaciones posible. Se describirá primero el procedimiento, con la ayuda de tres ejemplos y, después, se señalará la razón por la que las ecuaciones son independientes y suficientes.

Dada una red, se debe:

1. Dibujar una gráfica y luego identificar un árbol.
2. Colocar todas las fuentes de tensión en el árbol.
3. Ubicar todas las fuentes de corriente en el coárbol.
4. Poner en el árbol todas las ramas de control de tensión de las fuentes dependientes controladas por la tensión, si es posible.
5. Situar en el coárbol todas las ramas de control de corriente de las fuentes dependientes controladas por la corriente, si es posible.

Estos últimos cuatro pasos asocian de manera eficaz las tensiones con el árbol y las corrientes con el coárbol.

A continuación se asignará una variable de tensión (con su par más-menos) en los extremos de cada una de las $(N - 1)$ ramas del árbol. Una rama que contenga una fuente de tensión (dependiente o independiente) debe asignarse a esa tensión de fuente, mientras que una que contenga una tensión controlada debe vincularse con esa tensión controladora. El número de nuevas variables introducidas es, en consecuencia, igual al número de ramas del árbol $(N - 1)$, reducidas por el número de fuentes de tensión del árbol y por el número de tensiones de control que se pueden localizar en el árbol. En el ejemplo A1.3 se encuentra que el número de nuevas variables requeridas tal vez sea cero.

Al tener un conjunto de variables, es necesario escribir un conjunto de ecuaciones que sean suficientes para determinar tales variables. Las ecuaciones se obtienen mediante la aplicación de la LKC. Las fuentes de tensión se manejan de la misma manera que se hizo en el examen anterior relativo al análisis nodal; cada

fuente de tensión, así como los dos nodos de sus terminales constituyen un supernodo o una parte de un supernodo. En consecuencia, la ley de Kirchhoff de corriente se aplica en todos menos uno de los nodos y supernodos restantes. Se iguala a cero la suma de las corrientes que salen del nodo en todas las ramas conectadas a él. Cada corriente se expresa en términos de las variables de tensión que se acaban de asignar. Tal vez se ignore un nodo, como sucedió en el caso anterior con el nodo de referencia. Por último, en el caso de que haya fuentes dependientes controladas por corriente, es necesario escribir una ecuación para cada corriente de control que la relacione con las variables de tensión; lo anterior tampoco difiere del procedimiento que se utilizó antes con el análisis nodal.

Se ensayará este proceso en el circuito de la figura A1.5*a*, el cual contiene cuatro nodos y cinco ramas y cuya gráfica se muestra en la figura A1.5*b*.

EJEMPLO A1.1

Determinar el valor de v_x en el circuito de la figura A1.5*a*.

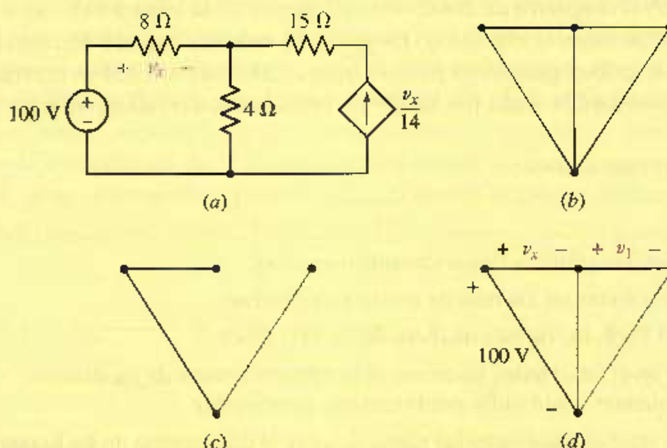


FIGURA A1.5 (*a*) Circuito utilizado como ejemplo para el análisis nodal general. (*b*) Gráfica del circuito dado. (*c*) La fuente de tensión y la tensión de control se colocan en el árbol, en tanto que la fuente de corriente se ubica en el coárbol. (*d*) El árbol se completa y se asigna la tensión entre los extremos de cada rama de árbol.

De acuerdo con los pasos 2 y 3 del procedimiento de elaboración de árboles, se coloca la fuente de tensión en el árbol y la fuente de corriente en el coárbol. En el paso 4, se ve que la rama v_x también puede situarse en el árbol, pues no forma ningún lazo que viole la definición de árbol. En estas condiciones, se tienen las dos ramas de árbol y el enlace individual que se muestra en la figura A1.5*c*; asimismo, se puede observar que todavía no se cuenta con un árbol, pues el nodo derecho no está conectado con los otros mediante una trayectoria que pase por las ramas del árbol. La única manera posible de completar el árbol se ilustra en la figura A1.5*d*. La tensión de la fuente de 100 V, la tensión de control v_x y la nueva variable de tensión v_1 se asignan a continuación a las tres ramas de árbol, tal como se indica.

Por lo tanto, se tienen dos incógnitas v_x y v_1, y es necesario obtener dos ecuaciones en términos de ellas. Hay cuatro nodos, pero la presencia de la

fuente de tensión ocasiona que dos de ellos formen un solo supernodo. Se podría aplicar la ley de Kirchhoff de corriente a cualquiera de los tres nodos o supernodos restantes. Se resolverá primero el nodo derecho. La corriente que sale hacia la izquierda es $-v_1/15$, en tanto que la que sale hacia abajo corresponde a $-v_x/14$. De esta forma, la primera ecuación es

$$-\frac{v_1}{15}+\frac{-v_x}{14}=02$$

El nodo central en la parte superior se ve más fácil que el supernodo, por lo que se iguala a cero la suma de la corriente hacia la izquierda $(-v_x/8)$, la corriente hacia la derecha $(v_1/15)$ y la corriente hacia abajo que pasa por la resistencia de 4-Ω. Esta última corriente está dada por la tensión en la resistencia dividida entre 4 Ω, aunque no hay tensión marcada en ese enlace. Sin embargo, cuando se construye un árbol de acuerdo con la definición, existe una trayectoria a través de él, desde cualquier nodo hasta cualquier otro nodo. Entonces, puesto que a toda rama en el árbol se le asigna una tensión, ésta se expresaría en cualquier enlace en términos de las tensiones de rama del árbol. Esta corriente hacia abajo es, en consecuencia, $(-v_x+100)/4$, con lo cual se tiene una segunda ecuación:

$$-\frac{v_x}{8}+\frac{v_1}{15}+\frac{-v_x+100}{4}=0$$

La ecuación simultánea de ambas ecuaciones nodales da como resultado:

$$v_1=-60\text{ V}\qquad v_x=56\text{ V}$$

EJEMPLO A1.2

Proporcionar los valores de v_x y v_y del circuito de la figura A1.6*a*.

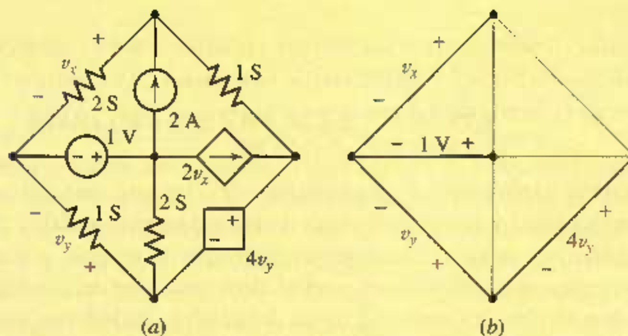


FIGURA A1.6 (*a*) Circuito con 5 nodos. (*b*) Se elige un árbol de manera que tanto las fuentes de tensión como las tensiones de control constituyan tres ramas.

Se dibuja un árbol de modo que las dos fuentes de tensión y ambas tensiones de control aparezcan como tensiones de rama del árbol, y en consecuencia como variables asignadas. Cuando esto ocurre, las cuatro ramas constituyen un árbol, figura A1.6*b*, y se eligen las tensiones de ramas de árbol v_x, 1, v_y y $4v_y$, como se muestra.

(Continúa en la siguiente página)

Ambas fuentes de tensión definen supernodos, así que se aplica dos veces la LKC, una vez en el nodo superior:

$$2v_x + 1(v_x - v_y - 4v_y) = 2$$

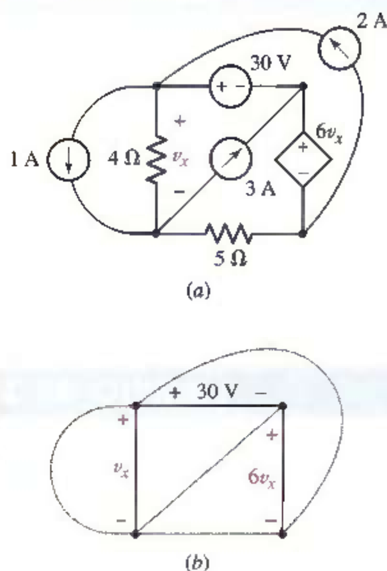
y luego en el supernodo compuesto por el nodo derecho, el nodo inferior y la fuente de tensión dependiente

$$1v_y + 2(v_y - 1) + 1(4v_y + v_y - v_x) = 2v_x$$

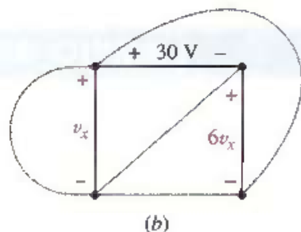
En vez de las cuatro ecuaciones que se esperarían, si se utilizan las técnicas estudiadas antes, sólo se tienen dos; además, se encuentra sin ninguna dificultad que $v_x = \frac{26}{9}$ V y $v_y = \frac{4}{3}$ V.

EJEMPLO A1.3

Calcular el valor de v_x en el circuito de la figura A1.7a.



(a)



(b)

■ **FIGURA A1.7** (*a*) Circuito para el que sólo se requiere escribir una ecuación nodal general. (*b*) El árbol y las tensiones de rama de árbol que se utilizan.

Las dos fuentes de tensión y la tensión de control establecen el árbol de tres ramas de la figura A1.7*b*. Dado que los dos nodos superiores y el nodo derecho inferior se unen para formar un supernodo, es necesario escribir sólo una LKC. Al elegir el nodo inferior izquierdo, se tiene

$$-1 - \frac{v_x}{4} + 3 + \frac{-v_x + 30 + 6v_x}{5} = 0$$

y se deduce que $v_x = -\frac{32}{3}$ V. A pesar de la aparente complejidad de este circuito, el uso del análisis nodal general dio como resultado una solución fácil. El uso de las corrientes de malla o de las tensiones de nodo con respecto a la referencia requeriría más ecuaciones y más esfuerzo.

En la sección siguiente se analizará el problema para determinar el mejor esquema de análisis.

Si es necesario conocer alguna otra tensión, corriente o potencia en el ejemplo anterior, un paso adicional proporcionaría la respuesta. Por ejemplo, la potencia que entrega la fuente de 3 A es

$$3\left(-30 - \tfrac{32}{3}\right) = -122 \text{ W}$$

Se terminará con la explicación de la suficiencia del conjunto supuesto de tensiones de rama del árbol y la independencia de las ecuaciones nodales. Si tales tensiones de rama del árbol son suficientes, entonces la tensión a través de cualquier rama, ya sea en el árbol o en el coárbol, debe obtenerse del conocimiento de los valores de todas las tensiones de la rama del árbol. Lo anterior es realidad y se cumple en el caso de aquellas ramas del árbol. Para los enlaces, se sabe que cada uno se extiende entre dos nodos y, por definición, el árbol debe conectar también esos dos nodos. Por consiguiente, cada tensión de enlace también se establecería en términos de las tensiones de la rama del árbol.

En consecuencia, una vez que se conoce la tensión en los extremos de cualquier rama del circuito, se determinan todas las corrientes utilizando ya sea el valor dado de la corriente si la rama consiste en una fuente de corriente, mediante la ley de Ohm si se trata de una rama resistiva, o recurriendo a la LKC y a estos valores de corriente si la rama es una fuente de tensión. De tal modo, todas las tensiones y las corrientes están determinadas y la suficiencia demostrada.

Para demostrar la independencia, el lector debe complacerse suponiendo que las únicas fuentes de la red que son independientes son las de corriente. Como se señaló antes, las fuentes de tensión independientes del circuito dan lugar a menor número de ecuaciones, en tanto que las fuentes dependientes suelen necesitar un número mayor. Sólo con las fuentes de corriente independientes existirán precisamente $(N - 1)$ ecuaciones nodales escritas en términos de $(N - 1)$ tensiones de rama del árbol. Para demostrar que las $(N - 1)$ ecuaciones son independientes, considerar la aplicación de la LKC a los $(N - 1)$ diferentes nodos. Cada vez que se escribe la ecuación de la LKC, hay una nueva rama del árbol implicada: la que conecta ese nodo con el resto del árbol. Dado que el elemento de circuito no apareció en ninguna ecuación anterior, se debe obtener una ecuación independiente. Lo anterior es válido para cada uno de los $(N - 1)$ nodos en turno y, en consecuencia, se tienen $(N - 1)$ ecuaciones independientes.

PRÁCTICA

A1.1 (*a*) ¿Cuántos árboles se pueden construir para el circuito de la figura A1.8, que se deduce a partir de las cinco sugerencias de dibujos de árbol que se presentaron anteriormente? (*b*) Dibujar un árbol adecuado, escribir dos ecuaciones con dos incógnitas y determinar i_3. (*c*) ¿Qué potencia proporciona la fuente dependiente?

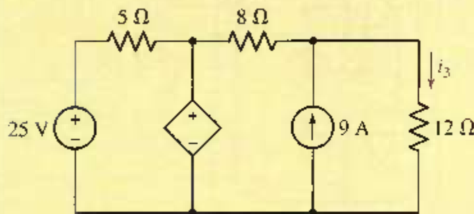


FIGURA A1.8

Respuestas: 1; 7.2 A; 547 W.

A1.2 ANÁLISIS DE ENLACES Y LAZOS

Considerar ahora el uso de un árbol para obtener un conjunto apropiado de ecuaciones de lazo. En algunos aspectos este método es el *dual* del método de escritura de ecuaciones nodales. También en este caso debe señalarse que, si bien se puede garantizar que cualquier conjunto de ecuaciones que se escriban será tanto suficiente como independiente, no se debe esperar que con el método se obtenga de manera directa todo conjunto de ecuaciones posible.

Se comienza de nuevo construyendo un árbol y se utiliza el mismo conjunto de reglas al que se recurrió en el análisis nodal general. El objetivo, ya sea para el análisis nodal o para el de lazo, consiste en poner tensiones en el árbol y corrientes en el coárbol; ésta es una regla obligatoria para fuentes, y deseable para cantidades de control.

Sin embargo, en lugar de asignar ahora una tensión a cada rama en el árbol, se determina la corriente (incluyendo la flecha de referencia, desde luego) de cada elemento en el coárbol o de cada enlace. Si hubiera 10 enlaces, se asignarían exactamente 10 corrientes de enlace. A cualquier enlace que contenga una fuente de corriente se le asocia esa fuente como a corriente de enlace. Observar que cada

corriente de enlace también puede considerarse como una corriente de lazo, pues el enlace debe extenderse entre dos nodos específicos y debe existir una trayectoria entre ambos nodos a través del árbol. Por lo tanto, con cada enlace se asocia un solo lazo específico que incluye dicho enlace y una trayectoria única a través del árbol. Resulta evidente que la corriente asignada se podría considerar como una corriente de lazo o una corriente de enlace. La connotación de enlace es más útil en el momento en que se definen las corrientes, pues debe establecerse una para cada enlace; la interpretación del lazo resulta más conveniente en el momento de escribir la ecuación, pues se aplicará la LKT a través de cada lazo.

Pruébese este proceso para definir las corrientes de enlace considerando el circuito de la figura A1.9*a*. El árbol seleccionado es uno de varios que podrían construirse y para el cual la fuente de tensión está en la rama del árbol y la fuente de corriente se ubica en un enlace. Se considera primero el enlace que contiene la fuente de corriente. El lazo asociado con este enlace es la malla del lado izquierdo, así que se indica la corriente de enlace como si circulase en torno al perímetro de esta malla (figura A1.9*b*). Una elección evidente para el símbolo de la corriente de enlace es "7 A". Se debe recordar que ninguna otra corriente puede circular por este enlace particular, por lo cual su valor debe ser exactamente la intensidad de la fuente de corriente.

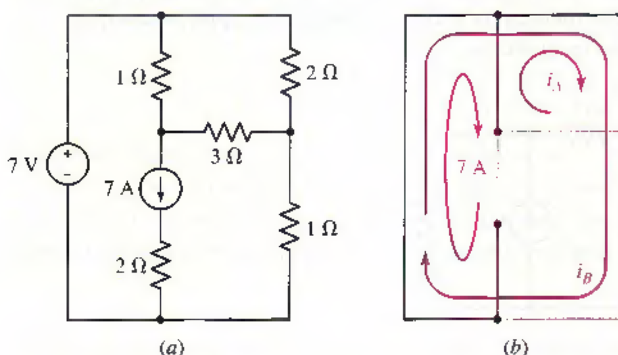


FIGURA A1.9 (*a*) Circuito simple. (*b*) Se elige el árbol de modo que la fuente de corriente sea un enlace y la fuente de tensión se encuentre en una rama del árbol.

A continuación se dirige la atención hacia el enlace de la resistencia de 3-Ω. El lazo asociado con él es la malla superior del lado derecho, de modo que esta corriente de lazo (o malla) se define como i_A y también se presenta en la figura A1.9*b*. El último enlace es la resistencia inferior de 1-Ω, pero la única trayectoria entre sus terminales a través del árbol se traza alrededor del perímetro del circuito. Esa corriente de enlace se denomina i_B, y la flecha que indica su trayectoria y su dirección de referencia aparece en la figura A1.9*b*. No es una corriente de malla.

Observar que cada enlace tiene sólo una corriente, aunque una rama del árbol quizá tenga cualquier número desde 1 hasta el número total de corrientes de enlace asignadas. El uso de flechas largas, casi cerradas, para indicar los lazos ayuda a señalar qué corriente de lazo fluye a través del cuál rama del árbol y cuáles son sus direcciones de referencia.

Ahora debe escribirse una ecuación LKT alrededor de cada uno de los lazos. Las variables que se usan son las corrientes de enlace asignadas. Dado que la tensión en los extremos de la fuente de corriente no puede expresarse en términos de la corriente de la fuente y, puesto que ya se ha empleado el valor de esta última como la corriente de enlace, se descarta cualquier lazo que contenga una fuente de corriente.

EJEMPLO A1.4

En el ejemplo de la figura A1.9, calcular los valores de i_A e i_B.

Primero se recorre al lazo de i_A en dirección de las manecillas del reloj desde su esquina inferior izquierda. La corriente que va en ese sentido en la resistencia de 1-Ω es $(i_A - 7)$, en el elemento de 2-Ω es $(i_A + i_B)$ y en el enlace simplemente i_B. Por lo tanto,

$$1(i_A - 7) + 2(i_A + i_B) + 3i_A = 02$$

En el enlace de i_B el recorrido en el sentido de las manecillas del reloj desde la esquina inferior izquierda lleva a

$$-7 + 2(i_A + i_B) + 1i_B = 0$$

El recorrido del lazo definido por el enlace 7-A no se requiere. Despejando, se tiene $i_A = 0.5$ A, $i_B = 2$ A, también en este caso. La solución se obtuvo ¡con una ecuación menos que antes!

EJEMPLO A1.5

Evaluar i_1 en el circuito que se muestra en la figura A1.10*a*.

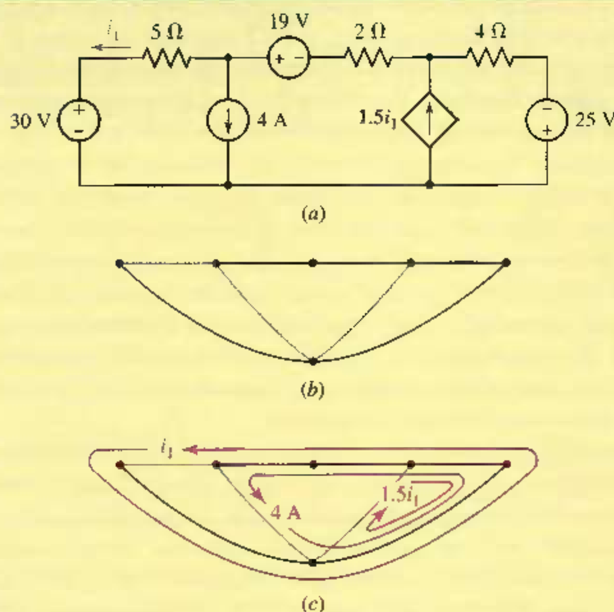


FIGURA A1.10 (*a*) Circuito para el que se podría determinar i_1 con una ecuación utilizando el análisis de lazo general. (*b*) Único árbol que satisface las reglas señaladas en la sección A1.1. (*c*) Se muestran las tres corrientes de enlace con sus lazos.

Este circuito contiene seis nodos y su árbol debe tener, por lo tanto, cinco ramas. Dado que hay ocho elementos en la red, existen tres enlaces en el coárbol. Si se ponen las tres fuentes de tensión en el árbol y las dos fuentes de corriente y el control de corriente en el coárbol, resulta el árbol que se presenta en la figura A1.10*b*. La corriente de la fuente de 4 A define un lazo

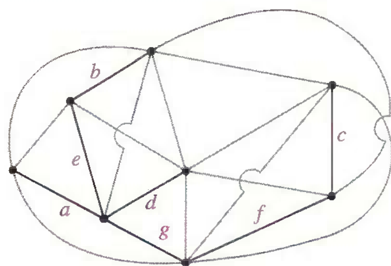
(Continúa en la siguiente página)

como se ilustra en la figura A1.10*c*. La fuente dependiente establece la corriente de lazo $1.5i_1$ alrededor de la malla derecha, mientras que la corriente de control i_1 produce la corriente de lazo restante alrededor del perímetro del circuito. Observar que las tres corrientes fluyen por la resistencia de 4-Ω.

Sólo se tiene una cantidad desconocida, i_1, así que después de descartar los lazos definidos por las dos fuentes de corriente, se aplica LKT alrededor del exterior del circuito:

$$-30 + 5(-i_1) + 19 + 2(-i_1 - 4) + 4(-i_1 - 4 + 1.5i_1) - 25 = 0$$

Además de las tres fuentes de tensión, en este lazo hay tres resistencias. La resistencia de 5-Ω incluye una corriente de lazo, puesto que también constituye un enlace; la resistencia de 2-Ω contiene dos corrientes de lazo y el de 4-Ω tiene tres. Se requiere un conjunto de corrientes de lazo dibujado con todo cuidado, si se quiere evitar errores al saltar corrientes, utilizar algunas demás o errar al elegir la dirección correcta. Sin embargo, se garantiza la ecuación anterior y con ella se obtiene $i_1 = -12$ A.



■ **FIGURA A1.11** Árbol que se emplea como ejemplo para ilustrar la suficiencia de las corrientes de enlace.

¿Cómo se demostraría la suficiencia? Imaginar un árbol sin lazos, en el cual se incluyan por lo menos dos nodos, y en cada uno de ellos sólo se conecta una rama de árbol. La corriente en ambas ramas se obtiene con facilidad a partir de las corrientes conocidas del enlace mediante la LKT. Si hay otros nodos en los que sólo se conecta una rama del árbol, tales corrientes de rama del árbol también se calcularían de manera inmediata. De este modo, en el árbol que se presenta en la figura A1.11 se han encontrado las corrientes en las ramas **a**, **b**, **c** y **d**. Uno se mueve ahora a lo largo de las ramas del árbol y se determinan las corrientes en las ramas del árbol **e** y **f**; el proceso podría continuar hasta que se determinen todas las corrientes de rama. Por lo tanto, las corrientes de enlace resultan suficientes para obtener todas las corrientes de rama. Resulta útil considerar la situación donde se ha dibujado un "árbol" incorrecto que contiene un lazo. Incluso si todas las corrientes de enlace fueran cero, aún podría circular una corriente en torno a este "lazo de árbol". Por consiguiente, la corriente de enlace no podría determinarse a dicha corriente, así que no representarían un conjunto suficiente. Por definición, un "árbol" de estas características es imposible.

Para demostrar la independencia, se debe quedar satisfecho suponiendo que las únicas fuentes de la red son fuentes de tensión independientes. Como ya se señaló, las fuentes de corriente independientes del circuito originan un número menor de ecuaciones, en tanto que las dependientes casi siempre necesitan un número mayor de ecuaciones. Si sólo se hallan fuentes de tensión independientes, en ese caso habrá precisamente $(B - N + 1)$ ecuaciones de lazo escritas en términos de las corrientes de lazo $(B - N + 1)$ Para demostrar que las $(B - N + 1)$ ecuaciones de lazo son independientes, sólo se requiere señalar que cada una representa la aplicación de la LKT alrededor del lazo que contiene un enlace que no aparece en cualquier otra ecuación. Se podría visualizar una resistencia diferente $R_1, R_2, \ldots, R_{B-N+1}$ en cada uno de los enlaces y en ese caso es claro que nunca puede obtenerse una ecuación de las otras, dado que cada una contiene un coeficiente que no aparece en las demás.

En consecuencia, las corrientes de enlace son suficientes para permitir que se obtenga una solución completa, y el conjunto de ecuaciones de lazo que se utiliza para determinar las corrientes de enlace constituye un conjunto de ecuaciones independiente.

Luego de haber considerado tanto el análisis nodal general como el análisis de lazo, se deben considerar ahora las ventajas y desventajas de cada método, de modo que se elija de manera inteligente un plan de ataque pudiendo ser aplicado a un problema de análisis dado.

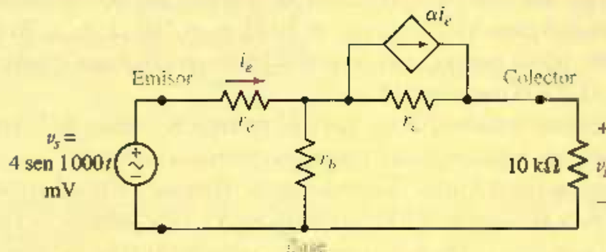
El método nodal requiere en general $(N - 1)$ ecuaciones, aunque se reduce en 1 por cada fuente de tensión independiente o dependiente en una rama de árbol, y se incrementa en 1 por cada fuente dependiente que se controla por tensión mediante una tensión de enlace, o por corriente.

El método de lazo implica, básicamente $(B - N + 1)$ ecuaciones. Sin embargo, cada fuente de corriente independiente o dependiente, en un enlace, reduce este número en 1, en tanto que cada fuente dependiente que se controla por corriente mediante una corriente de rama de árbol, o que se controla por tensión, incrementa el número en 1.

Como gran final de esta explicación, se inspeccionará el modelo del circuito equivalente en T de un transistor que se muestra en la figura A1.12, el cual se conecta a una fuente senoidal, 4 sen 1 000t mV, y una carga de 10-kΩ.

EJEMPLO A1.6

Determinar la corriente de entrada (emisor) i_e y la tensión de carga v_L en el circuito de la figura A1.12, suponiendo valores característicos de la resistencia de emisor $r_e = 50\ \Omega$; la resistencia de base $r_b = 500\ \Omega$; la resistencia del colector $r_c = 20\ \text{k}\Omega$; y la relación de transferencia base común/corriente directa es $\alpha = 0.99$.



■ **FIGURA A1.12** Una fuente de tensión senoidal y una carga de 10-kΩ se conectan al circuito equivalente T de un transistor. La conexión común entre la entrada y la salida está en la terminal de la base del transistor, por lo que el arreglo recibe el nombre de configuración de *base común*.

Si bien se piden los detalles en los problemas de práctica que siguen, se debe ver sin ninguna dificultad que el análisis de este circuito podría llevarse a cabo dibujando árboles que requieren tres ecuaciones nodales generales $(N - 1 - 1 + 1)$ o dos ecuaciones de lazo $(B - N + 1 - 1)$. También se podría observar que se necesitan tres ecuaciones en términos de las tensiones de nodo con respecto a una referencia, pues son tres ecuaciones de malla.

Sin que importe el método que se elija, los siguientes resultados se obtienen para este circuito específico:

$$i_e = 18.42 \text{ sen } 1\,000t\ \mu\text{A}$$

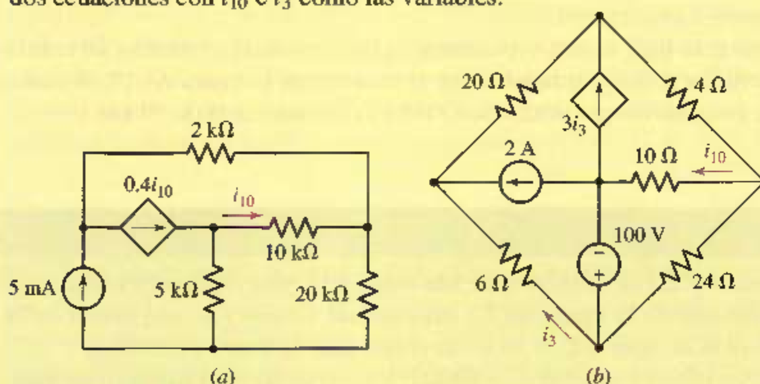
$$v_L = 122.6 \text{ sen } 1\,000t \text{ m}$$

(Continúa en la siguiente página)

y, por lo tanto, se observa que este circuito de transistor proporciona una ganancia de tensión (v_L/v_s) de 30.6, una ganancia de corriente $(v_L/10\,000 i_e)$ de 0.666, y una ganancia de potencia igual al producto $30.6(0.666) = 20.4$. Se garantizarían ganancias superiores si este transistor se operase en una configuración de emisor común.

PRÁCTICA

A1.2 Dibujar un árbol adecuado y aplicar el análisis de lazo general para determinar i_{10} en el circuito: (*a*) de la figura A1.13*a* escribiendo sólo una ecuación con i_{10} como la variable; (*b*) de la figura A1.13*b* escribiendo sólo dos ecuaciones con i_{10} e i_3 como las variables.



■ **FIGURA A1.13**

A1.3 En el caso del circuito equivalente de amplificador transistorizado que se presenta en la figura A1.12, sean $r_e = 50\ \Omega$, $r_b = 500\ \Omega$, $r_c = 20\ \text{k}\Omega$ y $\alpha = 0.99$, determinar tanto i_e como v_L dibujando un árbol apropiado y utilizando: (*a*) dos ecuaciones de lazo;
(*b*) tres ecuaciones nodales con un nodo de referencia común de la tensión;
(*c*) tres ecuaciones nodales sin un nodo de referencia común.

A1.4 Determinar los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton que se presentaron para la carga de 10-kΩ en la figura A1.12 y obtener: (*a*) el valor en circuito abierto de v_L; (*b*) la corriente de cortocircuito (hacia abajo); (*c*) la resistencia equivalente de Thévenin. Todos los valores de circuito se indican en el problema de práctica A1.3.

Respuestas: A1.2: −4.00 mA; 4.69 A. A1.3: 18.42 sen 1 000t μA; 122.6 sen 1 000t mV. A1.4: 147.6 sen 1 000t mV; 72.2 sen 1 000t μA; 2.05 kΩ.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Considérese el sistema simple de ecuaciones:

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11 \qquad [1]$$

$$-3v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 3 \qquad [2]$$

$$-4v_1 - 2v_2 + 11v_3 = 25 \qquad [3]$$

Este sistema *podría* resolverse mediante la eliminación sistemática de las variables. Sin embargo, tal procedimiento es prolongado y quizá nunca produzca respuestas si se efectúa de manera no sistemática con un gran número de ecuaciones simultáneas. Por fortuna, se dispone de muchas más opciones, algunas de las cuales se explorarán en este apéndice.

La calculadora científica

Quizá el método más directo cuando es necesario enfrentar un sistema de ecuaciones como el correspondiente a las ecuaciones [1] a [3], en el que se tienen coeficientes numéricos y sólo son de interés los valores específicos de las incógnitas (lo cual se opone a las relaciones algebraicas), consiste en emplear cualquiera de las diversas calculadoras científicas presentes ahora en el mercado. Por ejemplo, mediante una Texas Instruments *TI*-86, se tiene acceso a tales características oprimiendo [2nd] [SIMULT]. En la pantalla aparece

SIMULT
Number =

a lo que se responderá con la secuencia de teclas [3] [ENTER]. La calculadora muestra entonces

a1, 1x1...a1, 3x3=b1
a1, 1=
a1, 2=
a1, 3=
b1=

lo que indica que se puede empezar a introducir los datos numéricos de la ecuación [1]. Observar que antes del inicio de una operación de este tipo, es necesario tomar el tiempo que se requiera para escribir el sistema de ecuaciones de modo ordenado, a fin de no confundir los coeficientes. Se responde con una secuencia de teclas [7] [ENTER] [(–)] [3] [ENTER] [(–)] [4] [ENTER] [(–)] [11] [ENTER]. Luego se presenta una nueva pantalla para la segunda ecuación.



Después de proporcionar la información de las tres ecuaciones, se oprime la tecla F5 para indicar a la *TI*-86 que despeje las incógnitas $x1$, $x2$ y $x3$ (nombres de v_1, v_2 y v_3). La pantalla de la calculadora muestra entonces

x1 = 1.000
x2 = 2.000
x3 = 3.000

Debe observarse que cada calculadora capaz de resolver ecuaciones simultáneas tiene su propio procedimiento para introducir la información que se requiere; por lo tanto, no hay que deshacerse de nada que tenga el título "Manual del propietario" o "Instrucciones", sin que importe qué tan tentador pueda serlo.

Matrices

Otro método muy útil para solucionar un sistema de ecuaciones se basa en el concepto de matrices. Considérense las ecuaciones [1], [2] y [3]. El siguiente arreglo de los coeficientes constantes de las ecuaciones

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

recibe el nombre de ***matriz***; se eligió el símbolo **G** porque cada elemento de la matriz es un valor de conductancia. La propia matriz no tiene "valor", simplemente es un arreglo ordenado de elementos. Se utilizan negritas para representar una matriz y se encierra el propio arreglo mediante corchetes.

Una matriz que cuenta con m renglones y n columnas se denomina matriz de $(m \times n)$ (lo que se pronuncia "m por n"). De tal modo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

es una matriz de (2×3) y la matriz **G** del ejemplo corresponde a una matriz de (3×3). Una matriz de $(n \times n)$ es una ***matriz cuadrada*** de orden n.

Una matriz de $(m \times 1)$ se conoce como *matriz columna* o ***vector***. Así,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

es una matriz columna de (2×1) de tensiones fasoriales, y

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

es un vector de corriente fasorial de (2×1). Una matriz de $(1 \times n)$ se conoce como *vector renglón*.

Dos matrices de $(m \times n)$ son iguales si sus elementos correspondientes son iguales. De tal modo, si a_{jk} es un elemento de **A** localizado en el renglón j y la columna k y b_{jk} es el elemento en el renglón j y la columna k en una matriz **B**, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ *si y sólo si* $a_{jk} = b_{jk}$ para todo $1 \le j \le m$ y $1 \le k \le n$. De tal modo, si

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

entonces $\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$ y $\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$.

Dos matrices de $(m \times n)$ pueden sumarse, sumando los elementos correspondientes. De tal modo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

A continuación se considerará el producto de matrices **AB**, donde **A** es una matriz $(m \times n)$ y **B** es una matriz de $(p \times q)$. Si $n = p$, se dice que las matrices son *conformes* y que existe su producto. Esto es, la multiplicación de matrices se define sólo en el caso en el que el número de columnas de la primera matriz del producto sea igual al número de renglones de la segunda matriz.

La definición formal de una multiplicación de matrices establece que el producto de la matriz **A** de $(m \times n)$ y de la matriz **B** de $(n \times q)$ es una matriz de $(m \times q)$ que tiene elementos c_{jk}, $1 \leq j \leq m$ y $1 \leq k \leq q$, donde

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}$$

Esto es, para encontrar el elemento en el segundo renglón y la tercera columna del producto, se multiplica cada uno de los elementos del segundo renglón de **A** por el elemento correspondiente en la tercera columna de **B** y luego se suman los n resultados. Por ejemplo, dada la matriz **A** de (2×3) y la matriz **B** de (3×2),

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) \end{bmatrix}$$

El resultado es una matriz de (2×2).

Como ejemplo numérico de multiplicación de matrices, se toma

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 16 & -16 \end{bmatrix}$$

donde $\quad 6 = (3)(2) + (2)(-2) + (1)(4), \qquad 4 = (3)(3) + (2)(-1) + (1)(-3),$ etcétera.

La multiplicación de matrices no es conmutativa. Por ejemplo, dada la matriz **C** de (3×2) y la matriz **D** de (2×1), resulta evidente que el producto **CD** se podría calcular, aunque el producto **DC** ni siquiera está incluso definido.

Como ejemplo final, sea

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que $\mathbf{t}_A\mathbf{t}_B$ y $\mathbf{t}_B\mathbf{t}_A$ están definidas. Sin embargo,

$$\mathbf{t}_A\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 21 & 2 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$$

mientras que:

$$\mathbf{t}_B\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

PRÁCTICA

A2.1 Dada $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$, encontrar: (*a*) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; (*b*) $\mathbf{AB}$; (*c*) $\mathbf{BA}$; (*d*) $\mathbf{AV} + \mathbf{BC}$; (*e*) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$.

Respuesta: $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & -17 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} V_1 - 3V_2 + 170 \\ 3V_1 + 5V_2 - 10 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -8 & -18 \\ 18 & 16 \end{bmatrix}$.

Inversión de matrices

Si se escribe un sistema de ecuaciones utilizando la notación de matrices

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad [4]$$

se resolvería para el vector de tensión si se multiplican ambos lados de la ecuación [4] por la inversa de la matriz **G**:

$$\mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad [5]$$

Este procedimiento utiliza la identidad $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}$, donde **I** es la matriz identidad, una matriz cuadrada del mismo tamaño que **G**, con ceros en todos lados excepto en la diagonal. Cada elemento de la diagonal de una matriz identidad es la unidad. Por lo tanto, la ecuación [5] se convierte en

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

que es posible simplificar en

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

puesto que la matriz identidad multiplicada por cualquier vector es simplemente igual a ese vector (la prueba se deja al lector en un ejercicio de 30 segundos). De esta forma, la solución del sistema de ecuaciones se transforma en el problema de obtener la matriz inversa de **G**. Muchas calculadoras científicas proporcionan los medios para efectuar el álgebra de matrices.

De nuevo, utilizando como ejemplo la *TI*-86 se introduce la secuencia de teclas [2nd] [MATRX], y se observa la pantalla que se muestra en la figura A2.1.

NAMES	EDIT	MATH	OPS	CPLX
F1	F2	F3	F4	F5

FIGURA A2.1 Pantalla para el manejo de matrices de la *TI*-86, cuya tecla de función correspondiente se indica debajo de cada elemento

Para crear una nueva matriz llamada **G**, se oprime [F2], con lo que aparece en la pantalla

MATRX
Name=

Luego se oprime [G] [ENTER] y la pantalla registra

MATRX:G 1 x1
[0]

A continuación se teclea [3] [ENTER] dos veces para definir **G** como una matriz de 3×3 y la pantalla muestra entonces

MATRX:G 3 x3
[0 0 0]
[0 0 0]
[0 0 0]
1, 1=0

Se responde tecleando

[7] [ENTER] [(−)] [3] [ENTER] [(−)] [4] [ENTER]

y se prosigue hasta que se haya introducido cada coeficiente; después se presiona [EXIT]. A continuación se genera un vector de corriente **I** llamando de nuevo el menú de matriz y creando una matriz **I** con las dimensiones 3×1. Se continúa con la incorporación de los valores −11, 3 y 25. Se verifican los valores incorporados tecleando [ALPHA] [G] [ENTER], o [ALPHA] [I] [ENTER].

La calculadora ya está preparada para manipular los arreglos y resolver el sistema de ecuaciones. Sólo es necesario teclear

[ALPHA] [G] [x^{-1}] [I] [ENTER]

También en este caso se recomienda al lector consultar el manual del propietario de la calculadora para mayores detalles.

Determinantes

Aunque una matriz *en sí misma* no tiene "valor", el ***determinante*** de la matriz cuadrada *sí* lo tiene. Para ser precisos, es necesario decir que el determinante de una matriz es un valor, aunque el uso común permite hablar del arreglo mismo y de su valor como determinante. Se simboliza un determinante mediante Δ y se emplea un subíndice adecuado para denotar la matriz a la que se refiere. De tal manera,

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

Observar que se usan líneas verticales simples para encerrar el determinante.

El valor de cualquier determinante se obtiene al desarrollarla en términos de sus menores. Para realizar esta tarea se selecciona cualquier renglón j o cualquier columna k, se multiplica cada elemento de ese renglón o columna por su menor y por $(-1)^{j+k}$, y luego se suman los productos. El menor de los

elementos que aparecen tanto en el renglón j como en la columna k es el determinante que se obtiene cuando se eliminan el renglón j y la columna k, lo cual se indica mediante Δ_{jk}.

Como un ejemplo, se desarrollará el determinante Δ_G a lo largo de la columna 3. Se multiplica primero el (-4) de la parte superior de esta columna por $(-1)^{1+3} = 1$ y luego por su menor:

$$(-4)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$$

luego se repite lo anterior para estos dos elementos en la columna 3 y se suman los resultados:

$$-4\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

Los menores contienen sólo dos renglones y dos columnas. Son de orden 2 y sus valores se determinan con facilidad expandiendo otra vez en términos de menores, lo que en este caso es una operación trivial. De tal modo, para el primer determinante, se desarrolla a lo largo de la primera columna multiplicando (-3) por $(-1)^{1+1}$ y su menor, que es meramente el elemento (-2), y luego se multiplica (-4) por $(-1)^{2+1}$ y por 6. De este modo,

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-2) - 4(-6) = 30$$

Suele ser más fácil recordar el resultado de un determinante de segundo orden como "el término izquierdo superior multiplicado por el derecho inferior, menos el derecho superior por el izquierdo inferior". Por último,

$$\begin{aligned} \Delta_G &= -4[(-3)(-2) - 6(-4)] \\ &\quad + 2[(7)(-2) - (-3)(-4)] \\ &\quad + 11[(7)(6) - (-3)(-3)] \\ &= -4(30) + 2(-26) + 11(33) \\ &= 191 \end{aligned}$$

Para practicar, se desarrollará este mismo determinante a lo largo del primer renglón:

$$\begin{aligned} \Delta_G &= 7\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 11 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 7(62) + 3(-41) - 4(30) \\ &= 191 \end{aligned}$$

El desarrollo por menores es válido para una determinante de cualquier orden.

Al repetir estas reglas para evaluar una determinante en términos más generales, se podría afirmar que dada una matriz **a**,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

se podría obtener Δ_a mediante el desarrollo en términos de menores a lo largo de cualquier renglón j:

$$\begin{aligned} \Delta_a &= a_{j1}(-1)^{j+1}\Delta_{j1} + a_{j2}(-1)^{j+2}\Delta_{j2} + \dots + a_{jN}(-1)^{j+N}\Delta_{jN} \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_{jn}(-1)^{j+n}\Delta_{jn} \end{aligned}$$

o a lo largo de cualquier columna k:

$$\Delta_a = a_{1k}(-1)^{1+k}\Delta_{1k} + a_{2k}(-1)^{2+k}\Delta_{2k} + \cdots + a_{Nk}(-1)^{N+k}\Delta_{Nk}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} a_{nk}(-1)^{n+k}\Delta_{nk}$$

El cofactor C_{jk} del elemento que aparece tanto en el renglón j como en la columna k es simplemente $(-1)^{j+k}$ veces el menor Δ_{jk}. De tal manera, $C_{11} = \Delta_{11}$, aunque $C_{12} = -\Delta_{12}$. Se escribiría ahora

$$\Delta_a = \sum_{n=1}^{N} a_{jn}C_{jn} = \sum_{n=1}^{N} a_{nk}C_{nk}$$

Como ejemplo, considerar este determinante de cuarto orden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Se observa que

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4(10+3) + 1(4+9) - 3(-2+15) = 26$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1(10+3) + 2(4+9) + 0 = 13$$

y $C_{11} = 26$, en tanto que $C_{12} = -13$. Al obtener el valor de Δ como práctica, se tiene

$$\Delta = 2C_{11} + (-1)C_{12} + (-2)C_{13} + 0$$
$$= 2(26) + (-1)(-13) + (-2)(3) + 0 = 59$$

Regla de Cramer

A continuación se considera la regla de Cramer, que permite determinar los valores de variables desconocidas. También resulta útil para solucionar sistemas de ecuaciones donde los coeficientes numéricos no se han especificado, lo que en consecuencia hace que las calculadoras se confundan. Considerar otra vez las ecuaciones [1], [2] y [3]; se define el determinante Δ_1 como el que se obtiene cuando la primera columna de Δ_G se sustituye por las tres constantes de los lados de la derecha de las tres ecuaciones. En consecuencia,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

Desarrollando a lo largo de la primera columna,

$$\Delta_1 = -11\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + 25\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -682 + 123 + 750 = 191$$

La regla de Cramer establece entonces que

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_G} = \frac{191}{191} = 1 \text{ V}$$

y

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_G} = \begin{vmatrix} 7 & -11 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -4 & 25 & 11 \end{vmatrix} = \frac{581 - 63 - 136}{191} = 2 \text{ V}$$

y, por último,

$$v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_G} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -3 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 25 \end{vmatrix} = \frac{1092 - 291 - 228}{191} = 3 \text{ V}$$

La regla de Cramer resulta aplicable a un sistema de N ecuaciones lineales simultáneas con N incógnitas; en el caso de la variable i-ésima v_i:

$$v_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_G}$$

PRÁCTICA

A2.2. Evaluar:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$;

(d) Encontrar i_2 si $5i_1 - 2i_2 - i_3 = 100$, $-2i_1 + 6i_2 - 3i_3 - i_4 = 0$, $-i_1 - 3i_2 + 4i_3 - i_4 = 0$, y $-i_2 - i_3 = 0$.

Respuestas: 4; 33; –411; 1.266.

UNA PRUEBA DEL TEOREMA DE THÉVENIN

Se demostrará el teorema de Thévenin de la misma forma en la que se enunció en la sección 5.4 del capítulo 5, lo cual se repite aquí para consulta:

> Dado cualquier circuito lineal, se reordena en la forma de dos redes A y B conectadas mediante dos alambres. Se define una tensión v_{ca} como la tensión en circuito abierto que aparece en las terminales de A cuando se desconecta B. Entonces, todas las corrientes y las tensiones de B permanecerán invariables, si todas las fuentes de tensión y de corriente *independientes* de A se "suprimen" o "se hacen iguales a cero" y si se conecta una fuente de tensión independiente v_{ca} con la polaridad adecuada, en serie con la red A desconectada (inactiva).

Se llevará a cabo la prueba demostrando que la red A original y el equivalente de Thévenin de la red A provocan que fluya la misma corriente hacia las terminales de la red B. Si las corrientes son las mismas, entonces las tensiones deben ser iguales; en otras palabras, si se aplica cierta corriente, que se podría considerar como una fuente de corriente, a la red B entonces la fuente de corriente y la red B constituyen un circuito que tiene una tensión de entrada específica como respuesta. Por lo tanto, la corriente determina la tensión. De manera alternativa, se podría, si así se deseara, demostrar que la tensión en la terminal de B permanece sin cambio, debido a que la tensión determina también de manera única a la corriente. Si la tensión de entrada y la corriente hacia la red B no cambian, se concluye entonces que tampoco varían las corrientes y las tensiones *a lo largo* de la red B.

En primera instancia se demostrará el teorema para el caso en el que la red B está inactiva (sin fuentes independientes). Después de que este paso se haya cumplido, se podría utilizar el principio de superposición para ampliar el teorema, de manera que incluya las redes B que contienen fuentes independientes. Cada red quizá contenga fuentes dependientes, siempre que sus variables de control estén en la misma red.

La corriente i que circula por el conductor superior desde la red A hasta la red B en la figura A3.1a se debe entonces por completo a las fuentes indepen-

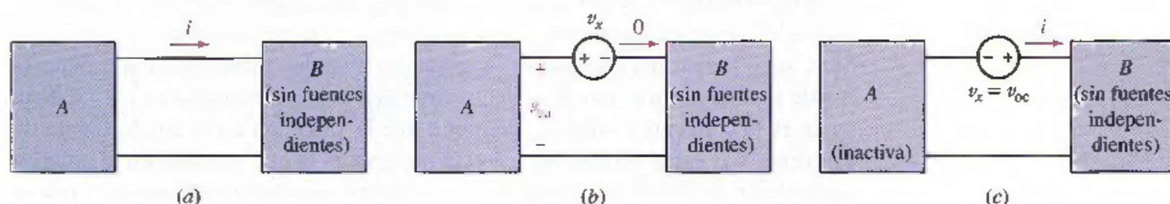


FIGURA A3.1 (a) Redes lineales generales A y B que no contienen fuentes independientes. Los controles de las fuentes dependientes deben aparecer en la misma parte de la red. (b) La fuente de Thévenin se inserta en el circuito y se ajusta hasta que $i = 0$. Ninguna tensión aparece en la red B y por ello $v_x = v_{ca}$. Así, la fuente de Thévenin produce una corriente $-i$ mientras que la red A proporciona i. (c) La fuente de Thévenin está invertida y la red A suprimida. La corriente es, por lo tanto, igual a i.

dientes que están en la red A. Supóngase ahora que se suma una fuente de tensión adicional v_x, la cual se llamará la fuente de Thévenin, en el conductor en el que se mide i como se indica en la figura A3.1b, y luego se ajusta la variación en magnitud y en el tiempo de v_x hasta que la corriente se reduce a cero. Así, por definición de v_{ca}, la tensión en las terminales de A debe ser v_{ca}, puesto que $i = 0$. La red B no contiene fuentes independientes, ni entra corriente a sus terminales; por lo tanto, no hay tensión en las terminales de la red B y aplicando la ley de Kirchhoff de tensión, la tensión de la fuente de Thévenin corresponde a v_{ca} volts, $v_x = v_{ca}$. Además, dado que la fuente de Thévenin y la red A no entregan de manera conjunta corriente a B, y en virtud de que la red A por sí sola entrega una corriente i, la superposición requiere que la fuente de Thévenin que actúa por su cuenta deba entregar una corriente de $-i$ a B. La fuente que actúa sola en una dirección invertida, como en la figura A3.1c, produce, por lo tanto, una corriente i en el hilo de conexión superior. Sin embargo, esta situación es la misma que la conclusión a la que se llegó mediante el teorema de Thévenin: la fuente v_{ca} de Thévenin que actúa en serie con la red A inactiva es equivalente a la red dada.

Considerar el caso donde la red B puede ser una red activa. Pensar que la corriente i, que fluye de la red A a la red B por el conductor superior, estuviera compuesta de dos partes, i_A e i_B, donde i_A es la corriente que produce A cuando actúa sola y la corriente i_B se debe sólo a B cuando actúa sola. La capacidad para dividir la corriente en estos dos componentes es una consecuencia directa de aplicar el principio de superposición a las dos redes *lineales;* la respuesta completa y las dos respuestas parciales se indican mediante los diagramas de la figura A3.2.

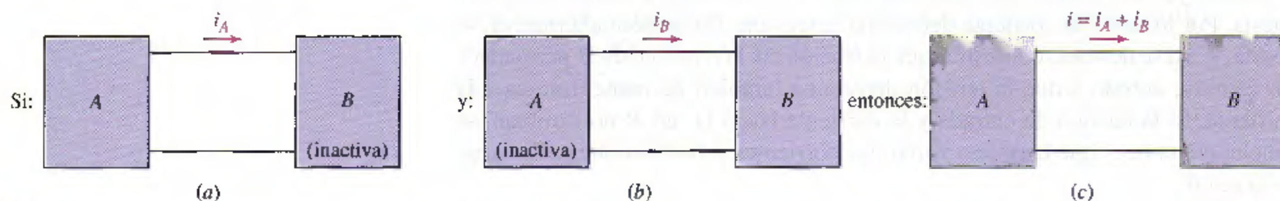


FIGURA A3.2 La superposición permite que la corriente i se considere como la suma de dos respuestas parciales.

La respuesta parcial i_A ya se consideró; si la red B está inactiva, se sabe que se puede sustituir la red A por la fuente de Thévenin y la red A inactiva. En otras palabras, de las tres fuentes que se deben tener presentes —la de A, la de B y la fuente de Thévenin— la respuesta parcial i_A ocurre cuando A y B están inactivas y la fuente de Thévenin se encuentra activa. Para prepararse para el uso de la superposición, se permite que A siga inactiva, aunque se activa B y se desactiva la fuente de Thévenin; por definición, se obtiene la respuesta parcial i_B. Si se superponen los resultados, la respuesta cuando A está inactiva y tanto la fuente de Thévenin como B se encuentran activas, corresponde a $i_A + i_B$. Esta suma es la corriente i original, de modo que la situación en la que la fuente de Thévenin y B están activas pero A está inactiva es la que se desea en el circuito equivalente de Thévenin. De tal modo, se podría sustituir la red activa A por su fuente de Thévenin, la tensión en circuito abierto, en serie con la red A inactiva, sin que importe el estado de la red B, que puede estar activa o inactiva.

TUTORIAL DE PSpice®

SPICE es un acrónimo de Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis (Programa de simulación con énfasis en circuitos integrados). Es un poderoso programa y estándar en la industria que se utiliza en todo el mundo en una gran variedad de aplicaciones de análisis de circuitos. SPICE fue desarrollado originalmente a principios de los años setenta por Donald O. Peterson y sus colegas en la Universidad de California en Berkeley. Es interesante que Peterson permitiera la distribución libre y sin trabas del conocimiento creado en los laboratorios de la universidad, pues eligió provocar un impacto de conocimiento en lugar de sacar provecho económico. En 1984, MicroSim Corporation presentó una versión de SPICE para PC llamada PSpice®, la cual contaba con interfases gráficas intuitivas alrededor del núcleo de las rutinas de software de SPICE. Actualmente existen algunas variantes de SPICE disponibles en el mercado, así como productos de software que compiten con él.

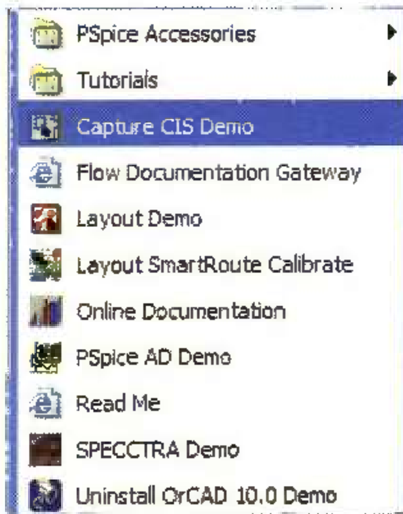
El objetivo de este apéndice es presentar simplemente los fundamentos del análisis de circuitos asistido por computadora; se ofrecen más detalles en el texto así como en las referencias que se presentan bajo el título de lecturas recomendadas. Los temas avanzados que cubren las lecturas complementarias incluyen cómo determinar la sensibilidad de una variable de salida a los cambios en el valor de un componente específico; cómo obtener gráficas de la salida versus un valor de la fuente; determinar la salida de ca como una función de la frecuencia de la fuente; métodos para llevar a cabo análisis de ruido y distorsión; modelos no lineales de componentes; y cómo modelar los efectos de la temperatura en cierto tipos de circuitos.

La adquisición de MicroSim por parte de OrCAD y la subsecuente adquisición de OrCAD por Cadence han generado muchos cambios en este popular paquete de simulación de circuitos. En el momento en el que se escribió este libro, OrCAD 10.3, que es la versión profesional actual, cuesta aproximadamente US$1 000; una versión más modesta llamada OrCAD 10.0 Lite se encuentra disponible gratis en internet (www.cadence.com). Esta nueva versión remplaza a la popular Versión estudiantil 9.1 de PSpice y, aunque es ligeramente distinta, en particular en términos del editado de esquemas, su apariencia debe ser familiar a los usuarios de versiones anteriores de PSpice.

La documentación que acompaña el Demo de la versión OrCAD 10.0 Lite presenta algunas restricciones que no se aplican a la versión profesional (disponible en el mercado). Lo más significativo es que sólo los circuitos que cuentan con 60 o menos partes pueden guardarse y simularse. Sin embargo, es posible ver y dibujar circuitos más grandes. Se ha seleccionado trabajar con el editor de esquemas OrCAD Capture, ya que la versión actual es muy similar al editor de captura de esquemas PSpice A/D. En la actualidad Cadence también ofrece la posibilidad de que PSpice A/D se baje de internet, pero ya no se le proporciona soporte técnico a éste.

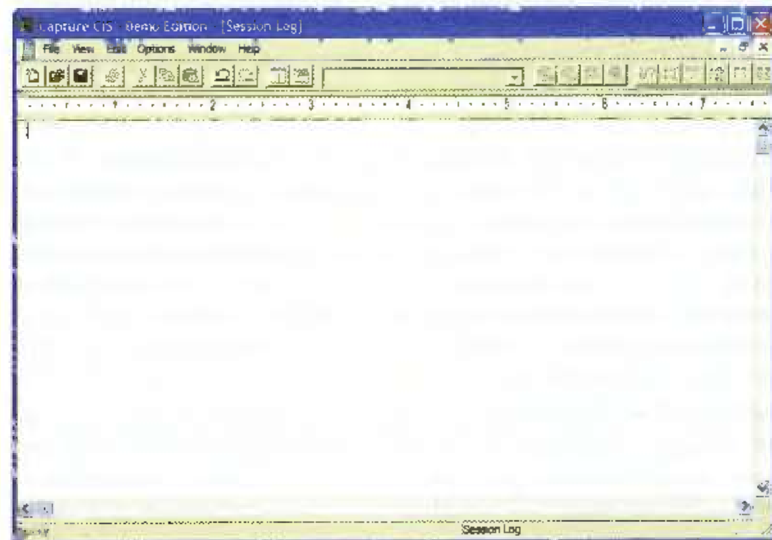
Arranque de PSpice

El análisis de circuitos asistido por computadora consta de tres pasos: 1) dibujo del esquema; 2) simulación del circuito; y 3) extracción de la información de-



■ **FIGURA A4.1** Menú de programas de demostración de Orcad.

seada de los resultados de la simulación. El editor de captura de esquemas de OrCAD arranca a través de la lista de programas de Windows que se encuentra en el menú start, deberá aparecer un menú similar al que se muestra en la figura A4.1. Una vez que se selecciona Capture CIS Demo, el editor de esquemas se abre, como se ve en la figura A4.2.

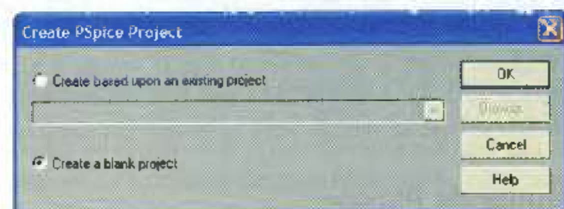


■ **FIGURA A4.2** Ventana de captura del demo CIS.

En el menú **File** seleccionar **New**, después **Project**; aparecerá la ventana de la figura A4.3*a*. Después de que se proporciona un nombre del archivo de simulación y una ruta del directorio, aparecerá la ventana de la figura A4.3*b* (simple-



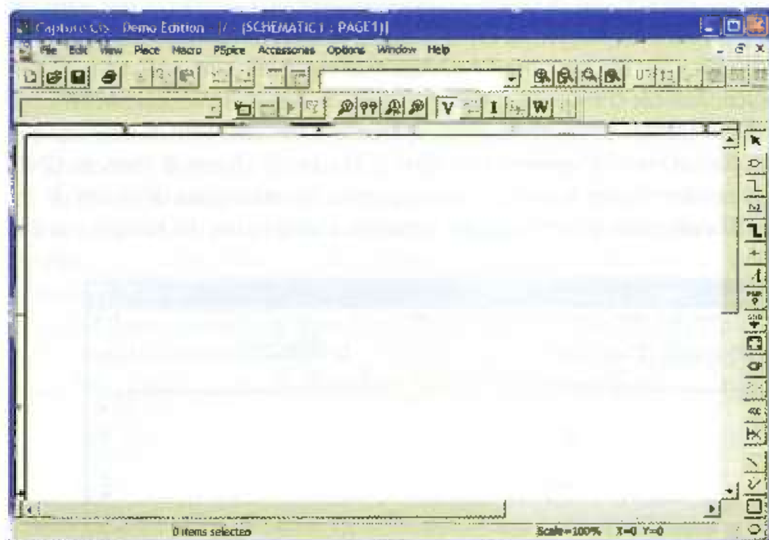
(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA A4.3** (*a*) Ventana New Project. (*b*) Ventana Create PSpice Project.

mente, seleccionar la opción "blank project"). En seguida aparecerá la ventana principal de edición de esquemas, como se muestra en la figura A4.4.



■ **FIGURA A4.4** Página principal de captura esquemática de CIS Demo.

A estas alturas, ya se está listo para dibujar el circuito, por lo que se hará una prueba con el divisor de tensión para propósitos ilustrativos. Primero se colocarán los componentes necesarios en el enrejado y después se cablearán.

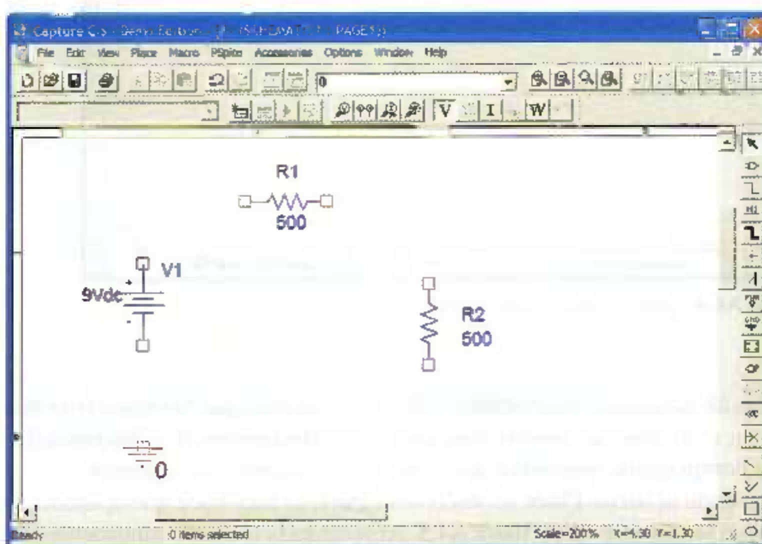
Accediendo al menú **Place** se selecciona **Part**, lo cual hace que aparezca la ventana que se muestra en la figura A4.5. Apretando la tecla en minúsculas "r" como se muestra, se teclea OK y luego se puede mover el símbolo de resistencia por toda la ventana de esquemas mediante el uso del ratón. Un solo clic a la izquierda coloca una resistencia (llamado R1) en donde se encuentra el mouse. Un segundo clic a la izquierda coloca una segunda resistencia en el esquema (llamado R2). Un solo clic a la derecha y seleccionando **End Mode** elimina cualquier otra ubicación de la resistencia. La segunda resistencia no tiene la orientación adecuada, pero se manipula fácilmente resaltándolo con un solo clic a la



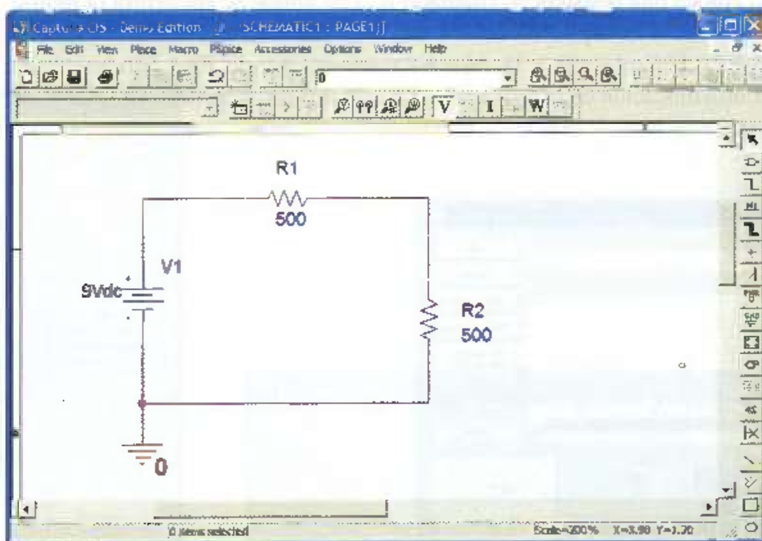
■ **FIGURA A4.5** Menú de colocación de partes.

izquierda, y después tecleando *Ctrl* + R. Si no se sabe el nombre de la parte deseada, se puede navegar a través de la biblioteca de partes que se ofrece al usuario. Si no se desea incluir las resistencias de 1 kΩ —por ejemplo, quizás se deseen dos resistencias de 500 Ω —se pueden cambiar los valores por omisión simplemente haciendo doble clic en "1k" junto al símbolo correspondiente.

Por supuesto que ningún circuito divisor está completo sin una fuente de tensión. Haciendo doble clic en el valor por omisión de 0 Vcd, se selecciona un valor de 9 V para la fuente. Se requiere un componente adicional: SPICE necesita que se especifique un nodo de referencia (o tierra). Haciendo clic en el símbolo GND en el extremo derecho de la ventana de esquemas, se selecciona 0/Source de las opciones. El avance hasta el momento se muestra en la figura A4.6*a*; todo lo que



(*a*)



(*b*)

FIGURA A4.6 (*a*) Componentes colocados en el enrejado. (*b*) Circuito totalmente alambrado y listo para simularse.

queda por hacer es alambrar los componentes entre sí. Esta tarea se lleva a cabo accediendo al menú **Place** y seleccionando **Wire.** Las teclas izquierda y derecha del mouse controlan cada alambre (aquí se requiere un poco de experiencia; después, seleccionar cualquier segmento de alambre no deseado y presionar la tecla Delete). El circuito final se muestra en la figura A4.6*b*. Vale la pena observar que el editor permitirá que el usuario alambre a través de una resistencia (por lo tanto, lo pondrá en cortocircuito), lo cual puede ser difícil de observar. En general aparece un símbolo de advertencia antes de que se coloque el alambre en un lugar equivocado.

Antes de simular el circuito, se salva haciendo clic en el icono save o seleccionando **Save** del menú **File**. Del menú **PSpice** se selecciona **New Simulation Profile**, y se teclea Voltage Divider en la ventana de diálogo que aparece. La ventana de diálogo Simulation Settings que aparece permite definir parámetros para una gran variedad de tipos de simulación; sin embargo, para este ejemplo sólo es necesario seleccionar OK. Una vez más, se accede al menú **PSpice** y se selecciona **Run.** Los resultados de la simulación se muestran en la figura A4.7.

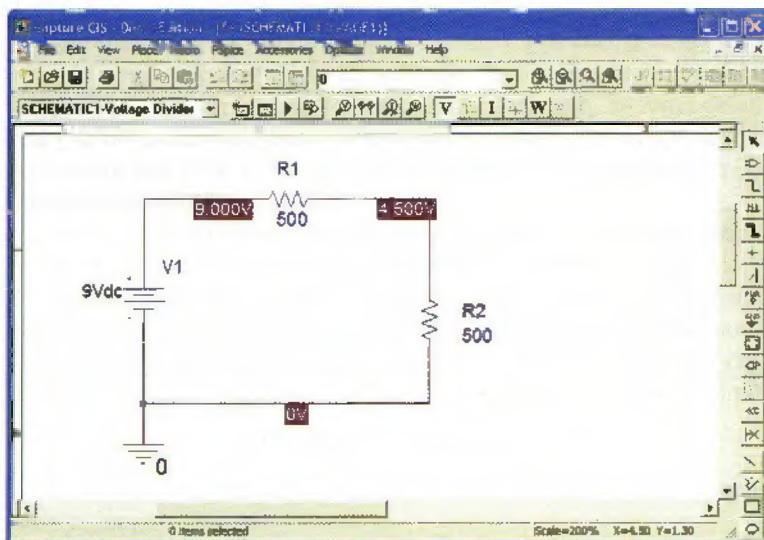


FIGURA A4.7 Resultados de la simulación.

Por fortuna, la simulación que se realizó proporciona los resultados esperados, e incluso permite dividir la tensión de la fuente a través de dos resistencias de igual valor. Asimismo, también se pueden ver los resultados de la simulación seleccionando **View Output File** en el menú **PSpice**. Accediendo al final de este archivo, se observan las líneas siguientes:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(N00157)	9.0000	(N00166)	4.5000

donde el nodo 157 es la referencia positiva de la fuente de tensión, y el nodo 166 es la unión de las dos resistencias. Esta información se encuentra disponible en la parte superior del archivo.

LECTURAS ADICIONALES

Dos libros muy buenos dedicados a la simulación en SPICE y PSpice son

Paul W. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSpice,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, Prentice-Hall, 1995.

Roy W. Goody, *OrCAD PSpice for Windows Volume 1: DC and AC Circuits,* 3a ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, Prentice-Hall, 2001.

Una historia interesante acerca de los simuladores de circuitos, así como las contribuciones de Donald Peterson en este campo se pueden encontrar en

T. Perry, "Donald O. Peterson [electronic engineering biography]", *IEEE Spectrum* **35** (1998), 22–27.

NÚMEROS COMPLEJOS

Este apéndice incluye secciones que abarcan la definición de un número complejo, sus operaciones aritméticas básicas, la identidad de Euler y las formas exponencial y polar de los números complejos. Se presenta primero el concepto de número complejo.

A5.1 NÚMERO COMPLEJO

La preparación previa en matemáticas estuvo relacionada exclusivamente con números reales: 4, $-\frac{2}{7}$ y π, entre otros. Sin embargo, de inmediato aparecen ecuaciones algebraicas como $x^2 = -3$, la cual no podría satisfacer ningún número real. Una ecuación de este tipo se resuelve sólo a través de la introducción de la *unidad imaginaria* o el *operador imaginario,* que se designará con el símbolo j. Por definición, $j^2 = -1$, y por ello, $j = \sqrt{-1}$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, y así sucesivamente. El producto de un número real y del operador imaginario se denomina *número imaginario;* además, la suma de un número real y de un número imaginario se conoce como *número complejo.* De tal manera, un número que tiene la forma $a + jb$, donde a y b son números reales, es un número complejo.

Los matemáticos designan al operador imaginario mediante el símbolo i, pero en ingeniería eléctrica es costumbre utilizar j para evitar confusión con el mismo símbolo de la corriente.

Se designará un número complejo mediante un solo símbolo especial; en esa forma, $\mathbf{A} = a + jb$. La naturaleza compleja del número se indica mediante el uso del tipo de letra en negritas; en textos manuscritos, se acostumbra utilizar una barra sobre la letra. El número complejo **A** que acaba de mostrarse se describe como si tuviera una *componente real* o *parte real* a y una *componente imaginaria* o *parte imaginaria* b. Lo anterior se expresa también como

$$\text{Re}\{\mathbf{A}\} = a \qquad \text{Im}\{\mathbf{A}\} = b$$

La elección de las palabras *imaginaria* y *compleja* es desafortunada. Se utilizan aquí y en la literatura matemática como términos técnicos para designar una clase de números. Ni se justifica ni se intenta interpretar imaginario como "no pertenecer al mundo físico" o complejo como "complicado".

La componente imaginaria de **A** *no* es jb. Por definición, la componente imaginaria es un número real.

Debe observarse que se podría considerar a todos los números reales como números complejos que tienen partes imaginarias iguales a cero. Por lo tanto, los números reales se incluyen en el sistema de los números complejos, de modo que podrían considerarse en esas condiciones como un caso especial. En consecuencia, cuando se definen las operaciones aritméticas fundamentales de los números complejos, se debe esperar que se reduzcan a las definiciones correspondientes de números reales, si la parte imaginaria de todo número complejo se hace igual a cero.

Dado que cualquier número complejo se expresa totalmente por medio de un par de números reales, como a y b en el ejemplo anterior, se obtiene cierto auxilio visual al representar gráficamente un número complejo sobre un sistema de coordenadas rectangular o cartesiano. Si se tiene un eje real y un eje imaginario, como en la figura A5.1, se forma un *plano complejo* o *diagrama de Argand,* sobre el cual cualquier número complejo puede representarse como un solo punto. Se indican los números complejos $\mathbf{M} = 3 + j1$ y $\mathbf{N} = 2 - j2$. Es importante

comprender que este plano complejo sólo es una ayuda visual; no es esencial en lo absoluto para los enunciados matemáticos que siguen.

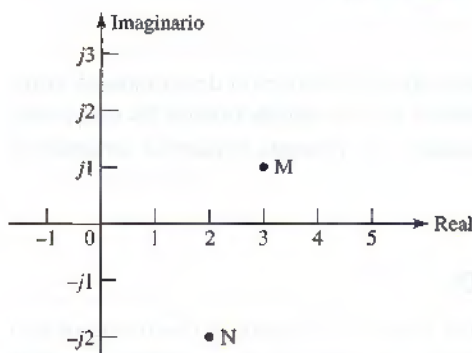


FIGURA A5.1 Los números complejos $\mathbf{M} = 3 + j1$ y $\mathbf{N} = 2 - j2$ se muestran en el plano complejo.

Se definen los números complejos como iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias también lo son. Gráficamente, entonces, para cada punto en el plano complejo corresponde sólo un número complejo, y de manera inversa, para cada número complejo corresponde sólo un punto en el plano complejo. De tal modo, suponer que se dan dos números complejos:

$$\mathbf{A} = a + jb \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = c + jd$$

Entonces, si

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

es necesario que

$$a = c \qquad \text{y} \qquad b = d$$

Un número complejo expresado como la suma de un número real y de un imaginario, como $\mathbf{A} = a + jb$, se dice que está en forma *rectangular* o *cartesiana.* Otras formas de números complejos aparecerán un poco más adelante.

Se definen ahora las operaciones fundamentales de suma, resta, multiplicación y división de números complejos. La suma de dos números complejos se define como el número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales de los dos números complejos y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias de los dos números complejos. Por lo tanto,

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

Por ejemplo,

$$(3 + j4) + (4 - j2) = 7 + j2$$

La diferencia de dos números complejos se calcula de manera similar; por ejemplo,

$$(3 + j4) - (4 - j2) = -1 + j6$$

La suma y la resta de números complejos también se llevan a cabo gráficamente sobre el plano complejo. Cada número complejo se representa como un vector, o un segmento de recta orientado; la suma se obtiene completando el paralelogramo, que se ilustra en la figura A5.2*a*, o conectando la punta y la cola de los vectores, como se muestra en la figura A5.2*b*. Un bosquejo gráfico muchas veces es útil para verificar una solución numérica más exacta.

El producto de dos números complejos se define mediante

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad)$$

Este resultado quizá se obtenga con mayor facilidad mediante la multiplicación directa de dos términos binomiales, utilizando las reglas del álgebra de números reales y simplificando después el resultado al observar que $j^2 = -1$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(3 + j4)(4 - j2) &= 12 - j6 + j16 - 8j^2\\ &= 12 + j10 + 8\\ &= 20 + j10\end{aligned}$$

Es más fácil multiplicar los números complejos mediante este método, en particular si se sustituye de inmediato j^2 por -1, que sustituirlos en la fórmula general que define la multiplicación.

Antes de definir la operación de la división de números complejos, es necesario definir el conjugado de un número complejo. El *conjugado* del número complejo $\mathbf{A} = a + jb$ es $a - jb$ y se representa como $\mathbf{A}^*$. El conjugado de cualquier número complejo, por lo tanto, se obtiene fácilmente con sólo cambiar el signo de la parte imaginaria del número complejo. De tal manera, si

$$\mathbf{A} = 5 + j3$$

entonces

$$\mathbf{A}^* = 5 - j3$$

Resulta evidente que el conjugado de cualquier expresión compleja complicada se encuentra sustituyendo cada término complejo en la expresión por su conjugado, el cual se obtiene al sustituir toda j en la expresión por $-j$.

Las definiciones de suma, resta y multiplicación confirman la validez de los siguientes enunciados: la suma de un número complejo y su conjugado es un número real; la diferencia de un número complejo y su conjugado es un número imaginario; el producto de un número complejo y su conjugado es un número real. También es evidente que si $\mathbf{A}^*$ es el conjugado de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}$ es el conjugado de $\mathbf{A}^*$; en otras palabras, $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^*$. Un número complejo y su conjugado se dice que forman un *par de números complejos conjugados.*

Se define ahora el cociente de dos números complejos:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{(\mathbf{A})(\mathbf{B}^*)}{(\mathbf{B})(\mathbf{B}^*)}$$

y por ello

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

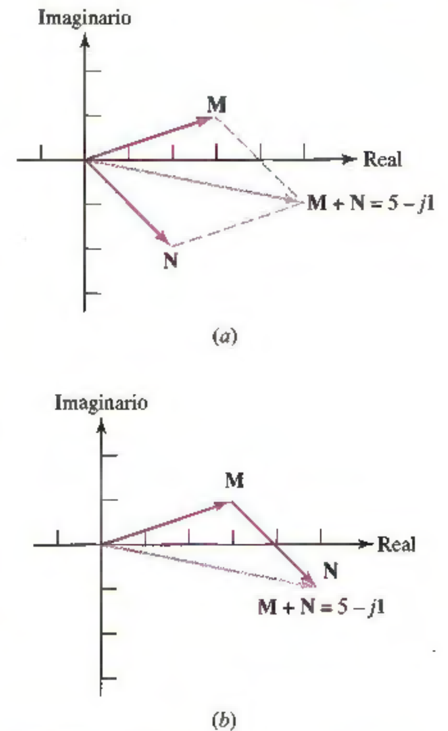


FIGURA A5.2 (*a*) La suma de los números complejos $\mathbf{M} = 3 + j1$ y $\mathbf{N} = 2 - j2$ se obtiene construyendo un paralelogramo. (*b*) La suma de los dos mismos números complejos se determina mediante la combinación de la punta y la cola de los vectores.

Inevitablemente, en un problema físico un número complejo se acompaña, de alguna forma, por su conjugado.

Se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador para obtener un denominador real; este proceso se denomina *racionalizar el denominador.* Como un ejemplo numérico

$$\frac{3+j4}{4-j2} = \frac{(3+j4)(4+j2)}{(4-j2)(4+j2)}$$
$$= \frac{4+j22}{16+4} = 0.2 + j1.1$$

La suma o resta de dos números complejos que se expresan en forma rectangular es una operación relativamente simple; sin embargo, la multiplicación o división de dos números complejos en forma rectangular es más bien un proceso improductivo. Se encontrará que estas dos últimas operaciones resultan mucho más simples cuando los números complejos se dan en forma exponencial o polar. Estas formas se presentarán en las secciones A5.3 y A5.4.

PRÁCTICA

A5.1 Sean $\mathbf{A} = -4 + j5$, $\mathbf{B} = 3 - j2$ y $\mathbf{C} = -6 - j5$, determinar: (*a*) $\mathbf{C} - \mathbf{B}$; (*b*) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 5\mathbf{C}$; (*c*) $j^5\mathbf{C}^2(\mathbf{A} + \mathbf{B})$; (*d*) $\mathbf{B}\,\text{Re}[\mathbf{A}] + \mathbf{A}\,\text{Re}[\mathbf{B}]$.

A5.2 Utilizando los mismos valores de **A**, **B**, y **C** del problema anterior, encontrar: (*a*) $[(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*)^*]^*$; (*b*) $(1/\mathbf{C}) - (1/\mathbf{B})^*$; (*c*) $(\mathbf{B} + \mathbf{C})/(2\mathbf{BC})$.

Respuestas: A5.1: $-9 - j3$; $-47 - j9$; $27 - j191$; $-24 + j23$. A5.2: $-j60$; $-0.329 + j0.236$; $0.0662 + j0.1179$.

A5.2 IDENTIDAD DE EULER

En el capítulo 9 se encontraron funciones del tiempo que contienen números complejos, así que es de interés la diferenciación e integración de tales funciones con respecto de la variable real t. Se diferenciaron e integraron estas funciones respecto de t mediante los mismos procedimientos empleados para las funciones de tiempo reales. Esto es, las constantes complejas se tratan exactamente como si fueran constantes reales cuando se efectúan las operaciones de diferenciación o integración. Si $\mathbf{f}(t)$ es una función compleja del tiempo, tal como

$$\mathbf{f}(t) = a\cos ct + jb\,\text{sen}\,ct$$

entonces

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = -ac\,\text{sen}\,ct + jbc\cos ct$$

y

$$\int \mathbf{f}(t)\,dt = \frac{a}{c}\,\text{sen}\,ct - j\frac{b}{c}\cos ct + \mathbf{C}$$

donde la constante de integración **C** es un número complejo en general.

Algunas veces se requiere diferenciar o integrar una función de una variable compleja respecto de esa variable compleja. En general, el éxito de cualquiera de estas operaciones requiere que la función que se va a diferenciar o a integrar

satisfaga ciertas condiciones. Todas nuestras funciones las cumplen, así que la integración o la diferenciación con respecto a una variable compleja se obtienen a través de métodos idénticos a los usados para variables reales.

En este momento se debe utilizar una relación fundamental muy importante, que se conoce como identidad de Euler. Se demostrará esta identidad, pues resulta muy útil al representar un número complejo en otra forma que no sea la rectangular.

La prueba se basa en los desarrollos en series de potencia de $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ y e^z, que se dan en las contratapas de cualquier libro de cálculo universitario favorito del lector:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

o

$$\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

y

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

por lo que

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

Se concluye que

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\operatorname{sen}\theta \qquad [1]$$

o, si $z = -j\theta$, se puede ver que

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\operatorname{sen}\theta \qquad [2]$$

Sumando y restando las ecuaciones [1] y [2], se obtienen las dos expresiones que se usaron, sin demostrarlas, en el estudio de la respuesta natural subamortiguada de los paralelos y series de circuitos *RLC*,

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \qquad [3]$$

$$\operatorname{sen}\theta = -j\tfrac{1}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \qquad [4]$$

PRÁCTICA

A5.3 Recurrir a las ecuaciones [1] a la [4] para evaluar: (*a*) e^{-j1}; (*b*) e^{1-j1}; (*c*) $\cos(-j1)$; (*d*) $\operatorname{sen}(-j1)$.

A5.4 Evaluar en $t = 0.5$: (*a*) $(d/dt)(3\cos 2t - j2\operatorname{sen}2t)$; (*b*) $\int_0^t (3\cos 2t - j2\operatorname{sen}2t)\,dt$; evaluar $\mathbf{s} = 1 + j2$: (*c*) $\int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{s}^{-3}\,d\mathbf{s}$; (*d*) $(d/d\mathbf{s})[3/(\mathbf{s}+2)]$.

Respuestas: A5.3: $0.540 - j0.841$; $1.469 - j2.29$; 1.543; $-j1.175$. A5.4: $-5.05 - j2.16$; $1.262 - j0.460$; $-0.06 - j0.08$; $-0.0888 + j0.213$.

A5.3 FORMA EXPONENCIAL

Se tomará ahora la identidad de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta$$

y se multiplicará cada lado por el número real positivo C:

$$Ce^{j\theta} = C\cos\theta + jC\,\text{sen}\,\theta \qquad [5]$$

El lado derecho de la ecuación [5] consta de la suma de un número real y uno imaginario, por lo cual representa un número complejo en forma rectangular. Se llamará a este número **A**, donde $\mathbf{A} = a + jb$. Al igualar las partes reales,

$$a = C\cos\theta \qquad [6]$$

y las partes imaginarias

$$b = C\,\text{sen}\,\theta \qquad [7]$$

al elevar al cuadrado y sumar después las ecuaciones [6] y [7],

$$a^2 + b^2 = C^2$$

o

$$C = +\sqrt{a^2 + b^2} \qquad [8]$$

y dividiendo la ecuación [7] entre la ecuación [6]:

$$\frac{b}{a} = \tan\theta$$

o

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \qquad [9]$$

se obtienen las relaciones de las ecuaciones [8] y [9], las que permiten determinar C y θ a partir del conocimiento de a y b. Por ejemplo, si $\mathbf{A} = 4 + j2$, entonces se identifica a a como 4 y a b como 2 y se determinan C y θ:

$$C = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.47$$
$$\theta = \tan^{-1}\tfrac{2}{4} = 26.6^\circ$$

Es posible utilizar esta nueva información para escribir **A** en la forma

$$\mathbf{A} = 4.47\cos 26.6^\circ + j4.47\,\text{sen}\,26.6^\circ$$

pero es la forma del lado izquierdo de la ecuación [5] la que demuestra ser más útil:

$$\mathbf{A} = Ce^{j\theta} = 4.47e^{j26.6^\circ}$$

Un número complejo que se expresa de esta manera se dice que está en *forma exponencial*. El factor multiplicador positivo real C se conoce como *amplitud* o *magnitud,* y la cantidad real θ que aparece en el exponente se denomina *argumento* o *ángulo*. Un matemático expresaría siempre θ en radianes y escribiría

$$\mathbf{A} = 4.47e^{j0.464}$$

aunque los ingenieros suelen trabajar en términos de grados. El uso del símbolo de grados (°) en el exponente hará imposible la confusión.

Para recapitular, si se tiene un número complejo que se da en forma rectangular

$$\mathbf{A} = a + jb$$

y se desea expresarlo en forma exponencial

$$\mathbf{A} = Ce^{j\theta}$$

se podría determinar C y θ mediante las ecuaciones [8] y [9]. Si está indicado el número complejo en forma exponencial, entonces se determinaría a y b a partir de las ecuaciones [6] y [7].

Cuando **A** se expresa en términos de valores numéricos, la transformación entre las formas exponencial (o polar) y rectangular se dispone como una operación integrada en la mayor parte de las calculadoras científicas de mano.

Aparecerá una pregunta al determinar el ángulo o utilizar la relación arcotangente de la ecuación [9]. Esta función es multivaluada, por lo que se requiere elegir un ángulo apropiado, entre varias posibilidades. Un método mediante el cual se podría efectuar la elección consiste en escoger un ángulo para el que el seno y el coseno tienen los signos apropiados para obtener los valores requeridos de a y de b de las ecuaciones [6] y [7]. Por ejemplo, se va a convertir

$$\mathbf{V} = 4 - j3$$

en la forma exponencial. La amplitud es

$$C = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

y el ángulo corresponde a

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-3}{4} \qquad [10]$$

Se debe elegir un valor de θ con el que se obtiene un valor positivo de $\cos\theta$, pues $4 = 5\cos\theta$, y un valor negativo para $\operatorname{sen}\theta$, puesto que $-3 = 5\operatorname{sen}\theta$. Por lo tanto, se obtiene $\theta = -36.9°, 323.1°, -396.9°$, etc. Cualesquiera de estos ángulos es correcto, así que se suele elegir el más simple, en este caso $-36.9°$. Se debe advertir que la solución alternativa de la ecuación [10], $\theta = 143.1°$, no es correcta, en virtud de que $\cos\theta$ es negativo y $\operatorname{sen}\theta$ positivo.

Se dispone de un método más simple para seleccionar el ángulo correcto si se representa de manera gráfica el número complejo en el plano complejo. Se selecciona primero un número complejo, dado en forma rectangular, $\mathbf{A} = a + jb$, que se ubica en el primer cuadrante del plano complejo, como se ilustra en la figura A5.3. Si se dibuja una línea desde el origen hasta el punto que representa el número complejo, se habrá construido un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es evidentemente la amplitud de la representación exponencial del número complejo. En otras palabras, $C = \sqrt{a^2 + b^2}$. Además, se observa que el ángulo en dirección contraria al de las manecillas del reloj, formado por la línea y el eje real positivo, corresponde al ángulo θ de la representación exponencial, debido a que $a = C\cos\theta$ y $b = C\operatorname{sen}\theta$. Ahora bien, si se indica la forma rectangular de un número complejo que se ubica en otro cuadrante, como $\mathbf{V} = 4 - j3$, el ángulo correcto resulta gráficamente evidente, ya sea $-36.9°$ o $323.1°$ en este ejemplo. Muchas veces el dibujo puede visualizarse y no necesita dibujarse.

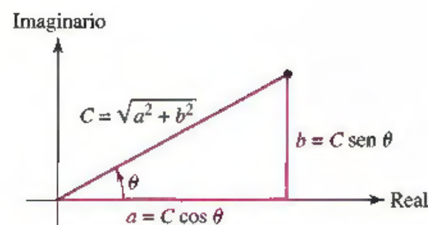


FIGURA A5.3 Un número complejo se representa mediante un punto en el plano complejo, con la elección de las partes real e imaginaria correctas a partir de la forma rectangular, o eligiendo la magnitud y el ángulo a partir de la forma exponencial.

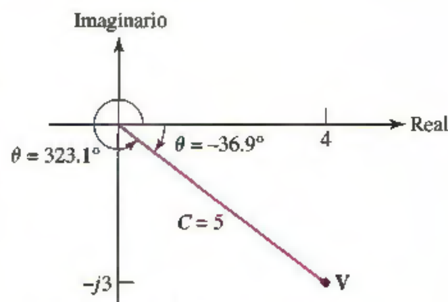


FIGURA A5.4 El número complejo $\mathbf{V} = 4 - j3 = 5e^{-j36.9°}$ se representa en el plano complejo.

Si la forma rectangular del número complejo tiene una parte real negativa, a menudo es más fácil trabajar con el negativo del número complejo, con lo cual se evitan ángulos de magnitud mayor que 90°. Por ejemplo, dado

$$\mathbf{I} = -5 + j2$$

se escribe

$$\mathbf{I} = -(5 - j2)$$

y se transforma entonces $(5 - j2)$ a la forma exponencial:

$$\mathbf{I} = -Ce^{j\theta}$$

donde

$$C = \sqrt{29} = 5.39 \qquad \text{y} \qquad \theta = \tan^{-1} \tfrac{-2}{5} = -21.8^\circ$$

Por lo tanto, se tiene

$$\mathbf{I} = -5.39e^{-j21.8^\circ}$$

Se eliminaría el signo negativo del número complejo si se incrementa o disminuye el ángulo en 180°, como se muestra mediante referencia a un dibujo en el plano complejo. De tal manera, el resultado se expresa en la forma exponencial como

$$\mathbf{I} = 5.39e^{j158.2^\circ} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{I} = 5.39e^{-j201.8^\circ}$$

Obsérvese que el uso de una calculadora electrónica en el modo de tangente inversa siempre produce ángulos que tienen magnitudes menores que 90°. Así, $\tan^{-1}[(-3)/4]$ y $\tan^{-1}[3/(-4)]$ dan como resultado $-36.9°$. Sin embargo, las calculadoras que proporcionan la conversión rectangular-polar muestran el ángulo correcto en todos los casos.

Es necesario señalar una última anotación en lo que respecta a la representación exponencial de un número complejo. Dos números complejos, escritos en forma exponencial, son iguales si y sólo si sus amplitudes son iguales y sus ángulos son equivalentes. Los ángulos equivalentes son los que difieren por múltiplos de 360°. Por ejemplo, si $\mathbf{A} = Ce^{j\theta}$ y $\mathbf{B} = De^{j\phi}$, entonces si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se requiere que $C = D$ y $\theta = \phi \pm (360^\circ)n$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

PRÁCTICA

A5.5 Expresar cada uno de los siguientes números complejos en forma exponencial utilizando el ángulo que está en el intervalo $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$; (*a*) $-18.5 - j26.1$; (*b*) $17.9 - j12.2$; (*c*) $-21.6 + j31.2$.

A5.6 Expresar cada uno de estos números complejos en forma rectangular: (*a*) $61.2e^{-j111.1^\circ}$; (*b*) $-36.2e^{j108^\circ}$; (*c*) $5e^{-j2.5}$.

Respuestas: A5.5: $32.0e^{-j125.3^\circ}$; $21.7e^{-j34.3^\circ}$; $37.9e^{j124.7^\circ}$. A5.6: $-22.0 - j57.1$; $11.19 - j34.4$; $-4.01 - j2.99$.

A5.4 FORMA POLAR

La tercera (y última) forma en la que se representa un número complejo es esencialmente la misma que la forma exponencial, salvo por una pequeña diferencia en el simbolismo. Se usa un signo de ángulo ($\angle$) para sustituir la

combinación e^j. De tal modo, la representación exponencial de un número complejo **A**,

$$\mathbf{A} = Ce^{j\theta}$$

podría escribirse de una manera más concisa como

$$\mathbf{A} = C\underline{/\theta}$$

Se dice en estas condiciones que el número complejo se expresará en forma *polar*, un nombre que sugiere la representación de un punto en un plano (complejo) mediante el uso de coordenadas polares.

Resulta claro que la transformación de la forma rectangular a la polar, o de la polar a la rectangular, es básicamente lo mismo que la transformación entre la forma rectangular y la exponencial. La misma relación existe entre C, θ, a y b.

El número complejo

$$\mathbf{A} = -2 + j5$$

se escribe entonces en la forma exponencial como

$$\mathbf{A} = 5.39e^{j111.8^\circ}$$

y en forma polar como

$$\mathbf{A} = 5.39\underline{/111.8^\circ}$$

Para apreciar la utilidad de las formas exponencial y polar, se considerará la multiplicación y la división de dos números complejos representada en forma exponencial o polar. Si se proporciona

$$\mathbf{A} = 5\underline{/53.1^\circ} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = 15\underline{/-36.9^\circ}$$

entonces la expresión de estos dos números complejos en forma exponencial

$$\mathbf{A} = 5e^{j53.1^\circ} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = 15e^{-j36.9^\circ}$$

permite escribir el producto de un número complejo en forma exponencial, cuya amplitud es el producto de las amplitudes y cuyo ángulo es la suma algebraica de los ángulos, de acuerdo con las reglas normales de la multiplicación de dos cantidades exponenciales:

$$(\mathbf{A})(\mathbf{B}) = (5)(15)e^{j(53.1^\circ - 36.9^\circ)}$$

o

$$\mathbf{AB} = 75e^{j16.2^\circ} = 75\underline{/16.2^\circ}$$

De la definición de la forma polar, resulta evidente que

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = 0.333\underline{/90^\circ}$$

La suma y la resta de números complejos se consigue con mayor facilidad si se trabaja con los números complejos en forma rectangular; por lo tanto, la suma o resta de dos números complejos dada en forma exponencial o polar debe empezar con la conversión de los dos números complejos en la forma rectangular. Esta situación se aplica de manera inversa a la multiplicación y la división; dos números dados en forma rectangular deben transformarse a la forma polar, a menos que los números sean enteros pequeños. Por ejemplo, si se desea multi-

plicar $(1 - j3)$ por $(2 + j1)$, es más fácil multiplicarlos como están y obtener $(5 - j5)$. Si los números se multiplican mentalmente, se desperdicia entonces el tiempo en transformarlos en la forma polar.

Ahora se requiere un esfuerzo para familiarizar al lector con las tres diferentes formas en las que los números complejos se expresan, así como con la conversión rápida de una forma a otra. Las relaciones entre las tres formas parecen casi interminables, pero la larga ecuación siguiente resume las diferentes interrelaciones:

$$\mathbf{A} = a + jb = \mathrm{Re}[\mathbf{A}] + j\mathrm{Im}[\mathbf{A}] = Ce^{j\theta} = \sqrt{a^2 + b^2}e^{j\tan^{-1}(b/a)}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\underline{/\tan^{-1}(b/a)}$$

La mayor parte de las conversiones de una forma a otra puede efectuarse con rapidez con la ayuda de calculadoras, y muchas de éstas pueden resolver ecuaciones lineales con números complejos.

Se podrá observar que los números complejos son un artificio matemático conveniente que facilita el análisis de las situaciones físicas reales.

PRÁCTICA

A5.7 Expresar el resultado de cada una de estas manipulaciones de números complejos en forma polar, utilizando seis cifras significativas, sólo por disfrutar del cálculo: (*a*) $[2 - (1\underline{/-41^\circ})]/(0.3\underline{/41^\circ})$; (*b*) $50/(2.87\underline{/83.6^\circ} + 5.16\underline{/63.2^\circ})$; (*c*) $4\underline{/18^\circ} - 6\underline{/-75^\circ} + 5\underline{/28^\circ}$.

A5.8 Determinar $\mathbf{Z}$ en forma rectangular si: (*a*) $\mathbf{Z} + j2 = 3/\mathbf{Z}$; (*b*) $\mathbf{Z} = 2\ln(2 - j3)$; (*c*) sen $\mathbf{Z} = 3$.

Respuestas: A5.7: $4.69179\underline{/-13.2183^\circ}$; $6.318\,33\underline{/-70.4626^\circ}$; $11.5066\underline{/54.5969^\circ}$. A5.8: $\pm 1.414 - j1$; $2.56 - j1.966$; $1.571 \pm j1.763$.

UN BREVE TUTORIAL DE MATLAB®

La intención de este tutorial consiste en ofrecer una muy breve introducción relativa a algunos conceptos básicos necesarios para utilizar un programa de cómputo increíblemente poderoso conocido como MATLAB. Su uso es una parte totalmente optativa del material incluido en este libro de texto, pero como se ha convertido en una herramienta cada vez más común en todas las áreas de la ingeniería eléctrica, creemos que vale la pena dar oportunidad a los estudiantes para que empiecen a explorar algunas de las características de este programa, en particular la elaboración de gráficas de funciones en dos y tres dimensiones, la realización de operaciones con matrices, la solución de ecuaciones simultáneas y la manipulación de expresiones algebraicas. Muchas instituciones proporcionan ahora la versión completa de MATLAB a sus estudiantes, aunque en la época en que se escribió este texto se podría obtener una versión estudiantil a un costo bastante reducido en The MathWorks, Inc. (http://www.mathworks.com/academia/student_version/).

Antes de empezar

MATLAB se ejecuta por lo común al hacer clic en el icono del programa; la ventana de apertura característica se muestra en la figura A6.1. Los programas se corren a partir de archivos o introduciendo de manera directa los comandos en la ventana. MATLAB cuenta también con amplios recursos de ayuda en línea, lo que resulta útil tanto para los principiantes como para los usuarios avanzados. Los programas característicos de MATLAB se asemejan mucho a los programas escritos en C, aunque de ninguna manera se requiere la familiaridad con este lenguaje.

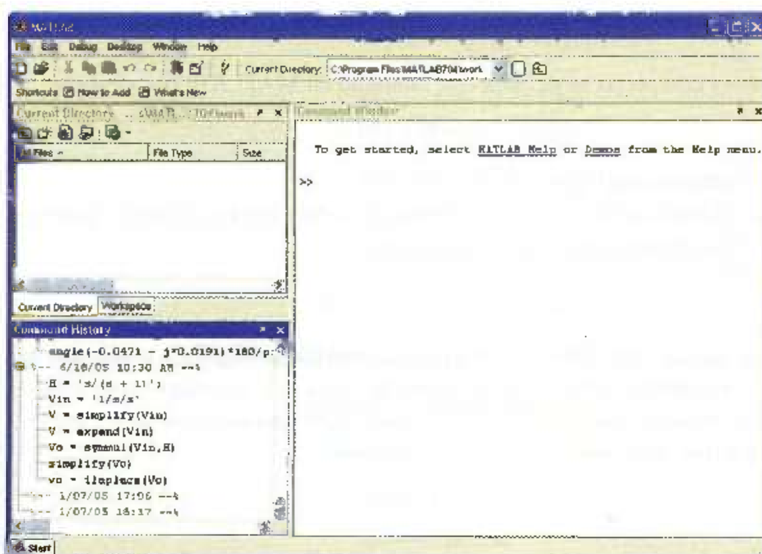


FIGURA A6.1 Ventana de comandos de MATLAB que aparece en el momento en el que se arranca.

Variables y operaciones matemáticas

MATLAB tiene más sentido luego de que el usuario se da cuenta de que todas las variables son matrices, aun cuando sean simplemente matrices de 1×1. Los nombres de las variables pueden tener hasta 19 caracteres de longitud, lo cual es de suma utilidad para construir programas con legibilidad adecuada. El primer carácter debe ser una letra, aunque el resto tiene la posibilidad de corresponder a cualquier letra o número; también se puede utilizar el carácter (_). Los nombres de las variables en MATLAB distinguen las mayúsculas. MATLAB incluye varias variables predefinidas; las más importantes, en cuanto al material presentado en texto, incluyen:

eps	Precisión de la máquina
realmin	Número de punto flotante más pequeño (positivo) que maneja la computadora
realmax	Número de punto flotante más grande que maneja la computadora
inf	Infinito (definido como 1/0)
NaN	Literalmente, "no es un número". Esto incluye situaciones tales como 0/0
pi	π (3.14159 . . . .)
i, *j*	Ambas se definen inicialmente como $\sqrt{-1}$. El usuario puede asignarles otros valores.

Una lista completa de las variables definidas en la actualidad se obtiene mediante el comando *who*. Las variables se asignan utilizando un signo igual (=). Si el enunciado se termina con un punto y coma (;), entonces aparece otro indicador; si termina simplemente mediante un retorno de carro (es decir, oprimiendo la tecla Enter), entonces se repite la variable. Por ejemplo:

El tono claro se utiliza para diferenciar el texto generado por el programa de aquel generado por el usuario para conveniencia sólo del lector.

```
EDU» input_voltage = 5;
EDU» input_current = 1e−3

input_current =

1.0000e−003

EDU»
```

Las variables complejas se definen con facilidad en MATLAB; por ejemplo,

```
EDU» s = 9 + j*5;
```

crea una variable compleja s con valor $9 + j5$.

Una matriz distinta de la de 1×1 se define con corchetes. Por ejemplo, la matriz $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ en MATLAB se expresaría como:

```
EDU» t = [2   − 1; 3   0];
```

Obsérvese que los elementos de la matriz se introducen renglón por renglón; los elementos de renglón se separan mediante un espacio y los renglones mediante un punto y coma (;). Se dispone de las mismas operaciones aritméticas para matrices, por lo que se puede determinar $t + t$ como

```
EDU» t + t

ans =

   4   −2
   6    0
```

Los operadores aritméticos incluyen:

^	potencia	\	división izquierda
*	multiplicación	+	suma
/	división derecha (ordinaria)	−	resta

El orden de las operaciones es importante. El orden de precedencia es la potencia, luego la multiplicación y la división, después la suma y la resta.

```
EDU» x = 1 + 5 ^ 2 * 3

x =

76
```

El concepto de división izquierda puede parecer en un principio extraño, aunque es muy útil en el álgebra de matrices. Por ejemplo,

```
EDU» 1/5

ans =

0.2000
EDU» 1\5
ans =
5
EDU» 5\1
ans =
0.2000
```

Y, en el caso de la ecuación matricial **Ax** = **B**, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ se encuentra } \mathbf{x} \text{ con}$$

```
EDU» A = [2 4; 1 6];
EDU» B = [-1; 2];
EDU» x = A\B

x =

-1.7500
 0.6250
```

De manera alternativa, se puede escribir también

```
EDU» x = A^-1*B

x =

-1.7500
 0.6250
```

o

```
EDU» inv(A)*B

ans =

   -1.7500
    0.6250
```



Cuando exista duda, el paréntesis quizá resulte de gran utilidad.

Algunas funciones útiles

Los requerimientos de espacio evitan que se presenten todas las funciones contenidas en MATLAB. Algunas de las más básicas incluyen:

abs(x)	$\lvert x \rvert$	log 10(x)	$\log_{10} x$		
exp(x)	e^x	sen(x)	sen x	asen(x)	$\text{sen}^{-1} x$
sqrt(x)	$\sqrt{x}$	cos(x)	$\cos x$	acos(x)	$\cos^{-1} x$
log(x)	$\ln x$	tan(x)	$\tan x$	atan(x)	$\tan^{-1} x$

Las funciones útiles para manejar variables complejas incluyen:

real(s)	Re{s}
imag(s)	Im{s}
abs(s)	$\sqrt{a^2 + b^2}$, donde s $\equiv a + jb$
angle(s)	$\tan^{-1}(b/a)$, donde s $\equiv a + jb$
conj(s)	complejo conjugado de s

Otro comando muy útil, que a menudo se olvida, es simplemente *help*.

En ocasiones se requiere de un vector, como cuando se planea crear una gráfica. El comando *linspace*(mín, máx, número de puntos) resulta invaluable en esas situaciones:

```
EDU» frequency = linspace(0,10,5)

frequency =

     0    2.5000    5.0000    7.5000    10.0000
```

Un pariente útil es el comando *logspace*().

Generación de gráficas

Graficar con MATLAB es muy sencillo. Por ejemplo, la figura A6.2 presenta el resultado de ejecutar el siguiente programa de MATLAB:

```
EDU» x = linspace(0,2*pi,100);
EDU» y = sen(x);
EDU» plot(x,y);
EDU» xlabel('Angle (radians)');
EDU» ylabel('f(x)');
```

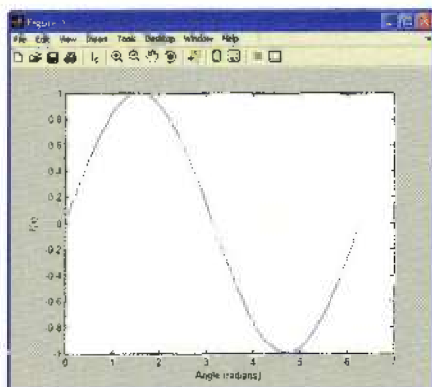


FIGURA A6.2 Ejemplo de una gráfica de sen(x), $0 < x < 2\pi$, generada utilizando MATLAB. La variable x es un vector compuesto por 100 elementos igualmente espaciados.

Escritura de programas

En este libro, aunque los ejemplos de MATLAB se presentan como líneas tecleadas en la ventana Command, es factible (y a menudo prudente, si la repetición es un problema) escribir un programa de tal forma que los cálculos sean más sencillos. Esto se lleva a cabo en MATLAB escribiendo lo que se conoce como m-file. Un m-file es simplemente un archivo de texto guardado con la extensión ".m" (por ejemplo, first_program.m). En respeto a Kernighan y Ritchie, se accede a **New M-File** en el menú **File**, el cual abre el editor de m-file. (Obsérvese que se puede utilizar otro editor si se prefiere, por ejemplo el WordPad.)

Se teclea en

r = input('Hello, World')

como se muestra en la figura A6.3.

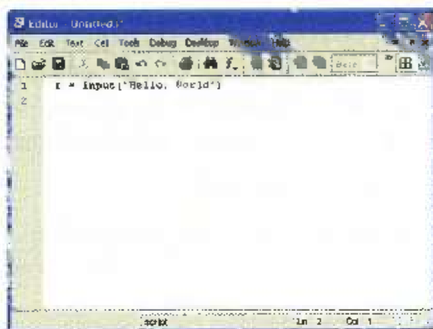


FIGURA A6.3 Ejemplo de un m-file creado en el editor de m-file.

Enseguida se guarda como first_programa.m en un directorio apropiado, y después se cierra el editor. En el menú **File** se selecciona **Open**, y se busca el first_program.m. Lo anterior vuelve a abrir el editor (por lo que se pudo haber evitado cerrarlo antes). Se corre el programa oprimiendo la tecla F5 o seleccionando **Run** dentro del menú **Debug**. En la ventana Command se podrá ver el saludo; MATLAB está esperando una respuesta por parte del teclado, así que teclee el botón Intro.

Se va a extender un ejemplo anterior para permitir que la magnitud sea seleccionable por parte del usuario, como en la figura A6.4. En este momento es posible que el usuario ingrese una amplitud arbitraria en la gráfica.

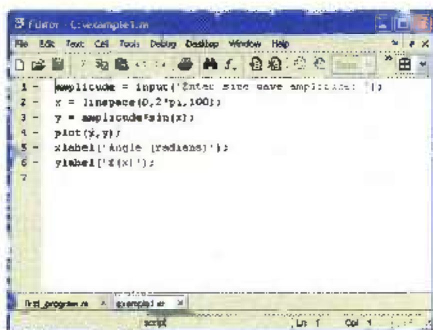


FIGURA A6.4 Ejemplo de un m-file llamado example1.m para la generación de una gráfica de una onda senoidal.

Se deja al lector que decida cuándo escribir una programa/m-file y cuándo utilizar simplemente la ventana Command directamente.

LECTURAS ADICIONALES

Existe un gran número de referencias excelentes acerca de MATLAB disponibles y nuevos títulos aparecen de forma regular. Dos que valen la pena son

D. C. Hanselman y B. Littlefield, *Mastering MATLAB 7*. Upper Saddle River, NJ.: Prentice Hall, 2005.

W. J. Palm, *Introduction to MATLAB 7 for Engineers,* 2a. ed. Nueva York: Mc-Graw-Hill, 2005.

TEOREMAS ADICIONALES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En este apéndice se presentan, en forma abreviada, varios teoremas de la transformada de Laplace que se usan por lo común en situaciones más avanzadas, aparte de las que se describieron en el capítulo 14.

Transformadas de funciones de tiempo periódicas

El teorema de corrimiento (desplazamiento) del tiempo es muy útil para evaluar la transformada de funciones de tiempo periódicas. Supóngase que $f(t)$ es periódica con un periodo T para valores positivos de t. Como se sabe, el comportamiento de $f(t)$ para $t < 0$ no tiene efecto en la transformada de Laplace (unilateral). Por lo tanto, $f(t)$ se escribe como

$$f(t) = f(t - nT) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si se define ahora una nueva función de tiempo distinta de cero, sólo en el primer periodo de $f(t)$,

$$f_1(t) = [u(t) - u(t - T)]f(t)$$

entonces la $f(t)$ original se representa como la suma de un número infinito de este tipo de funciones, retrasadas por múltiplos enteros de T. Esto es,

$$\begin{aligned} f(t) &= [u(t) - u(t - T)]f(t) + [u(t - T) - u(t - 2T)]f(t) \\ &\quad + [u(t - 2T) - u(t - 3T)]f(t) + \cdots \\ &= f_1(t) + f_1(t - T) + f_1(t - 2T) + \cdots \end{aligned}$$

o

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t - nT)$$

La transformada de Laplace de esta suma es exactamente la suma de las transformadas

$$\mathbf{F(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{f_1(t - nT)\}$$

de modo que el teorema de desplazamiento en el tiempo da como resultado

$$\mathbf{F(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT\mathbf{s}}\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$$

donde

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f_1(t)\} = \int_{0^-}^{T} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\,dt$$

Puesto que $\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$ no es una función de n, se elimina de la sumatoria, y $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ se convierte en

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{s})[1 + e^{-T\mathbf{s}} + e^{-2T\mathbf{s}} + \cdots]2$$

Cuando se aplica el teorema del binomio a la expresión entre corchetes, ésta se simplifica como $1/(1 - e^{-T\mathbf{s}})$. De tal modo, se concluye que la función periódica $f(t)$, con periodo T, tiene una transformada de Laplace expresada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{F}_1(\mathbf{s})}{1 - e^{-T\mathbf{s}}} \qquad [1]$$

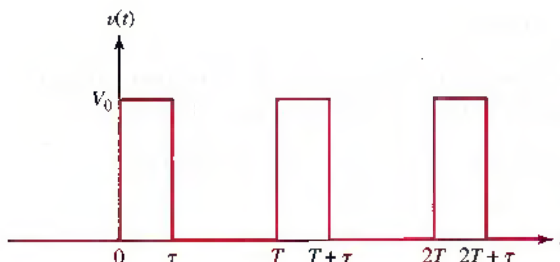
donde

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{[u(t) - u(t - T)]f(t)\} \qquad [2]$$

es la transformada del primer periodo de la función de tiempo.

Para ilustrar el uso de este teorema de transformada en el caso de funciones periódicas, se aplicará el familiar tren de curso rectangular, fig. A7.1. Se podría describir esta función periódica de manera analítica:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_0[u(t - nT) - u(t - nT - \tau)] \qquad t > 0$$



■ **FIGURA A7.1** Tren periódico de pulsos rectangulares para el que $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = (V_0/\mathbf{s})(1 - e^{-\mathbf{s}\tau})/(1 - e^{-\mathbf{s}T})$.

Es simple calcular la función $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) = V_0 \int_{0^-}^{\tau} e^{-\mathbf{s}t}\, dt = \frac{V_0}{\mathbf{s}}(1 - e^{-\mathbf{s}\tau})$$

Ahora bien, para obtener la transformada deseada, sólo se divide entre $(1 - e^{-\mathbf{s}T})$:

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{V_0}{\mathbf{s}} \frac{(1 - e^{-\mathbf{s}\tau})}{(1 - e^{-\mathbf{s}T})} \qquad [3]$$

Se debe observar la forma en que se manifiestan varios teoremas diferentes de la transformada en la ecuación [3]. El factor $(1 - e^{-\mathbf{s}T})$ en el denominador explica la periodicidad de la función, el término $e^{-\mathbf{s}\tau}$ en el numerador se debe al retardo del tiempo de la onda cuadrada negativa que anula al curso y el factor $V_0/\mathbf{s}$ es, desde luego, la transformada de las funciones escalón implicada en $v(t)$.

EJEMPLO A7.1

Determinar la transformada de la función periódica de la figura A7.2.

Se comienza escribiendo una ecuación que describa $f(t)$, una función compuesta por funciones impulso positivas y negativas alternadas.

$$f(t) = 2\delta(t-1) - 2\delta(t-3) + 2\delta(t-5) - 2\delta(t-7) + \cdots$$

Definiendo una nueva función f_1 y reconociendo un periodo $T = 4$ s,

$$f_1(t) = 2[\delta(t-1) - \delta(t-3)]$$

se puede utilizar la operación de periodicidad de tiempo, según se presenta en la tabla 14.2, a fin de obtener $\mathbf{F(s)}$

$$\mathbf{F(s)} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\mathbf{F}_1\mathbf{(s)} \qquad [4]$$

donde

$$\mathbf{F}_1\mathbf{(s)} = \int_{0^-}^{T} f(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{4} f_1(t)e^{-st}\,dt$$

Existen varias maneras de evaluar esta integral. La más fácil consiste en reconocer que su valor seguirá siendo el mismo si el límite superior se incrementa hasta ∞, lo que permite aplicar el teorema de corrimiento (o desplazamiento) en el tiempo. De tal modo,

$$\mathbf{F}_1\mathbf{(s)} = 2[e^{-s} - e^{-3s}] \qquad [5]$$

El ejemplo se concreta multiplicando la ecuación [5] por el factor indicado en la ecuación [4], por lo que

$$\mathbf{F(s)} = \frac{2}{1-e^{-4s}}(e^{-s} - e^{-3s}) = \frac{2e^{-s}}{1+e^{-2s}}$$

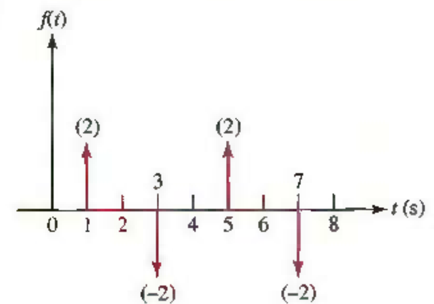


FIGURA A7.2 Función periódica basada en funciones de impulso unitario.

PRÁCTICA

A7.1 Determinar la transformada de Laplace de la función periódica que se muestra en la figura A7.3.

Respuesta: $\left(\dfrac{8}{s^2+\pi^2/4}\right)\dfrac{s+(\pi/2)e^{-s}+(\pi/2)e^{-3s}-se^{-4s}}{1-e^{-4s}}$.

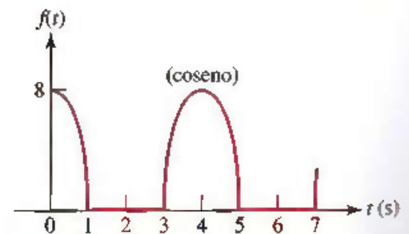


FIGURA A7.3

Desplazamiento en frecuencia

Este nuevo teorema establece una relación entre $\mathbf{F(s)} = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $\mathbf{F}(\mathbf{s}+a)$. Se considera la transformada de Laplace de $e^{-at}f(t)$,

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}e^{-at}f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t}f(t)\,dt$$

Observando con cuidado el resultado, se puede ver que la integral de la derecha es idéntica a la que define a $\mathbf{F(s)}$ con una excepción: $(\mathbf{s}+a)$ aparece en lugar de s. Por lo tanto,

$$e^{-at}f(t) \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{s}+a) \qquad [6]$$

Se puede concluir que la sustitución de s por $(\mathbf{s}+a)$ en el dominio de la frecuencia corresponde a multiplicar por e^{-at} en el dominio del tiempo. Lo anterior se conoce como teorema de ***desplazamiento en frecuencia***. De inmediato se puede aprovechar para evaluar la transformada de la función coseno amortiguada exponencialmente, lo cual utilizamos mucho en el trabajo anterior. Empezando con la transformada conocida de la función coseno

$$\mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\} = \mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + \omega_0^2}$$

entonces la transformada de $e^{-at}\cos \omega_0 t$ puede ser $\mathbf{F}(\mathbf{s}+a)$:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos \omega_0 t\} = \mathbf{F}(\mathbf{s}+a) = \frac{\mathbf{s}+a}{(\mathbf{s}+a)^2 + \omega_0^2} \qquad [7]$$

PRÁCTICA

A7.2 Encontrar $\mathcal{L}\{e^{-2t}\text{sen}(5t + 0.2\pi)u(t)\}$.

Respuesta: $(0.588\mathbf{s} + 4.05)/(\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 29)$.

Diferenciación en el dominio de la frecuencia

Se examinarán las consecuencias de diferenciar $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ con respecto a s. El resultado es

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mathbf{s}}\mathbf{F}(\mathbf{s}) &= \frac{d}{d\mathbf{s}}\int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\,dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} -te^{-\mathbf{s}t} f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}[-tf(t)]\,dt\end{aligned}$$

lo cual es simplemente la transformada de Laplace de $[-tf(t)]$. Por lo tanto, se concluye que la diferenciación con respecto a s en el dominio de la frecuencia origina la multiplicación por $-t$ en el dominio del tiempo, o

$$-tf(t) \Leftrightarrow \frac{d}{d\mathbf{s}}\mathbf{F}(\mathbf{s}) \qquad [8]$$

Supóngase ahora que $f(t)$ es la función rampa unitaria $tu(t)$, cuya transformada se sabe que es $1/\mathbf{s}^2$. Se recurre al recién estudiado teorema de diferenciación de frecuencia, a fin de determinar la transformada inversa de $1/\mathbf{s}^3$ como sigue:

$$\frac{d}{d\mathbf{s}}\left(\frac{1}{\mathbf{s}^2}\right) = -\frac{2}{\mathbf{s}^3} \Leftrightarrow -t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\mathbf{s}^2}\right\} = -t^2u(t)$$

y

$$\frac{t^2u(t)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}^3} \qquad [9]$$

Continuando con el mismo procedimiento, se encuentra que

$$\frac{t^3}{3!}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}^4} \qquad [10]$$

y, en general,

$$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}^n} \qquad [11]$$

PRÁCTICA

A7.3 Encontrar $\mathcal{L}\{t\,\text{sen}(5t + 0.2\pi)u(t)\}$.

Respuesta: $(0.588s^2 + 8.09s - 14.69)/(s^2 + 25)^2$.

Integración en el dominio de la frecuencia

Se puede ilustrar el efecto sobre $f(t)$ cuando se integra $\mathbf{F}(s)$ si se empieza una vez más con la definición

$$\mathbf{F}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

efectuando la integración de frecuencia desde s hasta ∞,

$$\int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(s)\,ds = \int_{s}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt\right] ds$$

intercambiando el orden de integración,

$$\int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(s)\,ds = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{s}^{\infty} e^{-st}\,ds\right] f(t)\,dt$$

y efectuando la integración interna,

$$\int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(s)\,ds = \int_{0^-}^{\infty} \left[-\frac{1}{t}e^{-st}\right]_{s}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-st}\,dt$$

De tal modo,

$$\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(s)\,ds \qquad [12]$$

Por ejemplo, ya establecimos el par de transformadas

$$\text{sen}\,\omega_0 t u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen}\,\omega_0 t u(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} \frac{\omega_0\,ds}{s^2 + \omega_0^2} = \tan^{-1} \frac{s}{\omega_0}\bigg|_{s}^{\infty}$$

y se tiene

$$\frac{\text{sen}\,\omega_0 t u(t)}{t} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{\omega_0} \qquad [13$$

PRÁCTICA

A7.4 Encontrar $\mathcal{L}\{\text{sen}^2 5t u(t)/t\}$.

Respuesta: $\frac{1}{4}\ln[(s^2 + 100)/s^2]$.

Teorema de ajuste en el tiempo

A continuación se formula el teorema de ajuste en el tiempo de la teoría de la transformada de Laplace, al evaluar la transformada de $f(at)$, suponiendo que se conoce $\mathcal{L}\{f(t)\}$. El procedimiento es muy simple:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(at)\, dt = \frac{1}{a}\int_{0^-}^{\infty} e^{-(s/a)\lambda} f(\lambda)\, d\lambda$$

donde se empleó el cambio de variable $at = \lambda$. La última integral se reconoce como $1/a$ veces la transformada de Laplace de $f(t)$, excepto porque $\mathbf{s}$ se sustituye por $\mathbf{s}/a$ en la transformada. Se desprende que

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{s}}{a}\right) \qquad [14]$$

Como un ejemplo elemental del uso de este teorema de ajuste en el tiempo, considérese la determinación de la transformada de una onda coseno de 1 kHz. Suponiendo que se conoce la transformada de una onda coseno de 1-rad/s,

$$\cos t u(t) \Leftrightarrow \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+1}$$

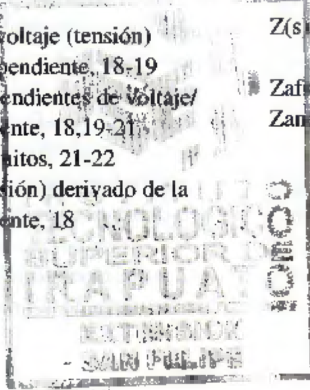
el resultado es

$$\mathcal{L}\{\cos 2\,000\pi t u(t)\} = \frac{1}{2\,000\pi}\frac{\mathbf{s}/2\,000\pi}{(\mathbf{s}/2\,000\pi)^2+1} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+(2\,000\pi)^2}$$

PRÁCTICA

A7.5 Encontrar $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}^2 5t u(t)\}$.

Respuesta: $50/[\mathbf{s}(\mathbf{s}^2+100)]$.



TECNOLÓGICO
SUPERIOR D
IRAPUAT

857

Breve tabla de integrales

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int x \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\operatorname{sen} ax - ax \cos ax)$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2ax \operatorname{sen} ax + 2 \cos ax - a^2x^2 \cos ax)$$

$$\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax \operatorname{sen} ax)$$

$$\int x^2 \cos ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cos ax - 2 \operatorname{sen} ax + a^2x^2 \operatorname{sen} ax)$$

$$\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)}; \; a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}; \; a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)}; \; a^2 \neq b^2$$

$$\int x\, e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$

$$\int x^2 e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi;\ a > 0 \\ 0;\ a = 0 \\ -\frac{1}{2}\pi;\ a < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0;\ m \neq n,\ n \text{ y } m \text{ enteros}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0;\ m - n \text{ par} \\ \dfrac{2m}{m^2 - n^2};\ m - n \text{ impar} \end{cases}$$

Breve tabla de identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha \pm 90^\circ) = \mp \operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm 90^\circ) = \pm \cos\alpha$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha - \beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \tfrac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{j2}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j \operatorname{sen}\alpha$$

$$A\cos\alpha + B\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(\alpha + \tan^{-1}\frac{-B}{A}\right)$$

La característica distintiva de este texto clásico es su enfoque en los estudiantes, pues está escrito de tal forma que éstos puedan aprender por sí mismos el arte del análisis de circuitos. Los términos se definen claramente cuando se presentan por primera vez, el material básico se expone con cuidado al comienzo de cada capítulo y se utilizan ejemplos numéricos para presentar y sugerir resultados genéricos. Los problemas de práctica tienen un determinado nivel de dificultad y permiten que los alumnos puedan evaluar su avance por sí mismos de manera regular. Esta introducción que sirve como puente, así como la estrategia de repetición subsiguiente, proporcionan una importante ayuda al proceso de aprendizaje. Los abundantes recursos pedagógicos de los autores ayudan y alientan al estudiante ofreciéndole consejos y advertencias, figuras diseñadas cuidadosamente, fotografías y tablas. Una vez que se han abordado los fundamentos, se exploran también los temas a través de ejemplos de diseño adecuados y se estudia el análisis asistido por computadora como una forma de verificar los resultados. A lo largo del texto se exponen los temas de una manera amena, lo cual resalta la convicción de los autores de que el análisis de circuitos puede y deber ser divertido.

CARACTERÍSTICAS

- Las técnicas de resolución de problemas se presentan en el capítulo 1 con objeto de preparar a los alumnos para que desarrollen una forma metódica de analizar circuitos. En cada uno de los capítulos siguientes hay ejemplos cuidadosamente seleccionados que ayudan a recordar la metodología de resolución paso a paso de los mismos.
- Los cuadros de aplicación práctica que se encuentran a lo largo de todo el libro relacionan el material con situaciones del mundo real y enlazan conceptos de diseño y de resolución de problemas.
- Se incluyen ejemplos de PSpice y MATLAB que presentan características prácticas como los barridos de CD, el análisis transitorio, la manipulación de variables, la solución de ecuaciones y permiten valorar el texto desde una perspectiva más amplia.
- Al final de algunos capítulos selectos se presentan preguntas orientadas al diseño para ayudar a los alumnos a comprender las complejidades implícitas en dicho proceso.

McGraw-Hill Interamericana

The McGraw-Hill Companies


ISBN-13: 978-970-10-6107-7
ISBN-10: 970-10-6107-1